Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher

Wintersemester 2012/2013

L

Übungen zur Analysis II

– Blatt 6 –

Abgabe: Freitag, den 30.11.2012, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

Aufgabe 6.1. (10 Punkte)
Sei $(X, \mathfrak{X})$ ein hausdorffscher topologischer Raum. Zeige:

(i) Ist $K \subset X$ kompakt, dann ist K auch abgeschlossen.

(ii) Sind $A_1, \ldots, A_n \subset X$ kompakte Teilmengen von X, dann sind folgende Mengen kompakt:

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j, \qquad \bigcap_{j=1}^{n} A_j$$

Aufgabe 6.2. (10 Punkte)
Es sei $(X, \mathfrak{X})$ ein kompakter hausdorffscher topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige, dass es $x, y \in X$ gibt, so dass gilt:

$$f(x) = \min f(X), \quad f(y) = \max f(X)$$

Aufgabe 6.3. (10 Punkte)
Doppelsummen
In dieser Aufgabe geht es darum, noch einmal bewusst zu machen, dass es Vorstellungen zur Summation gibt, die bei endlichen Summen zutreffen, die sich aber bei (unendlichen) Reihen als nicht mehr tragfähig erweisen.

1. Wir betrachten zunächst zwei *endliche* Summen. Zeige durch explizites Berechnen und unter Angabe aller Summanden die Gleichheit folgender Summen:

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{4} 3 \cdot i + 2 \cdot j \right) = \sum_{j=1}^{4} \left(\sum_{i=1}^{2} 3 \cdot i + 2 \cdot j \right)$$

2. Es sei nun im Folgenden für $i, j \in \mathbb{N}$

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ -1, & \text{falls } i = j+1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Kläre, ob folgende Aussage richtig ist:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}$$

(b) Im Zusammenhang mit der in Aufgabenteil (a) zu untersuchenden Fragestellung kommt es zu folgendem Dialog zwischen Student (S) und Tutor (T):

Bitte wenden!

S: Die Gleichheit muss auf jeden Fall gelten, denn es werden ja auf beiden Seiten dieselben Zahlen addiert.
T: Das kann man so nicht sagen, denn es geht hier nicht um endliche Summen, sondern um unendliche Reihen.
S: Ja, ja - ich weiß schon, dass hier keine Summen stehen, sondern Grenzwerte von Summen. Aber durch die Grenzwertbildung können ja wohl keine Summanden einfach so verschwinden.

Mache einen Vorschlag, wie der Tutor argumentieren könnte, um dem Studenten das Problem zu verdeutlichen. *Tipp:* Er könnte bei seiner Argumentation die Summanden $a_{i,j}$ als Einträge einer Matrix interpretieren.

Aufgabe 6.4. (10 Punkte)
Eigenschaften des Mittelwertes
Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, Riemann-integrierbare Funktion und μ_f der in Aufgabe 5.3 definierte Mittelwert. In dieser Aufgabe geht es darum zu untersuchen, wie sich der Mittelwert in Abhängigkeit von der oberen Integralgrenze verändert. Wir betrachten also für $x > a$ die Funktion

$$\mu_f(x) = \frac{1}{x - a} \int_a^x f(u)\, du$$

1. Zeige die Gültigkeit folgender Aussage

$$\mu'_f(x) = 0 \;\Rightarrow\; \mu_f(x) = f(x)$$

   und gib eine anschauliche Deutung dieses Resultats in Bezug auf den Graphen von μ_f.

2. Das Monotonieverhalten von f wirkt sich direkt auf das Monotonieverhalten von μ_f aus. Zeige dazu die Gültigkeit folgender Aussage:

$$f \text{ streng monoton} \;\Rightarrow\; \mu_f \text{ streng monoton}$$

   Tipp: Das Monotonieverhalten von f erlaubt eine Reihe nützlicher Abschätzungen.