Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher

Wintersemester 2012/2013

L

Übungen zur Analysis II

– Blatt 11 –

Abgabe: Freitag, den 25.01.2013, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

Aufgabe 11.1. (10 Punkte)
Zeige, dass die Gleichung

$$z^3 + z + xy = 1$$

für jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine reelle Lösung $z = g(x, y)$ besitzt und dass die dadurch gegebene Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar ist. Bestimme die lokalen Extrema von g.

Aufgabe 11.2. (10 Punkte)
Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Ein kritischer Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ von f heißt *nichtausgeartet*, falls

$$\det\left(\operatorname{Hess} f(x)\right) \neq 0$$

gilt. Zeige: Ist $x \in \mathbb{R}^n$ ein nichtausgearteter kritischer Punkt von f, dann gibt es eine Umgebung $V \subset U$ von x in der es außer x keine weiteren kritischen Punkte von f gibt.

Aufgabe 11.3. (20 Punkte)
Ein Extremwertproblem
Milch oder Saft wird oft in quaderförmigen Tüten verkauft. Diese werden aus einem einzigen Stück Pappe durch Falten und Verkleben hergestellt. Abbildung 1 zeigt das Netz einer solchen Tüte. Die 9 mm schmalen Ränder dienen zum Verkleben.

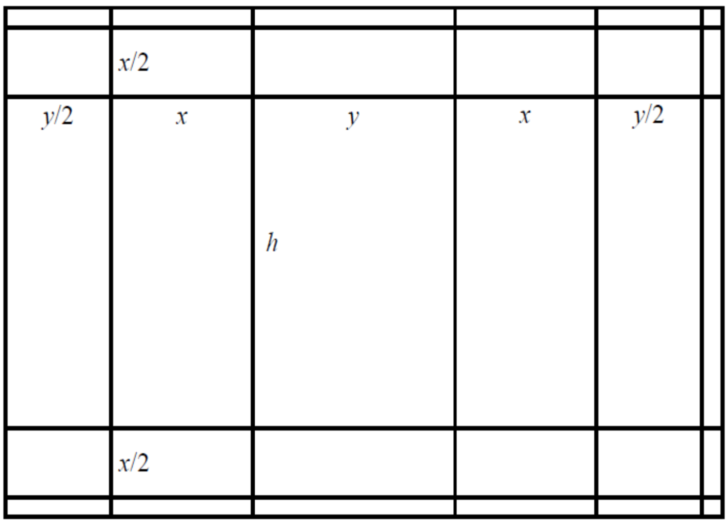

Abbildung 1

(a) Stelle in Abhängigkeit von x und y eine Funktion $f(x, y)$ auf, die den Materialverbrauch für eine Tüte mit einem Volumen von 1000 cm^3 (1 Liter) angibt.

(b) Begründe ohne Rechnung, warum die auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ eingeschränkte Materialfunktion f ein *globales* Minimum besitzen muss.

Bitte wenden!

(c) Zeige, dass die Gleichung $4x^3y + 4{,}5x^2y - 3{,}6xy^2 + 2000\,(x - y) = 0$ eine notwendige Bedingung für die Minimierung des Materialverbrauchs darstellt.

(d) Der Graph der Funktion $z = f(x, y)$, eingeschränkt auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, ist eine einfach zusammenhängende, gekrümmte Fläche im $\mathbb{R}^3$. Bildet man Schnitte durch diesen Graphen parallel zur x-z-Ebene bzw. parallel zur y-z-Ebene, so erhält man Kurven, die sich jeweils als Graphen einer Kurvenschar interpretieren lassen, mit x bzw. y als Parameter. Abbildung 2 zeigt einige Graphen der Scharen $f_y(x)$ (Abb. 2a) und $f_x(y)$ (Abb. 2b) jeweils für die Parameterwerte 1, 5, 10, 20 und 50. Erläutere anschaulich unter Bezugnahme auf den Graphen der Materialfunktion f, wie man mit Hilfe einer systematischen Variation der Parameter die den Materialverbrauch minimierenden Werte von x und y beliebig genau approximieren kann. Begründe, warum man sich hierbei auf die Variation *eines* der beiden Parameter beschränken kann. Gib aufgrund der in Abbildung 2 dargestellten (kleinen) Auswahl an Kurven eine möglichst genaue Schätzung für einen Punkt (x_0, y_0), mit der Eigenschaft, dass die Materialfunktion f in der Nähe dieses Punktes minimal wird.

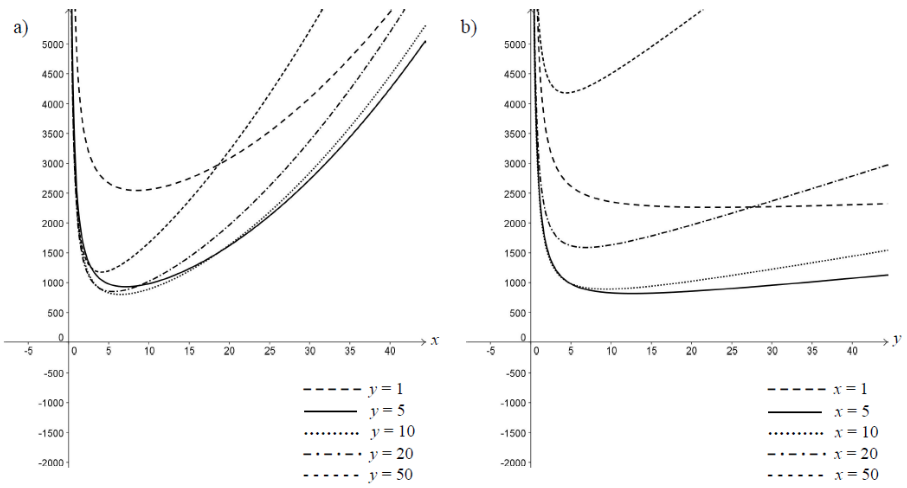

Abbildung 2

(e) Für Milchtüten mit quadratischer Grundfläche lässt sich das Minimum der Materialfunktion f mit Mitteln der Schul-Analysis *exakt* berechnen. Bestimme die entsprechende Lösung unter der Vorgabe, dass die Breite der Kleberänder 10% der Kantenlänge der Grundfläche beträgt.