PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer

Wintersemester 2013/2014

Aufgaben zur Vorlesung Algebra

Blatt 12

Abgabe am Freitag, den 31.01.2014 vor der Vorlesung

Aufgabe 49: Polynomringe *(4 Punkte)*

Es sei

$$R_1 := \mathbb{R}[X]/(X^2-1), \quad R_2 := \mathbb{R}[X]/(X^2+1) \quad \text{und} \quad R_3 := \mathbb{R}[X]/(X^2).$$

(i) Zeigen Sie: $R_1 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Hinweis: Chinesischer Restsatz.

(ii) Zeigen Sie: $R_2 \cong \mathbb{C}$.

(iii) Welche der Ringe sind Integritätsringe?

(iv) Zeigen Sie, dass die Ringe paarweise nicht isomorph sind.

Hinweis zu (iv): Untersuchen Sie unter anderem, in welchen der Ringe R_1, R_2 und R_3 es *nilpotente Elemente*, d.h. Elemente $a \neq 0$ mit $a^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, gibt.

Aufgabe 50: Formale Potenzreihen *(8 Punkte)*

Der Begriff „Formale Potenzreihe" ist eine Erweiterung des Polynombegriffs, der intuitiv dadurch entsteht, dass man anstelle „endlicher Summen" $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ „unendliche Summen" $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ betrachtet.

(i) Formulieren Sie eine Definition des Rings $R[[X]]$ der formalen Potzenreihen über einem kommutativen Ring R, die dieser intuitiven Vorstellung entspricht. Die Definition soll in Analogie zur Definition von $R[X]$ gefasst sein, so dass $R[X]$ eine Teilmenge von $R[[X]]$ wird.

Hinweis: Definieren Sie die Objekte in $R[[X]]$ sowie zwei Verknüpfungen „Addition" und „Multiplikation", die dem intuitiven Addieren und Multiplizieren der formalen Summen entsprechen.

(ii) Zeigen Sie, dass die Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} X^i$ multiplikativ invers zu $1 - X$ ist.

(iii) Welche Elemente von $R[[X]]$ sind Einheiten?

Hinweis: Machen Sie zu gegebener Potenzreihe $(a_0 + a_1X + a_2X^2 \ldots)$ den Ansatz $(a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots) \cdot (b_0 + b_1X + b_2X^2 + \ldots) = 1$ und ermitteln Sie durch Ausmultiplizieren die Koeffizienten b_i.

(iv) Gibt es Nullteiler in $R[[X]]$?

(v) Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass $K[[X]]$ ein Hauptidealring ist.

Hinweis: Begründen Sie zunächst, dass sich jede von Null verschiedene Potenzreihe $f \in K[[X]]$ in der Form $f = X^n \cdot u$ schreiben lässt, wobei u eine Einheit ist und $n \geq 0$.

Bitte wenden!

Aufgabe 51: Hauptideale *(4 Punkte)*

Sei R ein Integritätsring und $a \in R$, $a \neq 0$, keine Einheit. Beweisen Sie, dass das von a und X in $R[X]$ erzeugte Ideal kein Hauptideal ist.

Information: Dies ist ein alternativer Beweis für die Aussage der Vorlesung, dass der Polynomring über R nur dann ein Hauptidealring sein kann, wenn R ein Körper ist.