Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher Wintersemester 2012/2013

L

Übungen zur Analysis II

– Blatt 12 –

Abgabe: Freitag, den 01.02.2013, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

Aufgabe 12.1. (10 Punkte)

(i) Berechne für $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems auf einer kleinen Umgebung um x_0:

$$y' = \cos(x) \cdot \exp(y) \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad y(x_0) = y_0$$

Bestimme im Fall $y_0 = 0$ das maximale Existenzintervall dieser Lösung in Abhängigkeit von x_0 explizit.

(ii) Für $p \in \mathbb{R}$ heißt die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) y = 0 \quad \text{auf } (0, \infty) \times \mathbb{R}$$

Besselsche Differentialgleichung der Ordnung p. Bestimme ein Lösungs-Fundamentalsystem der Besselschen Differentialgleichung der Ordnung $p = \frac{1}{2}$. Verwende hierfür den Ansatz $z = \sqrt{x}y$.

Aufgabe 12.2. (10 Punkte)

Ein Student hat sich eine gewisse Menge an Wissen etwa zur Analysis eingeprägt. Mit der Zeit wird er einiges davon vergessen. Wir bezeichnen den Prozentsatz des Stoffes den er t Zeiteinheiten nach dessen voller Meisterung noch im Gedächtnis hat mit $p(t)$. Es ist also $p(0) = 100$. Optimistischerweise wird man annehmen dürfen, dass er einen gewissen Prozentsatz b mit $0 < b < 100$ des Stoffes nie vergisst und ferner wird man den Ansatz wagen, dass zur Zeit t die Vergessensrate $p'(t)$ proportional zu dem Prozentsatz des noch zu vergessenden Stoffes $p(t) - b$ ist.

Formuliere dieses Modell der Gedächtnisleistung des Studenten in Form eines Anfangswertproblems, bestimme die Lösung und skizziere sie für eine beliebige Wahl der auftretenden Parameter.

Aufgabe 12.3. (20 Punkte)

Da die beim Bau der Eder-Talsperre erhobenen Daten nach rund 100 Jahren Betriebszeit bereits einige Ungenauigkeiten aufwiesen, nutzte das Wasser- und Schifffahrtsamt Hann. Münden die Gelegenheit des besonders trockenen Sommers 2003, um den fast leeren See neu auszumessen. Mithilfe eines Laserscanners und GPS-Ortung wurden von einem Hubschrauber aus die Höhenlinien im (senkrechten) Abstand von je einem Zentimeter bestimmt und die Größe der von ihnen jeweils eingeschlossenen Fläche ermittelt. Mit ihrer Hilfe konnte dann das zugehörige Speichervolumen von der Talsohle bis zur jeweiligen Höhe des Wasserspiegels berechnet werden.

(a) Nenne charakteristische (mathematische) Eigenschaften der Flächenfunktion $A(h)$ sowie der Volumenfunktion $V(h)$, die bei der Beschreibung eines Stausee generell zu erwarten sind. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden Funktionen? Erläutere, wie sich das Speichervolumen in Abhängigkeit von der Höhe h des Wasserspiegels berechnen lässt.

Bitte wenden!

(b) Die nachfolgende Tabelle zeigt einen Auszug einiger Messwerte des Wasser- und Schifffahrtsamtes Hann. Münden aus dem Jahr 2008.

h in m über NN	$A(h)$ in Mill. m²	$V(h)$ in Mill. m³
220	3,54	27,1
222	3,99	34,7
224	4,51	43,2
226	5,99	52,7
228	5,38	63,0
230	5,81	74,2
232	6,39	86,4
234	7,10	99,8
236	7,70	114,6
238	8,53	130,8
240	9,26	148,6
242	10,11	167,9
244	10,89	188,9
245	11,15	199,9

Für Planungen ist es interessant, eine möglichst gute approximative Beschreibung der Daten mittels einfacher Funktionen zur Verfügung zu haben. Approximiere zunächst $A(h)$, indem du die Punkte von 220 bis 232 und von 232 bis 245 jeweils *geradlinig* verbindest. Approximiere dann $V(h)$ mit einer *kubischen* Funktion, die an den Stellen 220 bzw. 245 das Volumen zum Funktionswert und den Flächeninhalt zur Steigung hat. Zeichne $A(h)$ und $V(h)$ für jeweils *beide* Approximationen in zwei geeignete Koordinatensysteme und berechne jeweils den *mittleren absoluten Fehler* als Maß für die Approximationsgüte.

(c) Auf der Höhe von 202 m NN befinden sich sechs Grundablassröhren in der Staumauer, jeweils mit einem Durchmesser von 1,20m. Nach dem *Torricellischen Gesetz* beträgt die Geschwindigkeit v, mit der das Wasser ausläuft, $v = \sqrt{2g \cdot \Delta h}$. Hierin ist $g \approx 9{,}81 m/s^2$ die Erdbeschleunigung und Δh die Höhe der Wassersäule über der Auslassöffnung. Da aber stets Reibungsverluste auftreten, muss die Geschwindigkeit noch mit einem Faktor kleiner als 1 multipliziert werden, dem sogenannten *Widerstandsbeiwert* b. Im Fall der Grundablassröhren kann er mit $b \approx 0{,}75$ veranschlagt werden. Schätze mittels dieser Angaben ab, um wie viel Meter der Wasserspiegel in 24 Stunden sinkt, wenn alle sechs Röhren offen sind und kein Wasser zufließt. Die Öffnung der Röhren erfolgt bei einer Wasserhöhe von 240 m.

(d) Um die Ergebnisse aus Teil (c) zu kontrollieren, soll jetzt eine Differentialgleichung für den Abflussvorgang aufgestellt werden. Dazu betrachten wir einen infinitesimalen Zeitraum, in dem der Wasserspiegel von einer Höhe h auf die Höhe $h - dh$ absinkt. Dabei ändert sich die Größe der Wasseroberfläche nicht. Bezeichnet man die Gesamtquerschnittsfläche der sechs Abflussröhre mit Q, gilt infolgendessen

$$b\sqrt{2g(h-202)}\,Qdt = -A(h)dh$$

Erläutere diese Gleichung anhand der auftretenden Terme, und löse die Differentialgleichung unter der Annahme, dass 1. $A(h)$ *konstant* bleibt und 2. $A(h)$ sich in dem fraglichen Bereich *linear* ändert. Diskutiere das Ergebnis.