PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer

Wintersemester 2013/2014

Aufgaben zur Vorlesung Algebra

Blatt 3

Abgabe am Freitag, den 08.11.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 13: Halbgruppen und Gruppen *(4 Punkte)*

Sei M eine nichtleere Menge und $\mathrm{Abb}(M, M)$ zusammen mit der Komposition die Halbgruppe der Abbildungen von M nach M.

(i) Zeigen Sie: $f \in \mathrm{Abb}(M, M)$ ist genau dann linksinvertierbar, wenn f injektiv ist.

(ii) Zeigen Sie: $f \in \mathrm{Abb}(M, M)$ ist genau dann rechtsinvertierbar, wenn f surjektiv ist.

(iii) Bestimmen Sie die größtmögliche Teilmenge $H \subset \mathrm{Abb}(M, M)$, so dass H zusammen mit der Komposition eine Gruppe bildet.

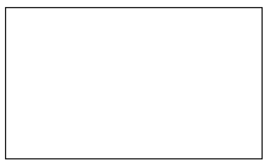
Aufgabe 14: Gruppen der Ordnung 4 *(4 Punkte)*

(i) Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$C_n := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n - 1 = 0\} \subset \mathbb{C}$$

der Nullstellen des Polynoms $X^n - 1$ mit der Multiplikation komplexer Zahlen eine endliche Gruppe bildet und bestimmen Sie die Verknüpfungstafel im Fall $n = 4$.

(ii) Bestimmen Sie die Verknüpfungstafel der Symmetriegruppe des Rechtecks



in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 15: Abelsche Gruppen und Potenzen *(4 Punkte)*

Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Für jede ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$\varphi_k : G \longrightarrow G, \qquad g \longmapsto g^k$$

die zugehörige Potenzfunktion. Zeigen Sie:

(i) $(G, \cdot)$ ist genau dann abelsch, wenn φ_{-1} ein Homomorphismus ist und dies ist genau dann der Fall, wenn φ_{-1} ein Automorphismus ist.

(ii) $(G, \cdot)$ ist genau dann abelsch, wenn φ_2 ein Homomorphismus ist.

(iii) Ist φ_3 ein Epimorphismus, so ist $(G, \cdot)$ abelsch. Gilt auch die umgekehrte Aussage?

Bitte wenden!

Aufgabe 16: Homomorphismen von Zahlbereichen *(4 Punkte)*

(i) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die reelle Exponentialfunktion einen Isomorphismus der Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ induziert. Beweisen Sie, dass es hingegen keinen Isomorphismus der Gruppen $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ gibt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für jeden Homomorphismus $f : (\mathbb{Q}, +) \longrightarrow (\mathbb{Q}^+, \cdot)$ stets $f(\frac{1}{n}x) = f(x)^{\frac{1}{n}}$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) Sei f ein Homomorphismus der additiven Gruppe der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +)$ in die additive Gruppe der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +)$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für jeden Homomorphismus $f : (\mathbb{Q}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ stets $f(\frac{1}{n}x) = \frac{1}{n}f(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.