Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher Wintersemester 2012/2013

B

Übungen zur Analysis II

– Blatt 7 –

Abgabe: Freitag, den 07.12.2012, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

Aufgabe 7.1. (10 Bonuspunkte)
Es sei
$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \big(\exp(t)\cos(2\pi t), \exp(t)\sin(2\pi t)\big).$$

(i) Berechne für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ die Länge $L(\varphi|_{[a,b]})$. Zeige, dass der Grenzwert $\lim_{a\to-\infty} L(\varphi|_{[a,0]})$ existiert und berechne diesen.

(ii) Skizziere die Kurve $\varphi|_{[-1,1]}$.

Aufgabe 7.2. (10 Bonuspunkte)
Die *Weglängenfunktion* einer rektifizierbaren Kurve $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch:
$$L_f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad L_f(t) := \begin{cases} 0 & \text{falls } t = a \\ L\left(f|_{[a,t]}\right) & \text{falls } t \in (a, b] \end{cases}$$

(i) Zeige: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve, dann ist auch die Weglängenfunktion $L_f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es gilt $L'_f(t) = \|f'(t)\|_2$ für alle $t \in (a, b)$.

(ii) Zeige: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare, reguläre (d.h. $f'(t) \neq 0$ für alle $t \in (a, b)$) Kurve der Länge L, dann ist $L_f : [a, b] \to [0, L]$ eine differenzierbare Parametertransformation und für die transformierte Kurve $\hat{f} : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ mit $\hat{f} = f \circ L_f^{-1}$ gilt $L_{\hat{f}}(s) = s$ für alle $s \in [0, L]$. Kurven mit dieser Eigenschaft nennt man *nach der Weglänge parametrisierte Kurven.*

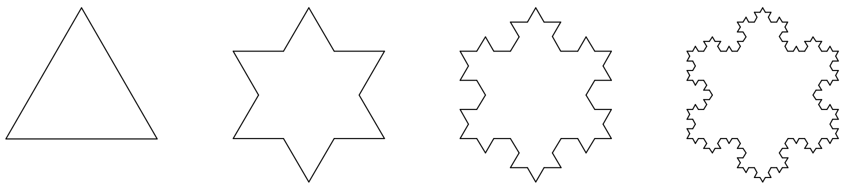
(iii) Berechne für die Kurve
$$\varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \big(\cos(t) + t\sin(t), \sin(t) - t\cos(t)\big)$$
die nach der Weglänge parametrisierte Kurve $\hat{\varphi}$.

Aufgabe 7.3. (10 Bonuspunkte)
In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die bezüglich der euklidischen Norm kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten des $\mathbb{R}^n$ eine gerade Strecke ist. Seien dazu $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq y$ zwei verschiedene Punkte und
$$g_{xy} : [0, 1] \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto x + t(y - x)$$
die gerade Verbindungsstrecke zwischen x und y. Zeige: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine beliebige stetig differenzierbare Kurve mit $f(a) = x$ und $f(b) = y$, d.h. mit Anfangspunkt x und Endpunkt y, dann gilt:
$$L(f) \geqslant L(g_{xy})$$

Hinweis: Eine Möglichkeit, diese Aussage zu beweisen, besteht darin, aus dem Vektor $y - x \neq 0$ eine geeignete Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ zu konstruieren.

Bitte wenden!

Aufgabe 7.4. (10 Bonuspunkte)
Die *Schneeflockenkurve* entsteht durch das folgende induktive Konstruktionsverfahren: Wir beginnen mit einem gleichseitigen Dreieck S_1 mit Seitenlängen 1. Jetzt dritteln wir jede Seite und errichten über dem Mittelstück jeder Seite ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlängen $\frac{1}{3}$. Wenn wir noch die Basis jedes der kleineren Dreiecke entfernen, erhalten wir den sechszackigen Stern S_2. In S_2 dritteln wir wieder alle geradlinigen Seitenstücke, konstruieren (zwölf) kleinere Dreiecke und erhalten den achtzehnzackigen Stern S_3. So fortfahrend konstruieren wir Kurven $S_4, S_5, \ldots$.



S_1 S_2 S_3 S_4

(i) Berechne eine explizite Formel für die Länge $L(S_n)$ der Kurve S_n und zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} L(S_n) = \infty$$

gilt.

(ii) Berechne eine explizite Formel für den Flächeninhalt F_n der von der Kurve S_n eingeschlossenen Fläche A_n. Verwende hierfür die elementargeometrische Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks und benutze, dass sich Flächeninhalte von Flächen, welche aus disjunkten Teilflächen zusammengesetzt sind, durch Addition der Flächeninhalte der Teilflächen berechnen lassen. Zeige dann, dass

$$\lim_{n\to\infty} F_n$$

in $\mathbb{R}$ existiert und berechne den Grenzwert.

Bemerkung: Mit Wissen aus der *Maß- und Integrationstheorie* kann man zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} F_n$ genau der Flächeninhalt der (schwer vorstellbaren) Menge

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \mathbb{R}^2$$

ist.