PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer

Wintersemester 2013/2014

Aufgaben zur Vorlesung Algebra

Blatt 9

Abgabe am Freitag, den 20.12.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 37: Lineare Endomorphismen *(4 Punkte)*

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\dim_K V \geq 1$ (möglicherweise gilt $\dim_K V = \infty$) und $\mathrm{End}_K(V)$ die Menge der K-linearen Abbildungen von V nach V.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathrm{End}_K(V)$ mit der komponentenweisen Addition $+$ und der Komposition $\circ$ als Multiplikation ein Ring ist. Es ist also $f+g$ durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

für alle $x \in V$ definiert.

(ii) Bestimmen Sie im Fall $\dim_K V < \infty$ die Nullteiler in $\mathrm{End}_K(V)$.

(iii) Finden Sie einen zu K isomorphen Unterring von $\mathrm{End}_K(V)$.

Hinweis: Denken Sie an die Rolle der Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathrm{M}_2(K)$.

Aufgabe 38: Einheiten und Nullteiler *(8 Punkte)*

(i) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z}[i] := \{a + ib \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ ein Unterring von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist. Der Ring $\mathbb{Z}[i]$ heißt *Ring der Gaußschen Zahlen.*

(ii) Bestimmen Sie die Einheitengruppen der folgenden Ringe:

(a) $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$,

(b) $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ für eine abelsche Gruppe $(G, +)$,

(c) $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$, wobei

$$\mathcal{C}(I, \mathbb{R}) := \{\text{stetige Abbildungen von } I \text{ nach } \mathbb{R}\}$$

für ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist,

(d) $R_1 \times R_2$ für zwei Ringe R_1 und R_2,

(e) $\mathbb{Z}_7$ und $\mathbb{Z}_8$.

(iii) Bestimmen Sie die Nullteiler in obigen Ringen außer demjenigen aus Teil (b).

Aufgabe 39: Integritätsringe *(4 Punkte)*

Es sei R ein Integritätsring, der einen Körper K als Unterring enthält.

(i) Zeigen Sie, dass R auf natürliche Weise ein K-Vektorraum ist.

(ii) Zeigen Sie: Ist $\dim_K R < \infty$, so ist R ein Körper.

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass die Linkstranslation l_a für $a \in R$ eine injektive lineare Abbildung ist.

(iii) Bestimmen Sie den kleinsten Unterring von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, der $\mathbb{Q}$ und $\sqrt{2}$ enthält. Zeigen Sie, dass dieser bereits ein Körper ist.