

Aufgaben zur Vorlesung Algebra

Blatt 4

Abgabe am Freitag, den 15.11.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 17: Erzeugende Mengen

(4 Punkte)

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und M eine nichtleere Teilmenge von G . Die Menge

$$\langle M \rangle := \bigcap \{U \mid U \subset G \text{ Untergruppe mit } M \subset U\}$$

heißt das *Erzeugnis* von M . Zeigen Sie:

(i) Es ist $\langle M \rangle$ die kleinste Untergruppe von G , welche M enthält.

(ii) Es gilt:

$$\langle M \rangle = \{a_1 \cdot \dots \cdot a_r \mid a_i \in M \text{ oder } a_i^{-1} \in M, r \in \mathbb{N}_0\}.$$

(iii) Für $n > 1$ wird die symmetrische Gruppe $(S_n, \circ)$ von der Menge T aller Transpositionen

$$(j \ k) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & j-1 & k & j+1 & \cdots & k-1 & j & k+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

mit $1 \leq j < k \leq n$ erzeugt, d.h. es gilt $\langle T \rangle = S_n$.

Aufgabe 18: Untergruppen

(4 Punkte)

Es seien $E, I, J, K \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ gegeben durch

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie die Menge $Q := \langle \{E, I, J, K\} \rangle \subset \text{GL}_2(\mathbb{C})$ und geben Sie die Verknüpfungstafel von $(Q, \cdot)$ an.

(ii) Bestimmen Sie sämtliche Untergruppen von Q sowie jeweils deren Links- und Rechtsnebenklassen. Welche Untergruppen sind Normalteiler?

Aufgabe 19: Normalteiler

(4 Punkte)

Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeigen Sie:

(i) Ist $U \subset G$ eine Untergruppe mit $[G : U] = 2$, so ist U ein Normalteiler in G .

(ii) Ist G endlich und gibt es zu $k \in \mathbb{N}$ genau eine Untergruppe $U \subset G$ mit $[G : U] = k$, so ist diese Untergruppe U ein Normalteiler in G .

Bitte wenden!

Aufgabe 20: Linksnebenklassen*(4 Punkte)*

Es sei $(G, \cdot)$ eine endliche, abelsche Gruppe mit neutralem Element e und

$$p := \prod_{g \in G} g.$$

Zeigen Sie, dass $p = a$ gilt, falls G genau ein Element $a \neq e$ mit $a^2 = e$ enthält, und andernfalls stets $p = e$ ist.

Anleitung: Eine Möglichkeit, diese Aussage herzuleiten, ist:

- (1) Setzen Sie $U := \{g \in G \mid g^2 = e\}$ und zeigen Sie zunächst:

$$p = \prod_{g \in U} g.$$

- (2) Zeigen Sie, dass $U \subset G$ eine Untergruppe ist.
- (3) Führen Sie nun eine Fallunterscheidung durch und behandeln Sie zunächst die Fälle $|U| = 1$ sowie $|U| = 2$.
- (4) Betrachten Sie für den verbleibenden Fall $|U| \geq 3$ zu zwei von e verschiedenen Elementen a und b aus U die Zerlegung von U in Linksnebenklassen zu $\langle \{a, b\} \rangle$.