Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher

Wintersemester 2012/2013

L

Übungen zur Analysis II

– Blatt 10 –

Abgabe: Freitag, den 18.01.2013, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

Aufgabe 10.1. (10 Punkte)

(i) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite (bzw. negativ definite) Matrix. Zeige: A ist invertierbar und A^{-1} ist ebenfalls positiv definit (bzw. negativ definit).

(ii) Gib ein Beispiel für eine symmetrische, indefinite Matrix an, welche nicht invertierbar ist. Kann es solche Matrizen in $\mathbb{R}^{1\times 1}$ bzw. $\mathbb{R}^{2\times 2}$ geben?

(iii) Es sei eine symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gegeben. Zeige, dass die Vorzeichen von $\det A$ und a die Definitheit der Matrix A gemäß folgender Tabelle implizieren:

	$\det A > 0$	$\det A = 0$	$\det A < 0$
$a > 0$	A positiv definit	A positiv semidefinit	A indefinit
$a < 0$	A negativ definit	A negativ semidefinit	A indefinit

Diskutiere außerdem den Fall $a = 0$.

Aufgabe 10.2. (10 Punkte)

(i) Bestimme in Abhängigkeit von $\mu > 0$ alle lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \exp(xy) + x^2 + \mu y^2.$$

(ii) Es sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$. Zeige:

(a) g besitzt in $(0, 0)$ kein lokales Minimum.

(b) Für jeden Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ besitzt die Funktion

$$g_{(a,b)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto g(ta, tb)$$

in 0 ein striktes lokales Minimum.

Aufgabe 10.3. (20 Punkte)

(i) Für eine gegebene reelle Zahl $c > 0$ betrachten wir die Menge M_c aller Rechtecke in der Ebene $\mathbb{R}^2$, deren Flächeninhalt gleich c ist. Die Funktion $U : M_c \to \mathbb{R}$ ordne jedem solchen Rechteck seinen Umfang zu. Prüfe, ob U beschränkt ist und gib ggf. ein Supremum bzw. Maximum und ein Infimum bzw. Minimum an.

Bitte wenden!

(ii) Nun betrachten wir für eine gegebene reelle Zahl $c > 0$ die Menge N_c aller Rechtecke im $\mathbb{R}^2$, deren Umfang gleich c ist. Die Funktion $A : N_c \to \mathbb{R}$ ordne jedem solchen Rechteck seinen Flächeninhalt zu. Zeige, dass A ein Maximum besitzt.

Arbeite zwei Lösungswege aus: Eine Lösung mit den Methoden der Analysis und eine Lösung, die mit Methoden der gymnasialen Mittelstufe auskommt.

(iii) Formuliere die zu (i) und (ii) analogen Fragestellungen für

(a) Kreise anstatt Rechtecke

(b) dreidimensionale Körper

und versuche, einige davon zu beantworten.

(iv) Verwende die Integralformel für Bogenlängen, um zu zeigen, dass sich der Umfang einer Ellipse mit den Halbachsen a und b durch das Integral

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}\, dt \qquad (*)$$

ausdrücken lässt. Zeige, dass dieses gleich dem sogenannten *elliptischen Integral*

$$4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos^2(t)}\, dt$$

ist. Nutze eine der Integraldarstellungen, um zu zeigen, dass es bei gegebenem Flächeninhalt Ellipsen von beliebig großem Umfang gibt.

(v) Eine analog zum Ergebnis von Teil (ii) nahe liegende Erwartung ist, dass unter allen Ellipsen mit gegebenem Umfang genau die Kreise den maximalen Flächeninhalt haben. Begründe, dass dies gezeigt ist, sobald man die nachfolgende Ungleichung für den Umfang einer Ellipse mit Halbachsen a und b gezeigt hat:

$$U \geqslant 2\pi\sqrt{ab}$$

Beweise diese Ungleichung.

Hier ist ein Vorschlag für eine mögliche Vorgehensweise:

(1) Beginne ausgehend von der in Aufgabenteil (iv) genannten Formel $(*)$ mit dem Trick einer *Eins-Ergänzung*: Multipliziere den Ausdruck unter der Wurzel mit $\sin^2(t) + \cos^2(t)$ und zeige dann, dass er durch $(a \sin^2(t) + b \cos^2(t))^2$ nach unten abgeschätzt werden kann.

(2) Nutze die gewonnene Abschätzung, um zu folgern, dass gilt:

$$U \geqslant \int_0^{2\pi} a \sin^2(t) + b \cos^2(t)\, dt$$

(3) Berechne nun das Integral aus (2), um so zur behaupteten Ungleichung zu gelangen. Nutze dazu die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel.

Das Team der Analysis II wünscht euch schöne Winterferien und ein gutes Jahr 2013!