Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher

Wintersemester 2012/2013

B

Übungen zur Analysis II

– Blatt 8 –

Abgabe: Freitag, den 14.12.2012, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

Aufgabe 8.1. (10 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } xy = 0 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass f im Punkt $(0,0)$ partiell differenzierbar aber nicht stetig ist.

Aufgabe 8.2. (10 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Zeige, dass f in allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ zweimal partiell differenzierbar ist und dass
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)$$
gilt.

(ii) Zeige, dass f in allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar ist.

(iii) Welche Aussage über die Funktion f folgt aus dem Satz von Schwarz?

Aufgabe 8.3. (10 Punkte)
Es seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ für alle $x \in G$. Sei weiter $\varphi : [a,b] \to G$ eine stetig differenzierbare Höhenlinie der Funktion f, d.h. $f \circ \varphi$ ist konstant. Zeige, dass in jedem Kurvenpunkt die Richtung der Kurve φ orthogonal zur Richtung des maximalen Anstiegs von f ist.

Aufgabe 8.4. (10 Punkte)
Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Wir definieren eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch:

$$f(x) := \left(\|Ax - b\|_2\right)^2$$

(i) Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$
$$\operatorname{grad} f(x) = 2\big(\,\langle Ae_1, Ax - b\rangle\,, \dots, \langle Ae_n, Ax - b\rangle\,\big)$$
gilt, wobei $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ bezeichne.

(ii) Es sei nun vorausgesetzt, dass das lineare Gleichungssystem $Ay = b$ mindestens eine Lösung $y \in \mathbb{R}^n$ besitzt. Zeige dass die folgenden Aussagen über einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ äquivalent sind:

   (a) x ist eine Lösung des Gleichungssystems, d.h. es gilt $Ax = b$.

   (b) Es ist $\operatorname{grad} f(x) = 0$.