Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher Wintersemester 2012/2013

L

Übungen zur Analysis II

– Blatt 3 –

Abgabe: Freitag, den 09.11.2012, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

Aufgabe 3.1. (10 Punkte)

(i) Wir betrachten den metrischen Raum $(\mathbb{R}^2, d_f)$, wobei d_f die French-Railroad-Metrik aus Aufgabe 2.2. bezeichne. Bestimme die ε-Umgebungen von Punkten $p \in \mathbb{R}^2$ explizit und skizziere die verschiedenen Fälle.

(ii) Beschreibe die folgenden Teilmengen des metrischen Raums $(\mathbb{R}^2, d_d)$, wobei d_d die diskrete Metrik aus Aufgabe 2.2. bezeichne, explizit:

(a) Alle ε-Umgebungen von Punkten $p \in \mathbb{R}^2$.

(b) Alle Umgebungen von Punkten $p \in \mathbb{R}^2$.

(c) Alle offenen und abgeschlossenen Mengen.

Aufgabe 3.2. (10 Punkte)

(i) Wir betrachten den metrischen Raum $(\mathbb{R}^n, d)$, wobei d die von der euklidischen Norm induzierte Metrik sei. Zeige, dass es in jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(p)$ mit $p \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ ein Element aus $\mathbb{Q}^n$ gibt, d.h.

$$\mathbb{Q}^n \cap U_\varepsilon(p) \neq \emptyset.$$

(ii) Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass für alle $x \in M$ die Menge $\{x\} \subset M$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 3.3. (20 Punkte)
Beispiele finden – Standardbeispiele kennenlernen
Beispiele konstruieren zu können und Standardbeispiele zu kennen, sind wichtige Elemente mathematischen Wissens. Gewisse „Extrembeispiele“ können nützlich sein, um die Vorstellungen zum Gehalt mathematischer Begriffe und Sätze zu schärfen.
Finde daher Beispiele für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen bzw. für Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ auf Intervallen $I \subset \mathbb{R}$, die die im Folgenden angegebenen Eigenschaften haben.

1. **Folgen und Grenzwerte**

(a) eine monotone Folge, die nicht konvergent ist

(b) eine konvergente Folge, die nicht monoton ist

(c) eine beschränkte Folge, die nicht konvergent ist

(d) eine Folge mit zwei Häufungswerten, die nicht als Folgenglieder vorkommen

(e) eine Folge, die vorgegebene Häufungswerte $h_1, \ldots, h_r \in \mathbb{R}$ hat

(f) eine Folge, die genau einen Häufungswert hat, aber nicht konvergent ist

Bitte wenden!

2. **Differenzierbarkeit**

   (a) eine stetige Funktion, die nicht differenzierbar ist

   (b) eine differenzierbare Funktion, die nicht stetig differenzierbar ist
   Tipp: Untersuchen Sie die stetige Fortsetzung der Funktion $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

   (c) eine stetig differenzierbare Funktion, die nicht zweimal differenzierbar ist

3. **Extrema und Monotonie**

   (a) eine streng monotone Funktion f, für die nicht $f'(x) > 0$ für alle x gilt

   (b) eine Funktion f, für die $f'(a) = 0$ in einem Punkt $a \in I$ gilt, die aber in a kein Extremum hat

   (c) eine Funktion f, die in einem Punkt $a \in I$ ein Extremum hat, obwohl $f'(a) \neq 0$ ist

   (d) eine Funktion f, die in einem Punkt a (der im Inneren von I liegt) ein Minimum hat, obwohl $f''(a) = 0$ ist

4. **Integrierbarkeit**

   (a) eine Riemann-integrierbare Funktion, die nicht stetig ist

   (b) eine beschränkte Funktion, die nicht Riemann-integrierbar ist