

## Aufgaben zur Vorlesung Algebra

Präsenzaufgaben für die erste Übung

### Aufgabe 1: Euklidischer Algorithmus

Bestimmen Sie jeweils den größten gemeinsamen Teiler

$$\text{ggT}(a, b)$$

und stellen Sie ihn als  $\mathbb{Z}$ -Linearkombination von  $a$  und  $b$  dar;

- (i) für  $a = 384750$  und  $b = 70794$ , sowie
- (ii) für  $a = -42$  und  $b = 38$ .

### Aufgabe 2: Teilbarkeit

Seien  $a, b \in \mathbb{Z}$  zwei teilerfremde Zahlen und  $c \in \mathbb{Z}$  mit  $a|c$  und  $b|c$ . Zeigen Sie, dass

$$ab|c$$

gilt, und zwar

- (i) ohne Verwendung der Primfaktorzerlegung in  $\mathbb{Z}$ , und
- (ii) unter Benutzung der Primfaktorzerlegung.

### Aufgabe 3: Primfaktorzerlegung

Begründen Sie, dass in  $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  jedes von 0 verschiedene Element eine Zerlegung in endlich viele unzerlegbare Elemente hat.

*Hinweis:* Betrachten Sie zu  $a \in R$  das Betragsquadrat  $N(a) := |a|^2$  (mit dem in  $\mathbb{C}$  üblichen Betrag). Überlegen Sie sich:

- (i) Für alle  $a \in R$  ist  $N(a) \in \mathbb{N}$ .
- (ii) Was können Sie über  $N(a)$  und  $N(b)$  sagen, wenn  $a|b$  gilt?
- (iii) Welche  $a \in R$  haben  $N(a) = 1$ ?

### Aufgabe 4: Algorithmus

Betrachten Sie folgenden Algorithmus:

```
INPUT  $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 
 $(x, y) := (a, b)$ 
WHILE  $x \neq y$  DO
  IF  $x > y$  DO
     $x := x - y$ 
  ELSE DO
     $y := y - x$ 
OUTPUT  $x$ 
```

Welchen Wert gibt der Algorithmus aus? Überlegen Sie sich dazu, welche Schleifeninvariante bestehen bleibt und begründen Sie, dass der Algorithmus stets terminiert.