PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer

Wintersemester 2013/2014

Aufgaben zur Vorlesung Algebra

Blatt 8

Abgabe am Freitag, den 13.12.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 33: Zentrum *(4 Punkte)*

Es sei G eine Gruppe und $Z(G)$ das Zentrum von G. Zeigen Sie:

(i) Es gilt stets

$$G/Z(G) \simeq \mathrm{Inn}(G),$$

wobei $\mathrm{Inn}(G) \subset \mathrm{Aut}(G)$ die Untergruppe der inneren Automorphismen von G bezeichne, d.h. der Automorphismen $\varphi_a : G \longrightarrow G$ der Form $x \longmapsto axa^{-1}$ für ein $a \in G$.

Hinweis: Verwenden Sie den Homomorphiesatz.

(ii) Ist $G/Z(G)$ eine zyklische Gruppe, so ist G abelsch.

Aufgabe 34: Gruppenoperation der symmetrischen Gruppe *(4 Punkte)*

Wir betrachten die Operation der symmetrischen Gruppe S_4 auf der Menge $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3, X_4]$ durch Permutation der Unbestimmten.

(i) Wie lang ist die Bahn des Polynoms $X_1^2 + X_2^2 + X_3 + X_4$? Wie viele Permutationen gibt es in S_4, die dieses Polynom unverändert lassen?

(ii) Gibt es bei dieser Operation eine Bahn der Länge 5?

(iii) Geben Sie Polynome an, deren Bahnen die Längen 12 beziehungsweise 4 haben.

Aufgabe 35: Lemma von Burnside *(4 Punkte)*

Angenommen es werde ein Kartenstapel aus drei identischen Kartenspielen mit je 52 verschiedenen Karten zusammengemischt.

(i) Wieviele verschiedene Kombinationen von drei Karten können daraus gebildet werden?

Hinweis: Betrachten Sie die Operation der symmetrischen Gruppe S_3 auf der Menge der geordneten Tupel von Karten.

(ii) Wieviele Möglichkeiten für Kombinationen von drei Karten gibt es, wenn nur zwei Kartenspiele mit je 52 Karten verwendet werden?

Aufgabe 36: Sylowsätze *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 56 einen nichttrivialen Normalteiler besitzt.