Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher

Wintersemester 2012/2013

B

Übungen zur Analysis II

– Blatt 6 –

Abgabe: Freitag, den 30.11.2012, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

Aufgabe 6.1. (10 Punkte)
Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein hausdorffscher topologischer Raum. Zeige:

(i) Ist $K \subset X$ kompakt, dann ist K auch abgeschlossen.

(ii) Sind $A_1, \ldots, A_n \subset X$ kompakte Teilmengen von X, dann sind folgende Mengen kompakt:

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j, \qquad \bigcap_{j=1}^{n} A_j$$

Aufgabe 6.2. (10 Punkte)

(i) Zeige, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen $(X, \mathfrak{X})$ und $(Y, \mathfrak{Y})$ genau dann stetig ist, wenn für jede abgeschlossene Menge $A \subset Y$ auch die Menge $f^{-1}(A) \subset X$ abgeschlossen ist.

(ii) Sei nun $f : X \to Y$ eine stetige und bijektive Abbildung zwischen den hausdorffschen topologischen Räumen $(X, \mathfrak{X})$ und $(Y, \mathfrak{Y})$. Zeige: Ist X kompakt, dann ist f ein Homöomorphismus.

(iii) Zeige anhand eines Beispiels, dass die Aussage aus (ii) im Allgemeinen falsch ist, wenn X nicht als kompakt vorausgesetzt wird.

Aufgabe 6.3. (10 Punkte)
Es sei $(X, \mathfrak{X})$ ein kompakter hausdorffscher topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige, dass es $x, y \in X$ gibt, so dass gilt:

$$f(x) = \min f(X), \quad f(y) = \max f(X)$$

Aufgabe 6.4. (10 Punkte)
Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem reellen Vektorraum V heißen äquivalent, falls es positive reelle Zahlen $C_1 > 0$ und $C_2 > 0$ gibt, so dass für alle $v \in V$ gilt:

$$C_1\|v\| \leqslant \|v\|' \leqslant C_2\|v\|$$

Sei $\|\cdot\|_2$ die euklidische und $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass diese äquivalent sind und folgere, dass alle Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ dieselbe Topologie induzieren, die *natürliche Topologie des* $\mathbb{R}^n$.

Anleitung: Sei $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$. Zeige zunächst, dass die Funktion

$$g : S \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$$

ihr Maximum und Minimum auf S annimmt. Nutze dann, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$ der Punkt $\frac{1}{\|x\|_2} \cdot x$ in S liegt um die Äquivalenz nachzuweisen.