

Aufgaben zur Vorlesung Algebra

Blatt 1

Abgabe am Freitag, den 25.10.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 5: Euklidischer Algorithmus

(4 Punkte)

Die Fibonacci-Zahlen f_0, f_1, f_2, \dots sind definiert als

$$\begin{aligned}f_0 &:= 0, & f_1 &:= 1, \\f_n &:= f_{n-1} + f_{n-2}.\end{aligned}$$

- (i) Berechnen Sie $\text{ggT}(f_6, f_5)$ mit dem Euklidischen Algorithmus.
- (ii) Was liefert der Euklidische Algorithmus für $\text{ggT}(f_n, f_{n-1})$ bei beliebigem $n \in \mathbb{N}$?
- (iii) Man kann zeigen, dass die Berechnung von $\text{ggT}(f_n, f_{n-1})$ der „worst case“ für den Euklidischen Algorithmus darstellt. Wieviele elementare Rechenschritte (hier: Divisionen) werden bei der Berechnung von $\text{ggT}(f_n, f_{n-1})$ durchgeführt?

Aufgabe 6: Primfaktorzerlegung

(4 Punkte)

Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen, so dass sowohl a und c teilerfremd sind, als auch b und c . Zeigen Sie, dass dann auch ab und c teilerfremd sind, und zwar

- (i) ohne Verwendung der Primfaktorzerlegung in \mathbb{Z} , und
- (ii) unter Benutzung der Primfaktorzerlegung.

Aufgabe 7: Größter gemeinsamer Teiler

(4 Punkte)

Wir werden später unter einem größten gemeinsamen Teiler zweier Elemente a und b eines Zahlbereichs ein Element d verstehen, welches die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

- (1) Es ist d ein gemeinsamer Teiler von a und b , d.h. es gilt sowohl $d|a$ als auch $d|b$.
- (2) Ist e ein beliebiger gemeinsamer Teiler von a und b , dann folgt $e|d$.

Zeigen Sie: In \mathbb{Z} besitzen zu je zwei Elementen a und b nur die Elemente

$$\text{ggT}(a, b) \quad \text{und} \quad -\text{ggT}(a, b)$$

obige Eigenschaften (1) und (2).

Aufgabe 8: Division mit Rest

(4 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass zu $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$ Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ existieren, so dass gilt

$$a = bq + r \quad \text{und} \quad 0 \leq r < |b|.$$

Zeigen Sie, dass q und r eindeutig bestimmt sind.

Tipp: Nehmen Sie die Existenz eines weiteren solchen Zahlenpaares (q', r') an und zeigen Sie, dass $b|(r' - r)$ gilt.