Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher

Wintersemester 2012/2013

L

Übungen zur Analysis II

– Blatt 9 –

Abgabe: Freitag, den 21.12.2012, 08:00 – 08:10 Uhr, HG 00/0020

Aufgabe 9.1. (10 Punkte)
Zeige, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ welche durch

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x\sin(y)\cos(z) \\ x\sin(y)\sin(z) \\ x\cos(y) \end{pmatrix}$$

gegeben ist, in allen Punkten des $\mathbb{R}^3$ total differenzierbar ist und berechne jeweils das totale Differential.

Aufgabe 9.2. (10 Punkte)
Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ sei in allen Punkten $x \in U$ total differenzierbar mit $Df(x) = 0$.

(i) Zeige, dass f lokal konstant ist, d.h. dass es für jeden Punkt $x \in U$ eine Umgebung $V \subset U$ von x gibt, so dass f auf V konstant ist.

Hinweis: Verwende den Mittelwertsatz der Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen.

(ii) Zeige, dass f sogar konstant ist, falls U wegzusammenhängend ist, d.h. falls es zu je zwei Punkten $x, y \in U$ eine stetige Kurve $\gamma : [a, b] \to U$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ gibt.

Aufgabe 9.3. (20 Punkte)
Wir betrachten hier Aufgabenstellungen von folgender Art:

„Überprüfe, ob die durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist."

Anstelle der Funktionen $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ sowie $x \mapsto x^2 + x + 1$ könnten hier andere differenzierbare Funktionen stehen, und anstelle des Nullpunkts könnte eine andere Stelle als Verbindungspunkt der beiden Teilintervalle gegeben sein.
Jemand schlägt zur Lösung zwei alternative Strategien vor:

(A) „Die Differenzierbarkeit von f auf der Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ liegt auf der Hand, da sowohl die Funktion $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ als auch $x \mapsto x^2 + x + 1$ auf den angegebenen Teilintervallen differenzierbar sind. Um die Differenzierbarkeit im Nullpunkt zu überprüfen, gehe ich aus von der Definition der Ableitung und betrachte zu beliebigem $x \neq 0$ den Differenzenquotienten:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Bitte wenden!

Je nachdem, ob dieser für $x \to 0$ konvergiert oder nicht, ist f im Nullpunkt differenzierbar oder nicht."

(B) „Die Funktion f ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sicherlich differenzierbar, ich kann dort also die Ableitungsfunktion f' bilden. Wenn ich nun zeigen kann, dass f im Nullpunkt stetig ist und der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f'(x)$$

existiert, dann ist f auch im Nullpunkt differenzierbar und $f'(0)$ stimmt mit dem gefundenen Grenzwert überein."

Arbeitsauftrag:

(a) Löse die Aufgabe mit Strategie (A).

(b) Löse die Aufgabe mit Strategie (B), unter der Annahme, dass diese Vorgehensweise korrekt ist.

(c) In Strategie (B) wird die Differenzierbarkeit von f im Nullpunkt nicht direkt bewiesen, sondern aus gewissen Grenzwertaussagen gefolgert. Formuliere einen Satz, der diese Schlussweise sichert, und beweise ihn.

Tipp: Für den Beweis des Satzes kann der Mittelwertsatz von Nutzen sein.

(d) An welcher Stelle geht bei dem Beweis aus (c) die Stetigkeit von f ein? Gib ein Beispiel an, welches zeigt, dass Strategie (B) ohne die Stetigkeitsaussage für f falsch ist.

(e) Erkläre, warum in folgendem Beispiel die Differenzierbarkeit zwar mit Strategie (A), aber nicht mit Strategie (B) gezeigt werden kann:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

(f) Die beiden konstanten Funktionen

$$\begin{aligned} f &: (-\infty, -1] \to \mathbb{R}, \qquad && x \mapsto -1 \\ g &: [1, \infty) \to \mathbb{R}, && x \mapsto 1 \end{aligned}$$

sollen durch eine Funktion $h : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ so verbunden werden, dass insgesamt eine differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entsteht. Stelle eine solche Verbindung mittels einer kubischen Polynomfunktion $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ her – und zwar so, dass F möglichst oft differenzierbar wird.