

## Aufgaben zur Vorlesung Algebra

Blatt 7

Abgabe am Freitag, den 06.12.2013 vor der Vorlesung

### Aufgabe 29: Endlich erzeugte abelsche Gruppen

(4 Punkte)

- (i) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 100. (M. a. W.: Bestimmen Sie alle Isomorphieklassen von abelschen Gruppen der Ordnung 100.) Zeigen Sie, dass jede dieser Gruppen ein Element der Ordnung 10 enthält.
- (ii) Zeigen Sie, dass jede dieser Gruppen für jeden Teiler  $d$  von 100 eine Untergruppe der Ordnung  $d$  enthält.

### Aufgabe 30: Exponent einer endlichen Gruppe

(4 Punkte)

Es sei  $G$  eine endliche Gruppe. Der *Exponent*  $e(G)$  von  $G$  ist die kleinste natürliche Zahl  $n$  mit der Eigenschaft, dass  $a^n = 1$  für alle  $a \in G$  gilt. (Es gilt also  $e(G) \leq |G|$ .)

- (i) Geben Sie die Exponenten der folgenden Gruppen an:  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ,  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ .
- (ii) Nun sei  $G$  eine beliebige endliche Gruppe. Zeigen Sie: Ist  $n$  eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass  $a^n = 1$  für alle  $a \in G$  gilt, so ist  $e(G)$  ein Teiler von  $n$ .

*Hinweis:* Division mit Rest

- (iii) Zeigen Sie: Der Exponent einer endlichen Gruppe  $G$  ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen aller Gruppenelemente.

### Aufgabe 31: Gruppenoperationen

(4 Punkte)

Wir betrachten für  $t \in \mathbb{C}$  die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi_t : \mathbb{R} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, z) &\longmapsto e^{tx}z.\end{aligned}$$

- (i) Zeigen Sie, dass durch  $\varphi_t$  eine Operation der Gruppe  $(\mathbb{R}, +)$  auf  $\mathbb{C}$  definiert wird.
- (ii) Bestimmen und skizzieren Sie die Bahnen dieser Operation in Abhängigkeit von  $t$ .

*Hinweis:* Betrachten Sie zunächst  $t \in \mathbb{R}$  und  $t \in i\mathbb{R}$ .

- (iii) Für welche  $t \in \mathbb{C}$  gibt es von null verschiedene Elemente  $c \in \mathbb{C}$ , die nicht-triviale Stabilisatoren haben? Geben Sie diese Stabilisatoren an.

### Aufgabe 32: Fixpunkte

(4 Punkte)

Eine Gruppe  $G$  operiere auf der Menge  $X$ . Ein Element  $a \in X$  heißt *Fixpunkt* der Operation von  $G$  auf  $X$ , falls  $g * a = a$  für alle  $g \in G$  gilt. Beweisen Sie, dass im Fall  $|G| = 35$  und  $|X| = 13$  immer ein solcher Fixpunkt existiert.