Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher

Wintersemester 2012/2013

B

Übungen zur Analysis II

– Blatt 9 –

Abgabe: Freitag, den 21.12.2012, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

Aufgabe 9.1. (10 Punkte)
Zeige, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ welche durch

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \sin(y)\cos(z) \\ x\sin(y)\sin(z) \\ x\cos(y) \end{pmatrix}$$

gegeben ist, in allen Punkten des $\mathbb{R}^3$ total differenzierbar ist und berechne jeweils das totale Differential.

Aufgabe 9.2. (10 Punkte)
Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, welche in einem Punkt $x \in U$ total differenzierbar ist. Weiter seien Basen $v = (v_1, \dots, v_n)$ des $\mathbb{R}^n$ und $w = (w_1, \dots, w_m)$ des $\mathbb{R}^m$ gegeben.
Da w eine Basis ist, können wir $f(y)$ für alle $y \in U$ in der Form

$$f(y) = \sum_{k=1}^{m} f_{w_k}(y) w_k$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $f_{w_k}(y) \in \mathbb{R}$ schreiben.

(i) Zeige, dass die Funktionen $f_{w_k} : U \to \mathbb{R}$ für alle $k \in \{1, \dots, m\}$ in x total differenzierbar sind.

(ii) Zeige, dass die lineare Abbildung $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bezüglich der Basen v und w durch folgende Matrix gegeben wird:

$$M(Df(x), v, w) = \begin{pmatrix} D_{v_1} f_{w_1}(x) & \dots & D_{v_n} f_{w_1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ D_{v_1} f_{w_m}(x) & \dots & D_{v_n} f_{w_m}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

(iii) Beschreibe den Bezug zwischen der Jacobimatrix von f in x und der Beobachtung aus Teil (ii).

Aufgabe 9.3. (10 Punkte)
Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ sei in allen Punkten $x \in U$ total differenzierbar mit $Df(x) = 0$.

(i) Zeige, dass f lokal konstant ist, d.h. dass es für jeden Punkt $x \in U$ eine Umgebung $V \subset U$ von x gibt, so dass f auf V konstant ist.

Hinweis: Verwende den Mittelwertsatz der Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen.

(ii) Zeige, dass f sogar konstant ist, falls U wegzusammenhängend ist, d.h. falls es zu je zwei Punkten $x, y \in U$ eine stetige Kurve $\gamma : [a, b] \to U$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ gibt.

Bitte wenden!

Aufgabe 9.4. (10 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbar und homogen vom Grad d für ein $d \in \mathbb{N}$, d.h. es gilt

$$f(tx) = t^d f(x) \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ folgende Gleichung gilt:

$$f(x) = \frac{1}{d} \operatorname{grad} f(x) \cdot x$$

Hinweis: Betrachte die Hilfsfunktion $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\psi(t, x) = tx$ und verwende die Kettenregel.