PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer

Wintersemester 2013/2014

Aufgaben zur Vorlesung Algebra

Blatt 2

Abgabe am Freitag, den 01.11.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 9: Kongruenz modulo p *(4 Punkte)*

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

Aufgabe 10: Chinesischer Restsatz *(4 Punkte)*

(i) Bestimmen Sie eine Lösung $k \in \mathbb{Z}$ des Kongruenzensystems

$$\begin{aligned} k &\equiv 14 \pmod{2} \\ k &\equiv 26 \pmod{5} \\ k &\equiv 35 \pmod{7}. \end{aligned}$$

(ii) Bestimmen Sie die Menge $L \subset \mathbb{Z}$ aller Lösungen dieses Kongruenzensystems.

Aufgabe 11: Neutrale und inverse Elemente *(4 Punkte)*

Auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sei folgende Verknüpfung erklärt:

$$\circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \circ y := x + y + x^2 y.$$

(i) Zeigen Sie, dass es genau ein Element $e \in \mathbb{R}$ mit $x \circ e = e \circ x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt.

(ii) Zeigen Sie, dass es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $x \circ y = e$ gibt.

(iii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, zu denen es jeweils ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y \circ x = e$ gibt.

(iv) Geben Sie konkrete $x, y, z \in \mathbb{R}$ an, mit $x \circ y = e$, $z \circ x = e$ sowie $y \neq z$. Ist dies ein Widerspruch zu Ergebnissen aus der Vorlesung?

Aufgabe 12: Verknüpfungstafeln *(4 Punkte)*

(i) Sei $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ zusammen mit der Verknüpfung $\circ$ eine endliche Gruppe. Die Matrix

$$M_G := \begin{pmatrix} g_1 \circ g_1 & g_1 \circ g_2 & \cdots & g_1 \circ g_n \\ g_2 \circ g_1 & g_2 \circ g_2 & \cdots & g_2 \circ g_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n \circ g_1 & g_n \circ g_2 & \cdots & g_n \circ g_n \end{pmatrix}$$

heißt *Verknüpfungstafel* von $(G, \circ)$. Beweisen Sie, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte von M_G jedes Element von G genau einmal vorkommt. Geben Sie mittels M_G ein Kriterium für die Kommutativität von G an.

(ii) Beweisen Sie, dass es bis auf die Benennung der Elemente genau zwei verschiedene Gruppen mit vier Elementen gibt. Sind diese Gruppen kommutativ?

Hinweis: Betrachten Sie die möglichen Verknüpfungstafeln.