Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher Wintersemester 2012/2013

L

Übungen zur Analysis II

– Blatt 5 –

Abgabe: Freitag, den 23.11.2012, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

Aufgabe 5.1. (10 Punkte)
Seien $(X, \mathfrak{X})$ und $(Y, \mathfrak{Y})$ topologische Räume. Wir nennen eine Abbildung $f : X \to Y$ stetig im Punkt $x \in X$, falls es für jede Umgebung $U \subset Y$ von $f(x)$ eine Umgebung $V \subset X$ von x gibt, so dass $f(V) \subset U$ gilt.

(i) Zeige, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann stetig ist, wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

(ii) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) f ist in $x \in X$ stetig.

(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so dass $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ für alle $y \in X$ mit $d_X(x, y) < \delta$ gilt.

(c) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X die gegen x konvergiert, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

Aufgabe 5.2. (10 Punkte)
Der Vektorraum $\mathbb{R}^{n\times n}$ sei mit der von der Norm $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$,

$$\|(a_{ij})_{i,j}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

induzierten Metrik ausgestattet (die Normeigenschaften müssen *nicht* nachgerechnet werden). Zeige, dass die Menge $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ der invertierbaren Matrizen offen ist.

Hinweis: Verwende die Leibniz-Darstellung der Determinantenfunktion $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ um zu zeigen, dass diese stetig ist.

Aufgabe 5.3. (20 Punkte)
Mittelwert und Integral
Es sei im Folgenden $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Unter dem *Mittelwert* von f über dem Intervall $[a, b]$ versteht man die Zahl

$$\mu_f := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

In dieser Aufgabe geht es um die Untersuchung und Interpretation dieser Größe.

1. Wir betrachten Punkte $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ und deren Funktionswerte $f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Das arithmetische Mittel der endlich vielen Zahlen $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ ist die Zahl

$$\frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}\,. \qquad (*)$$

Zeige, dass sich der oben definierte Mittelwert μ_f als Grenzwert einer Folge von arithmetischen Mitteln der Form $(*)$ auffassen lässt. *Tipp:* Betrachte Riemannsche Summen zu f.

Bitte wenden!

2. Erläutere die folgende Aussage anhand einer Skizze und begründe sie.

   Falls f keine negativen Werte annimmt, dann ist der Mittelwert μ_f gleich der Höhe desjenigen Rechtecks über $[a, b]$, das denselben Flächeninhalt hat wie das Flächenstück unter dem Graphen von f.

3. Begründe oder widerlege folgende Aussage:

$$\mu_f = 0 \;\Rightarrow\; f = 0$$

4. Sei $U := \{x \in [a, b] \mid f(x) = \mu_f\}$ das Urbild des Mittelwertes unter f. Begründe oder widerlege folgende Aussagen:

   (a) f stetig $\;\Rightarrow\; |U| > 0$

   (b) $|U| > 0 \;\Rightarrow f$ stetig

   (c) f streng monoton $\;\Rightarrow\; |U| \leqslant 1$

   (d) $|U| = 1 \;\Rightarrow\; f$ streng monoton

5. Konstruiere für das Intervall [0,1] eine Funktion f mit $|U| = 0$.

6. Seien $c \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Konstruiere eine Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $\mu_f = c$ und $|U| = n$.