



Übungen zur Analysis II

– Blatt 8 –

Abgabe: Freitag, den 14.12.2012, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

Aufgabe 8.1. (10 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } xy = 0 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass f im Punkt $(0, 0)$ partiell differenzierbar aber nicht stetig ist.

Aufgabe 8.2. (10 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (i) Zeige, dass f in allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zweimal partiell differenzierbar ist und dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$$

gilt.

- (ii) Zeige, dass f in allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar ist.
(iii) Welche Aussage über die Funktion f folgt aus dem Satz von Schwarz?

Aufgabe 8.3. (20 Punkte)

Ein Kurvenparadoxon

Wir betrachten in der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ die Strecke s von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$. Sie wird auf folgende Weise approximiert: Für jede natürliche Zahl n wird die Strecke in n gleich lange Abschnitte eingeteilt und die Randpunkte jedes Streckenabschnitts über die zwei Schenkel eines gleichseitigen Dreiecks verbunden, dessen Basis durch den Streckenabschnitt gegeben ist. Die Situation ist in Abbildung 1 für den Fall $n = 6$ dargestellt. Mit wachsendem n nähert sich die „Zackenkurve“ immer mehr der Strecke s an. Somit sollte sich auch deren Länge immer mehr der Länge der Strecke s annähern, mit $L(s) = 1$. Da aber jeder Schenkel der Zackenkurve die Länge $\frac{1}{n}$ hat, ergibt sich die Gesamtlänge dieser Kurve zu $n \cdot \frac{2}{n}$, und somit ist die Länge der Zackenkurve für alle Werte von n gleich 2. Der Wert 1 wird also auch für $n \rightarrow \infty$ nicht erreicht. Hier liegt ein offensichtlicher Widerspruch vor.

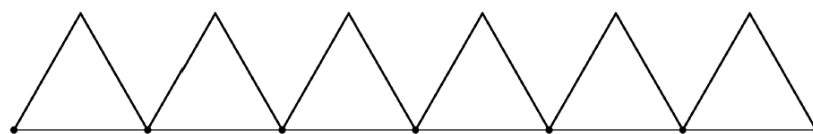


Abbildung 1

- (a) Die Zacken in dem vorgestellten Paradoxon werden nun durch aneinandergesetzte (identische) Halbkreise ersetzt. Die Situation ist in Abbildung 2 wiederum für den Fall $n = 6$ dargestellt. Wenn man die Zahl der Halbkreise gegen Unendlich gehen lässt und im Stil der Zackenkurve argumentiert, so kann man scheinbar „beweisen“, dass $\pi = 2$ ist. Führe diesen „Beweis“!

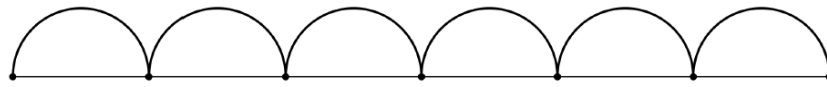


Abbildung 2

- (b) Diskutiere, an welcher Stelle in dem „Beweis“ von Teil (a) falsch argumentiert wird. Formuliere das fehlerhafte Argument in Form eines *falschen* Satzes. Verwende in diesem Satz die folgenden Begriffe: *Folge f_n von Kurven*, *Länge $L(f_n)$ der Kurven*, *gleichmäßige Konvergenz*.
- (c) Die Strecke s soll nun durch Aneinandersetzen von (identischen) *Parabelsegmenten* approximiert werden. Abbildung 3 zeigt die Situation wiederum für den Fall $n = 6$. Zur Präzisierung der Kurve: Jedes Parabelsegment ist Teil einer verschobenen und an der x -Achse gespiegelten *Normalparabel*, deren Scheitel jeweils genau über der Mitte des jeweiligen Streckenabschnitts liegt. Zeige, dass die Länge der approximierenden Kurvenfolge in diesem Fall tatsächlich gegen die Länge der Strecke s konvergiert!



Abbildung 3

Tipp: Weise nach und verwende, dass für hinreichend große Werte von n gilt:

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{1 + \left(2x - \frac{1}{n}\right)^2} dx \approx \frac{1}{n}$$

- (d) Die Zackenkurve aus Abbildung 1 ist stückweise stetig differenzierbar. Zeige, dass die Normen der Ableitungen der differenzierbaren Kurvenstücke *nicht* gegen $\|s'\|$ konvergieren, und folgere daraus erneut, dass die Länge der Zackenkurve für $n \rightarrow \infty$ *nicht* gegen $L(s) = 1$ konvergiert.
- (e) Diskutiere und erlautere *elementargeometrisch*, also ohne Bezug auf die Normen der Ableitungen, warum die Approximation der Länge der Strecke s sowohl mit den „Zacken“ des gleichseitigen Dreiecks als auch mit den Halbkreisen misslingt, wohingegen die Approximation mit den Parabelsegmenten zum richtigen Ergebnis führt.

Tipp: Betrachte, wie sich die Maxima der Kurven für $n \rightarrow \infty$ verhalten.