

Aufgaben zur Vorlesung Algebra

Blatt 5

Abgabe am Freitag, den 22.11.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 21: Äquivalenzrelationen

(4 Punkte)

Wir betrachten folgende Relation auf der Menge $\mathbb{R}^2$:

$$(a, b) \sim (x, y) \quad :\Longleftrightarrow \quad b(1 + x^2) = y(1 + a^2).$$

- (i) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{R}^2$ ist.
- (ii) Beschreiben Sie die Äquivalenzklassen $[(x_0, y_0)]$ als Teilmengen der Ebene jeweils geometrisch.
- (iii) Zeigen Sie, dass $N := [(0, 0)]$ ein Normalteiler in der Gruppe $(\mathbb{R}^2, +)$ ist.
- (iv) Erläutern Sie, ob $\mathbb{R}^2/N = \mathbb{R}^2/\sim$ gilt, oder ob nicht.

Aufgabe 22: Kongruenzrelationen

(6 Punkte)

Im Folgenden ist jeweils eine Gruppe G und eine Relation $\sim$ auf G gegeben. Prüfen Sie, ob $\sim$ eine Kongruenzrelation auf G ist und geben Sie gegebenenfalls den zugehörigen Normalteiler $N \subset G$ an.

- (1) $G = \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $A \sim B :\Leftrightarrow \text{Spur}(A) = \text{Spur}(B)$.
- (2) $G = \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $A \sim B :\Leftrightarrow A = \lambda \cdot B$ für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (3) $G = \{\text{Cauchyfolgen in } \mathbb{Q}\}$ mit komponentenweiser Addition,
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}} :\Leftrightarrow (a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Nullfolge.
- (4) $G = M_n(\mathbb{R})$ mit Addition, $A \sim B :\Leftrightarrow A - B$ hat keine negativen Eigenwerte.
- (5) $G = S_n$, $\sigma \sim \tau :\Leftrightarrow \sigma(1) = \tau(1)$.
- (6) $G = \mathbb{R}^n$ mit Addition, $(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n) :\Leftrightarrow x_n = y_n$.

Aufgabe 23: Faktorgruppen

(4 Punkte)

Für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ sei $t_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $t_{a,b}(x) = ax + b$. Es sei $G := \{t_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$. Zeigen Sie:

- (i) Die Menge G bildet mit der Komposition von Abbildungen eine Gruppe.
- (ii) Es ist $N := \{t_{1,b} \mid b \in \mathbb{R}\}$ ein Normalteiler in G .
- (iii) Es ist G/N isomorph zu $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Hinweis: Können Sie einen Homomorphismus angeben, dessen Kern N ist?

Bitte wenden!

Aufgabe 24: Universelle Eigenschaft der Faktorgruppe*(2 Punkte)*

Faktoriert die kanonische Restklassenabbildung $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$, welche durch $g(k) = [k]$ definiert ist, durch $\mathbb{Z}_{10}$, d.h. gibt es einen Gruppenhomomorphismus $f : \mathbb{Z}_{10} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{g} & \mathbb{Z}_5 \\ & \searrow \pi & \nearrow f \\ & \mathbb{Z}_{10} & \end{array}$$

kommutiert?