Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher Wintersemester 2012/2013

L

Übungen zur Analysis II

– Blatt 2 –

Abgabe: Freitag, den 02.11.2012, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

Aufgabe 2.1. (10 Punkte)

(i) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbare Funktionen und

$$T_2[f,1](x) = -1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 \quad \text{sowie} \quad T_2[g,0](x) = 1 - x + 5x^2$$

die Taylorpolynome der Ordnung 2 von f bzw. g um die Entwicklungspunkte 1 bzw. 0. Bestimme das Taylorpolynom der Ordnung 2 der Funktion $h(x) = f(g(x))$ um den Entwicklungspunkt 0.

(ii) Berechne die Taylorreihe der Funktion $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Entwicklungspunkt π und zeige mit der Lagrangeschen Form des Restgliedes, dass diese auf ganz $\mathbb{R}$ gegen die Funktion konvergiert. Zeichne die Graphen des Cosinus und der ersten 5 Taylorpolynome im Intervall $[0, 7]$.

Aufgabe 2.2. (10 Punkte)

(i) Sei M eine nichtleere Menge. Zeige, dass durch

$$d_d(p,q) := \begin{cases} 0 & \text{falls } p = q \\ 1 & \text{falls } p \neq q \end{cases}$$

eine Metrik auf M definiert wird, die *diskrete Metrik*.

(ii) Zeige, dass auf $\mathbb{R}^2$ durch

$$d_f(x,y) := \begin{cases} \|x-y\|_2 & \text{falls } x, y \text{ linear abhängig} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{falls } x, y \text{ linear unabhängig} \end{cases}$$

wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm bezeichne, eine Metrik definiert wird, die *French-Railroad-Metrik*. Beschreibe, wie durch diese Metrik im Gegensatz zur von der euklidischen Norm induzierten Metrik, Abstände gemessen werden.

Aufgabe 2.3. (20 Punkte)
Analyse eines Definitionsversuchs: Integration mit äquidistanten Rechtssummen

Jemand – nennen wir ihn Moritz – hat schon zahlreiche Integrale mit Hilfe von Riemannschen Summen berechnet und dabei folgende Beobachtung gemacht:

Riemannsche Summen werden in der Praxis oft mit äquidistanten Zerlegungen gebildet. Als Stützpunkte werden oft die linken Intervallgrenzen oder die rechten Intervallgrenzen verwendet.

Bitte wenden!

Diese Beobachtung ist völlig zutreffend. Obwohl man bei der Bildung von Riemannschen Summen nicht gezwungen ist, das Integrationsintervall in gleich lange Teile zu zerlegen, und man die Stützpunkte in den Teilintervallen frei wählen darf, hat sich die Benutzung von *äquidistanten Linkssummen* oder *äquidistanten Rechtssummen* in vielen Fällen als einfaches und effizientes Vorgehen bewährt.
Moritz hat nun eine Idee: Wäre es nicht einfacher, wenn man äquidistante Links- oder Rechtssummen nicht nur bei der *Berechnung*, sondern von vorneherein bei der *Definition* der Integrierbarkeit und des Integrals benutzen würde? Sein konkreter Vorschlag lautet so:

> „Ich betrachte für eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ die *Rechtssumme* $R_n(f)$ von f bei äquidistanter Zerlegung von $[a,b]$ in n Teilintervalle:
>
> $$R_n(f) := \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k}) \quad \text{mit } x_{n,k} := a + k\frac{b-a}{n} \quad \text{für } k = 1, \dots, n\,.$$
>
> Eine Funktion f nenne ich *r-äqui-integrierbar*, falls der Grenzwert
>
> $$\lim_{n\to\infty} R_n(f)$$
>
> existiert. In diesem Fall definiere ich
>
> $$\mathop{\int\!\!\!\!\!\!\equiv}_a^b f := \lim_{n\to\infty} R_n(f)$$
>
> und nenne diese Zahl das *r-äqui-Integral.*“

Moritz’ Vorschlag klingt auf den ersten Blick nicht schlecht. Das r-äqui-Integral und seine Eigenschaften sollen daher im folgenden eingehender untersucht werden.

1. Zeige, dass jede Riemann-integrierbare Funktion auch r-äqui-integrierbar ist und dass die Integralwerte übereinstimmen.
2. Zeige, dass die umgekehrte Implikation *nicht* gilt.
3. Das r-äqui-Integral hat merkwürdige Eigenschaften, die es sowohl vom theoretischen Standpunkt als auch vom praktischen Standpunkt aus ungeeignet machen:
   (a) Zeige, dass die r-äqui-Integrierbarkeit und der Wert des r-äqui-Integrals nur von abzählbar vielen Funktionswerten von f abhängen.
   (b) Zeige, dass das r-äqui-Integral nicht *intervall-additiv* ist, d. h., man kann eine r-äqui-integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und ein $c \in [a,b]$ finden, so dass gilt
   $$\mathop{\int\!\!\!\!\!\!\equiv}_a^c f + \mathop{\int\!\!\!\!\!\!\equiv}_c^b f \neq \mathop{\int\!\!\!\!\!\!\equiv}_a^b f\,.$$
   (c) Aus der Riemannschen Integrationstheorie kennt man die Eigenschaft, dass für eine integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und beliebiges $c \in [a,b]$ die Integralfunktion
   $$x \mapsto \int_c^x f(t)\,dt$$
   eine stetige Funktion ist. Zeige, dass das r-äqui-Integral diese Eigenschaft *nicht* besitzt.

Tipp: Bei der Bearbeitung einzelner Aufgabenteile kann es nützlich sein, die *Dirichlet-Funktion* zu betrachten

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases} \end{aligned}$$