PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG Wintersemester 2013/2014
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Th. Bauer

Aufgaben zur Vorlesung Algebra

Checkup: Basiswissen Algebra
Abgabe am Freitag, den 17.01.2014 vor der Vorlesung

Aufgabe 40: Checkup – Basiswissen Algebra *(16 Bonuspunkte)*
Diese Aufgabe soll Ihnen dazu dienen, Ihr Basiswissen zu den bislang behandelten Themen der Algebra zu kontrollieren und eventuelle Wissens- und Verständnislücken ausfindig zu machen. Wir empfehlen Ihnen: Bearbeiten Sie die Aufgabenteile zuerst ohne Blick in Ihr Vorlesungsmanuskript. Greifen Sie erst anschließend gezielt auf die betreffenden Vorlesungsteile zu, um eventuelle Lücken zu schließen.

Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind – geben Sie jeweils eine kurze Begründung oder widerlegen Sie die Aussage.

1. 0 ist die einzige ganze Zahl, die unendlich viele Teiler hat.
2. Für beliebige $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a, a - b)$.
3. Für beliebige $a, b, k \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt: Aus $a \equiv_m b$ folgt $ka \equiv_m kb$.
4. Für beliebige $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ gilt: Sind a und b teilerfremd und sind a' und b' teilerfremd, dann sind auch aa' und bb' teilerfremd.
5. Eine nichtleere Teilmenge U einer Gruppe G ist genau dann eine Untergruppe, falls für alle $a, b \in U$ stets auch $ab^{-1} \in U$ gilt.
6. Falls a und b im Zentrum einer Gruppe G liegen, dann gilt $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.
7. Die Abbildung $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \longmapsto \log(|\det A|)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
8. Ist $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ein Gruppenhomomorphismus, dann gilt $f(ka) = kf(a)$ für alle $k, a \in \mathbb{Z}$.
9. In der Gruppe $\mathbb{Z}$ hat die Untergruppe $5\mathbb{Z}$ genau 5 Nebenklassen.
10. In einer Gruppe der Ordnung 22 gibt es keinen Normalteiler der Ordnung 7.
11. In einer abelschen Gruppe ist jede Untergruppe ein Normalteiler.
12. Ist N ein Normalteiler in einer Gruppe G, dann gilt für alle $a \in G$ die Gleichung $aNa^{-1} = N$.
13. Die Gruppen $\mathbb{R}^*/\{\pm 1\}$ und $\mathbb{R}^+$ sind isomorph.
14. In der Gruppe $\mathbb{Z}$ ist die von der Menge $\{3, 5\}$ erzeugte Untergruppe gleich $\mathbb{Z}$.
15. Jede zyklische Gruppe ist abelsch.
16. Ist G eine abelsche Gruppe mit 9 Elementen, dann ist G isomorph zu $\mathbb{Z}_9$ oder zu $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Bitte wenden!

17. Ist G eine Gruppe und sind U und V Untergruppen von G mit $U \subset V$, dann gilt: Falls U Normalteiler in G ist, dann ist U auch Normalteiler in V.
18. Für jede Gruppe G wird durch $G \times G \longrightarrow G$, $(a, b) \longmapsto a^{-1}b$ eine Gruppenoperation gegeben.
19. Alle Bahnen der trivialen Gruppenoperation $G \times X \longrightarrow X$ sind einelementig (G beliebige Gruppe, X beliebige Menge).
20. Unter der Operation der symmetrischen Gruppe S_3 ist die Länge der Bahn des Polynoms $X_1 + X_2^2 + X_3^3$ gleich 6.
21. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ ist ein Ring (mit komponentenweisen Verknüpfungen) und $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist ein Unterring davon.
22. Der Ring $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist kommutativ.
23. Die Abbildung $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \longmapsto \mathrm{Spur}(A)$ ist ein Ringhomomorphismus.
24. Ist R ein Ring und sind $x, y, z \in R$ mit $xy = xz$ gegeben, dann ist $y = z$.
25. Im Ring $\mathbb{Z}_4$ gibt es keine Nullteiler.
26. Die Einheitengruppe des Rings $\mathbb{Z}_4$ ist $\mathbb{Z}_4 \setminus \{ 0 \}$.
27. Ist R ein Ring und $x \in R$ eine Einheit, so ist x kein Nullteiler.
28. Der Quotientenkörper des Rings $\mathbb{Z}$ ist $\mathbb{R}$.
29. $5\mathbb{Z}$ ist ein Ideal im Ring $\mathbb{Z}$.
30. $\mathbb{Z}$ ist ein Ideal im Ring $\mathbb{Q}$.
31. Ist I ein Ideal in einem Ring R, welches eine Einheit von R enthält, dann ist $I = R$.
32. Ist $f : R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus und R ein Körper, so ist f injektiv oder die Nullabbildung.