PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer

Wintersemester 2013/2014

Aufgaben zur Vorlesung Algebra

Blatt 13

Abgabe am Freitag, den 07.02.2014 vor der Vorlesung

Aufgabe 52: Euklidische Ringe *(2 Punkte)*

Es sei R ein euklidischer Ring bezüglich der Abbildung $d : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass jedes Element $a \in R$ mit $d(a) = 0$ eine Einheit in R ist.

Hinweis: Was liefert die Division mit Rest von 1 durch a?

Aufgabe 53: Kleinstes gemeinsames Vielfaches *(6 Punkte)*

(i) Definieren Sie in Analogie zum ggT den Begriff *kleinstes gemeinsames Vielfaches* zweier Elemente – zunächst in $\mathbb{Z}$ und dann in beliebigen Integritätsringen.

(ii) Zeigen Sie, dass – in $\mathbb{Z}$ und in beliebigen Hauptidealringen R – je zwei Elemente a und b mit $(a, b) \neq (0, 0)$ ein kleinstes gemeinsames Vielfaches $\mathrm{kgV}(a, b)$ besitzen.

Hinweis: Der Durchschnitt $(a) \cap (b)$ ist ein Ideal in R.

(iii) In einem Hauptidealring R sei d ein $\mathrm{ggT}(a, b)$ und e ein $\mathrm{kgV}(a, b)$. Zeigen Sie:

$$de \sim ab.$$

Hinweis zu (iii): Es ist eine Herausforderung, dies in Hauptidealringen zu zeigen, ohne Primzerlegungen zu benutzen. Sie dürfen daher, wenn Sie möchten, hier bereits verwenden, dass jedes Element eine bis auf Einheiten eindeutige Zerlegung in Primelemente hat.

Aufgabe 54: Irreduzible Elemente in $\mathbb{R}[X]$ *(4 Punkte)*

(i) Sei f ein Polynom in $\mathbb{R}[X]$ und z eine komplexe Zahl mit $f(z) = 0$. Zeigen Sie, dass auch die komplex konjugierte Zahl $\overline{z}$ eine Nullstelle von f ist.

(ii) Zeigen Sie, dass jedes Polynom f mit reellen Koeffizienten in Faktoren $f_i \in \mathbb{R}[X]$ mit $\deg(f_i) \leq 2$ zerfällt: $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_l$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass in $\mathbb{C}[X]$ jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt.

(iii) Bestimmen Sie alle irreduziblen Elemente in $\mathbb{R}[X]$.

Aufgabe 55: Followup – Basiswissen Algebra *(4 Punkte)*

Diese Aufgabe greift diejenigen Themen aus dem Checkup nochmals auf, die bei der Bearbeitung auf Schwierigkeiten gestoßen sind.

Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind – geben Sie jeweils eine kurze Begründung oder widerlegen Sie die Aussage.

1. Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $\mathrm{ggT}(a + b, b) = \mathrm{ggT}(a, a - b)$.
2. Sei U eine nichtleere Teilmenge einer Gruppe G. Es ist U Untergruppe von G genau dann, wenn für alle $a, b \in U$ auch $ab \in U$ gilt.

Bitte wenden!

3. Die Abbildung $M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $A \longmapsto e^{\mathrm{Spur}(A)}$ ist ein Gruppenhomomorphismus. (Hierbei sei $M_n(\mathbb{R})$ ist die Gruppe der $n \times n$-Matrizen mit der Addition als Verknüpfung.)
4. Wenn $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ ein Gruppenhomomorphismus ist, dann gilt
$$f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}.$$
5. Die Gruppen $\mathbb{Q}^* / \{\pm 1\}$ und $\mathbb{Q}^+$ sind isomorph.
6. Es sei $G \times X \longrightarrow X$ eine Gruppenoperation, bei der alle Bahnen einelementig sind. Dann ist es die triviale Operation.
7. Unter der Operation von S_3 auf $\mathbb{R}[X, Y, Z]$ hat die Bahn des Polynoms $f = X+Y+Z$ die Länge 1.
8. Sei R ein Ring. Dann gilt für alle $x, y \in R$:
$$xy = x \implies y = 1.$$