



## Übungen zur Analysis II

– Blatt 1 –

Abgabe: Freitag, den 26.10.2012, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

### Aufgabe 1.1. (10 Punkte)

(i) Berechne die folgenden Integrale:

$$(a) \int_1^2 x^3 \ln(x) dx \quad (b) \int_0^\pi \exp(x) \sin(x) dx \quad (c) \int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+4} dx$$

(ii) Überprüfe, ob das folgende uneigentliche Integral existiert und berechne, falls es existiert, den Wert:

$$\int_0^\infty x \exp(-x^2) dx$$

### Aufgabe 1.2. (10 Punkte)

(i) Es seien für  $n \in \mathbb{N}$  beschränkte Funktionen  $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Menge  $K \subset \mathbb{R}$  gegeben, welche auf  $K$  gleichmäßig gegen die Grenzfunktion  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  konvergieren. Zeige, dass dann auch  $f$  beschränkt ist.

(ii) Untersuche die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise sowie gleichmäßige Konvergenz und gib die Grenzfunktionen an:

$$(a) f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(-n(x^2 + 1))$$

$$(b) g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left(x + \frac{1}{n}\right)^2$$

$$(c) h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{nx}{1+|nx|}$$

### Aufgabe 1.3. (20 Punkte)

#### Geometrische Interpretation algebraischer Operationen

Es sei eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Wir untersuchen in dieser Aufgabe, wie algebraische Operationen an der Funktion und geometrische Operationen am Funktionsgraphen  $G_f \subset \mathbb{R}^2$  einander entsprechen.

1. **Algebraische Operationen geometrisch beschreiben.** Beschreiben Sie, durch welche geometrischen Operationen (z.B. Spiegelungen, Streckungen oder Verschiebungen) sich die Graphen der nachfolgenden Funktionen aus dem Graphen von  $f$  ergeben:

$$(a) -f$$

$$(b) x \mapsto f(x+5)$$

$$(c) x \mapsto f\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$(d) \text{ die Umkehrfunktion } f^{-1}, \text{ falls } f \text{ invertierbar ist}$$

$$(e) |f|$$

Bitte wenden!

2. **Geometrische Operationen algebraisch beschreiben.** Der Graph von  $f$  werde den nachfolgenden Operationen unterworfen. Untersuchen Sie in jedem der Fälle, ob die entstehende Punktmenge wieder der Graph einer Funktion ist (bzw. unter welchen Voraussetzungen sie es ist), und geben Sie diese Funktion gegebenenfalls an.
- (a) Spiegelung an der  $y$ -Achse
  - (b) Verschiebung in  $y$ -Richtung um 3 Einheiten
  - (c) Verschiebung in  $x$ -Richtung um 2 Einheiten
  - (d) Streckung in  $y$ -Richtung um den Faktor 2
  - (e) Spiegelung an der Gerade  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\}$
3. **Strecken und Stauchen in verschiedene Richtungen.** Klaus sagt: „Ob ich eine Funktion in  $x$ -Richtung um den Faktor 2 strecke oder in  $y$ -Richtung um den Faktor  $\frac{1}{2}$ , kommt auf dasselbe heraus.“
- (a) Hat er recht?
  - (b) Überlegen Sie, dass bei der Funktion  $x \mapsto x^2$  jede Streckung in  $x$ -Richtung durch eine Streckung in  $y$ -Richtung ersetzt werden kann. Ist das bei *jeder* Funktion so?
4. **Gerade und ungerade Funktionen.** Geben Sie jeweils zwei (möglichst unterschiedliche) Beispiele für gerade und ungerade Funktionen. Zeigen Sie außerdem: Jede Funktion lässt sich als Summe aus einer geraden und einer ungeraden Funktion schreiben.  
*Tipp:*  $x \mapsto f(x) + f(-x)$  ist immer gerade und  $x \mapsto f(x) - f(-x)$  ist immer ungerade.
5. **Lineare und affin-lineare Transformationen.** Im zweiten Aufgabenteil wurden Funktionsgraphen gewissen geometrischen Operationen in der Ebene (d.h. Abbildungen  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) unterworfen. Untersuchen Sie, bei welchen es sich um lineare oder affin-lineare Abbildungen handelt, und beschreiben Sie diese in Matrizenform, d.h. in der Form

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b \end{aligned}$$

mit einer Matrix  $A \in M_2(\mathbb{R})$  und einem Spaltenvektor  $b \in \mathbb{R}^2$ .