PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer

Wintersemester 2013/2014

Aufgaben zur Vorlesung Algebra

Blatt 6

Abgabe am Freitag, den 29.11.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 25: Isomorphiesätze *(4 Punkte)*

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $X \neq \emptyset$ eine Menge und Y eine Teilmenge von X.

(i) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Abb}(X, G)$ aller Abbildungen von X nach G zusammen mit der punktweisen Verknüpfung $f \cdot g := (x \longmapsto f(x) \cdot g(x))$ eine Gruppe ist.

(ii) Wir setzen

$$I_{Y|X} := \{f \in \mathrm{Abb}(X, G) \,|\, f(y) = 1_G \text{ für alle } y \in Y\}.$$

Zeigen Sie, dass $I_{Y|X}$ ein Normalteiler in $\mathrm{Abb}(X, G)$ ist und dass $\mathrm{Abb}(X, G)/I_{Y|X}$ isomorph zu $\mathrm{Abb}(Y, G)$ ist.

(iii) Sei Z eine Teilmenge von Y. Zeigen Sie, dass gilt

$$\big(\mathrm{Abb}(X, G)/I_{Y|X}\big)\Big/\big(I_{Z|X}/I_{Y|X}\big) \simeq \mathrm{Abb}(Z, G).$$

Aufgabe 26: Untergruppen und Normalteiler *(4 Punkte)*

Sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe, $V \subset G$ ein Normalteiler und $U \subset G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie mit Hilfe des ersten Isomorphiesatzes sowie des Satzes von Lagrange:

(i) Es ist $[U \cdot V : V]$ ein Teiler von $|U|$.

(ii) Es ist $[U \cdot V : V]$ ein Teiler von $[G : V]$.

(iii) Aus $\mathrm{ggT}(|U|, [G : V]) = 1$ folgt stets $U \subset V$.

Aufgabe 27: Zyklische Gruppen *(4 Punkte)*

Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit $|G| \geq 2$, welche nur die trivialen Untergruppen G und $\{e\}$ besitzt. Zeigen Sie, dass es eine Primzahl p gibt, so dass G zur zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_p$ isomorph ist.

Hinweis: Betrachten Sie die von einem Element $a \neq e$ aus G erzeugte Untergruppe $\langle a \rangle$.

Aufgabe 28: Eulersche φ-Funktion *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{\substack{d \geq 1 \\ d|n}} \varphi(d) = n.$$

Hinweis: Untersuchen Sie in der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_n$ für $1 \leq d \leq n$ die Teilmengen $M_d := \{a \in \mathbb{Z}_n \,|\, \mathrm{ord}(a) = d\}$ der Elemente der Ordnung d.