Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher Wintersemester 2012/2013

L

Übungen zur Analysis II

– Blatt 4 –

Abgabe: Freitag, den 16.11.2012, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

Aufgabe 4.1. (10 Punkte)

(i) Es sei X eine Menge, welche nicht endlich ist und

$$\mathfrak{X} = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ ist endlich}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Zeige, dass $\mathfrak{X} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Topologie auf X ist, die *Topologie der endlichen Komplemente*.

(ii) Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein topologischer Raum. Beweise die folgenden Formeln für eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Teilmengen von X:

$$\bigcup_{i\in I} A_i^\circ \subset \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ, \qquad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^\circ \subset \bigcap_{i\in I} A_i^\circ$$

Gib Beispiele an, in denen die auftretenden Mengeninklusionen echt sind.

Aufgabe 4.2. (10 Punkte)
Es sei $\mathbb{R}^2$ mit der von der euklidischen Metrik induzierten Topologie ausgestattet und

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \,\middle|\, n, m \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Bestimme die Mengen $\overline{A}$, A° und ∂A explizit.

Aufgabe 4.3. (20 Punkte)
Lokale lineare Approximierung
Die Differenzierbarkeit einer stetigen Funktion f ist bekanntlich nicht nur über den Differenzenquotienten definierbar, sondern auch über die lokale Approximierbarkeit von f durch eine affin-lineare Abbildung (vgl. Forster I, S.159). Im Folgenden wird diese Eigenschaft, die auch auf den $\mathbb{R}^n$ verallgemeinert werden kann, exemplarisch untersucht.

Die durch $f(x) = x^3$ gegebene Funktion soll in der Umgebung des Punktes $P(2, f(2))$ durch die Tangente t_2 approximiert werden.

(a) Bestimme die Gleichung der Tangente t_2 an f im Punkt P.

(b) Als absoluten Fehler r bezeichnet man die Differenz aus exaktem und approximierendem Funtionswert. Dieser ist also eine Funktion von x. Berechne den absoluten Fehler $r(2{,}5)$.

(c) Bezieht man den absoluten Fehler $r(x)$ auf den zugehörigen Funktionswert $f(x)$ und nimmt davon den Betrag, so erhält man den relativen Fehler. Berechne die Größe des relativen Fehlers für $x = 2{,}5$ und gib diesen in Prozent an.

Bitte wenden!

(d) Bezieht man den absoluten Fehler $r(x)$ auf den absoluten Zuwachs h im Argument statt auf den Funktionswert, also $\frac{r(x)}{h}$, so erhält man einen weiteren *relativen* Fehler. (Betrachtet man die Tangente t_{x_0} im Punkt $P(x_0, f(x_0))$, so gilt also $h = x - x_0$). Bestimme die Größe dieses relativen Fehlers an der Stelle $x = 2{,}5$ und erläutere, wie dieser Fehler interpretiert werden kann.

(e) Es soll untersucht werden, wie sich absoluter und relativer Fehler in der Umgebung von $x = 2$ für $h \to 0$ entwickeln. Vervollständige dazu die Tabelle

h	$r(2+h)$	$\frac{r(2+h)}{h}$
0,5		
0,05		
0,005		
0,0005		

und nimm Stellung zu folgender Behauptung:

„Der absolute Fehler geht schneller gegen Null als der absolute Zuwachs“.

(f) Die Funktion f soll im Punkt $P(2, f(2))$ nun durch eine (beliebige) *Sekante* mit Steigung m approximiert werden. Bestimme die Gleichung der Sekante, und erstelle für diese eine entsprechende Tabelle wie für die Tangente in Aufgabenteil (e). Vergleiche die Werte mit denen der Tangente und nimm Stellung zu folgender Aussage:

„Die Tangente liefert die bestmögliche lineare Approximation an den Graphen von f“.

(g) Fertige eine Zeichnung an von f und t_2 im Intervall $I = [0, 3]$. Wähle hierfür den Maßstab 1 : 10. (Eine Längeneinheit auf der x-Achse enstpricht 10 Längeneinheiten auf der y-Achse). Der absolute Fehler $r(2{,}5)$ soll in der Zeichnung kenntlich gemacht werden.