

Aufgaben zur Vorlesung Algebra

Blatt 10

Abgabe am Freitag, den 17.01.2014 vor der Vorlesung

Aufgabe 41: Ideale

(3 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring. Für Ideale I und J in R definiert man:

$$I + J := \{a + b \mid a \in I, b \in J\},$$
$$I \cdot J := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \mid a_i \in I, b_i \in J, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zeigen Sie:

- (i) Die Mengen $I+J$ und $I \cdot J$ sind Ideale in R , wohingegen die Menge $\{a \cdot b \mid a \in I, b \in J\}$ im Allgemeinen kein Ideal ist.
- (ii) Das Ideal $I + J$ ist das kleinste Ideal in R , welches I und J enthält.
- (iii) Es gilt $I \cdot J \subset I \cap J$.

Aufgabe 42: Mengenring

(5 Punkte)

Es sei M eine beliebige nichtleere Menge. Wir betrachten auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, welche durch

$$A + B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad \text{sowie} \quad A \cdot B := A \cap B$$

definiert sind.

- (i) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(M), +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist.
Hinweis: Finden Sie einen Zusammenhang zwischen $\mathcal{P}(M)$ und dem Ring der Abbildungen $\text{Abb}(M, \mathbb{Z}_2)$.
- (ii) Zeigen Sie, dass eine nichtleere Teilmenge $I \subset \mathcal{P}(M)$ genau dann ein Ideal ist, wenn $\mathcal{P}(A \cup B) \subset I$ für alle $A, B \in I$ gilt.
Hinweis: $A \cup B$ lässt sich als Ausdruck in A, B mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ schreiben.
- (iii) Für beliebiges $m \in M$ sei

$$I_m := \{A \in \mathcal{P}(M) \mid m \notin A\}.$$

Zeigen Sie, dass I_m ein maximales Ideal in $(\mathcal{P}(M), +, \cdot)$ ist, und bestimmen Sie den Faktorring $\mathcal{P}(M)/I_m$ explizit.

Bitte wenden!

Aufgabe 43: Ideale und Homomorphismen

(4 Punkte)

Seien R und S Ringe, I ein Ideal in R und $f : R \rightarrow S$ ein surjektiver Ringhomomorphismus.

- (i) Es sei $M_1 := \{\text{Ideale } J \text{ in } R \text{ mit } \ker(f) \subset J\}$ und $M_2 := \{\text{Ideale in } S\}$. Geben Sie eine bijektive Abbildung zwischen M_1 und M_2 an und folgern Sie, dass die Ideale in R/I in bijektiver Weise zu den Idealen J in R mit $I \subset J$ korrespondieren.

Hinweis: Beachten Sie, dass für beliebige Teilmengen $M \subset R$ stets die Inklusion $M \subset f^{-1}(f(M))$ gilt, die Gleichheit im Allgemeinen aber nicht.

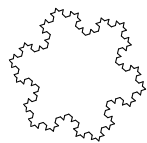
- (ii) Seien nun $P \subset R, Q \subset S$ Primideale mit $\ker(f) \subset P$ und $M \subset R, N \subset S$ maximale Ideale mit $\ker(f) \subset M$. Welche Eigenschaften (Primideal, maximales Ideal) besitzen $f(P)$ und $f(M)$ beziehungsweise $f^{-1}(Q)$ und $f^{-1}(N)$?

Aufgabe 44: Integritätsringe

(4 Punkte)

Sei R ein Integritätsring, welcher nur endlich viele Ideale besitzt. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.

Tipp: Betrachten Sie zu $x \in R \setminus \{0\}$ die Ideale Rx^j mit $j \in \mathbb{N}$ und zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl k mit $x^k \in Rx^{k+1}$ gibt. Welche Gleichung folgt hieraus?



Schöne Winterferien und ein gutes Jahr 2014!

