

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik  
der Philipps-Universität Marburg  
als Dissertation am 26. Mai 2000 angenommen.

Erstgutachter: Prof. Dr. W. Gromes  
Zweitgutachter: Prof. Dr. M. Sommer  
Tag der mündlichen Prüfung am 8. Juni 2000



# INHALT

---

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
Problemstellung . . . . .	2
Literaturübersicht . . . . .	4
Aufbau der Arbeit . . . . .	5
<b>1 Präliminarien</b>	<b>7</b>
1.1 Bezeichnungen . . . . .	7
1.2 Distributionen . . . . .	11
1.2.1 Testfunktionen . . . . .	12
1.2.2 Definition . . . . .	13
1.2.3 Distributionen mit kompaktem Träger . . . . .	15
1.2.4 Operationen auf Distributionen . . . . .	16
1.2.5 Temperierte Distributionen . . . . .	19
1.2.6 Periodische Distributionen . . . . .	21
1.2.7 Übersicht . . . . .	23
1.3 Fourier-Transformation auf $\mathbb{R}^n$ . . . . .	23
1.3.1 Bemerkungen zur Notation . . . . .	24
1.3.2 Fourier-Transformation in $L^1$ , $\mathcal{S}$ und $\mathcal{D}$ . . . . .	25
1.3.3 Fourier-Transformation in $L^2$ , $\mathcal{S}'$ und $\mathcal{E}'$ . . . . .	28
1.4 Fourier-Transformation auf $\mathbb{T}^n$ und $\mathbb{Z}^n$ . . . . .	31
1.4.1 Fourier-Lebesgue-Reihen . . . . .	31
1.4.2 Fourier-Schwartz-Reihen . . . . .	35
1.4.3 Poisson-Formel . . . . .	36
1.4.4 Übersicht . . . . .	38
1.5 Fourier-Transformation auf LCA-Gruppe . . . . .	38
<b>2 Sampling-Theorie</b>	<b>43</b>
2.1 Eindimensionale Sampling-Theorie . . . . .	45
2.1.1 Das WSK Sampling-Theorem für bandbeschränkte Funktionen . . . . .	45

2.1.2	Verallgemeinerte Sampling-Theoreme für bandbeschränkte Funktionen . . . . .	53
2.1.3	Allgemeine Sampling-Theorie . . . . .	61
2.1.4	Fehler-Analyse . . . . .	68
2.2	Mehrdimensionale Samplingtheorie . . . . .	70
2.2.1	Bandbeschränktheit in höheren Dimensionen . . . . .	71
2.2.2	Reguläres Sampling . . . . .	72
2.2.3	Irreguläres Sampling . . . . .	74
2.A	Der Sinus Cardinalis . . . . .	78
2.B	Grundbegriffe aus der Gittertheorie . . . . .	81
2.C	Selbstaffine Mengen . . . . .	88
<b>3</b>	<b>Interpolierende Skalierungsfunktionen</b>	<b>93</b>
3.1	Translationsinvarianz . . . . .	95
3.1.1	Lineare Unabhängigkeit . . . . .	96
3.1.2	Stabilität . . . . .	97
3.1.3	Orthonormalität . . . . .	102
3.2	Skalierbarkeit . . . . .	109
3.2.1	Existenz und Eindeutigkeit von Skalierungsfunktionen .	109
3.2.2	Interpolierende Skalierungsfunktionen . . . . .	115
3.2.3	Übersicht . . . . .	124
3.3	Mehrfachauflösungen . . . . .	125
3.3.1	Mehrfachauflösungen und Wavelet-Basen . . . . .	126
3.3.2	Der eindimensionale orthogonale Fall . . . . .	130
3.3.3	Der biorthogonale Fall . . . . .	132
3.4	Verbindungen zur Sampling-Theorie . . . . .	145
3.4.1	Die Shannon-Mehrfachauflösung . . . . .	145
3.4.2	Sampling-Theoreme für Mehrfachauflösungen . . . . .	150
3.5	Regularität . . . . .	153
3.5.1	Hölder- und Sobolev-Räume . . . . .	154
3.5.2	Methoden zur Regularitätsabschätzung . . . . .	156
3.5.3	Der Übergangoperator . . . . .	160
3.5.4	Strang-Fix und Moment-Bedingungen . . . . .	169
3.6	Spezielle Konstruktionsverfahren . . . . .	177
3.6.1	Iterative Interpolation . . . . .	178
3.6.2	Verallgemeinerte Haar-Basen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	183
3.6.3	Autokorrelationsfunktionen . . . . .	189
3.6.4	Iteration von Symbolen . . . . .	191
3.A	Der Spektralradius . . . . .	194

---

<b>4 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>197</b>
4.1 Zusammenfassung . . . . .	197
4.2 Ausblick . . . . .	198
<b>Symbole</b>	<b>201</b>
<b>Abkürzungen</b>	<b>205</b>
<b>Abbildungen</b>	<b>207</b>
<b>Literatur</b>	<b>209</b>
<b>Danksagung</b>	<b>219</b>
<b>Lebenslauf</b>	<b>221</b>



# EINLEITUNG

---

Skalierbarkeit ist eine Eigenschaft, die in vielen Bereichen an Bedeutung gewinnt. Man spricht z.B. von skalierbaren Computersystemen, -netzwerken und Produktionsanlagen. Gemeint ist damit die Fähigkeit eines Systems, sich auf quantitative Veränderungen der Anforderungen einstellen zu können ohne dabei das gesamte System verändern oder gar ersetzen zu müssen. In manchen Fällen geht damit auch eine qualitative Skalierung einher; werden z.B. Audio- oder Videodaten zur Übertragung über Netzwerke mit heterogener Bandbreite quantitativ skaliert, so geschieht dies natürlich nicht durch Auslassung von Teilen der Übertragung, sondern in einer Weise, die sich für den Endnutzer in unterschiedlicher Bild- und Tonqualität äußert. Für die in der vorliegenden Arbeit untersuchten Skalierungsfunktionen ist die Skalierbarkeit – wie der Name bereits vermuten läßt – *die* zentrale Eigenschaft.

Die wichtigsten Anwendungsfelder für Skalierungsfunktionen sind die Konstruktion von *Wavelet-Basen* sowie graphische Verfeinerungsalgorithmen, sog. *stationary subdivision schemes*. Es handelt sich um Funktionen, die einer *Zwei-Skalen-Relation* der Form

$$\phi = a \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k \phi(A \cdot -k) \quad (1)$$

mit einer *Dilatationsmatrix*  $A$  und  $|\det A| = a$  sowie einer *Skalierungsmaske*  $(h_k)$  genügen. Zwei wichtige Konzepte lassen sich an der Zwei-Skalen-Relation (1) bereits erkennen: Zum einen sind es die *Translatierten* der Funktion  $\phi(A \cdot)$ , über die sich eine neue Funktion definiert. Die Gesamtheit der auf diese Weise – z.B. mit endlichen Folgen  $(h_k)$  – darstellbaren Funktionen bildet einen *translationsinvarianten Raum*, d.h. mit einer Funktion  $f$  ist auch jede ihrer Translatierten  $f(\cdot - k)$  Element dieses Raumes. Zum anderen ist es wiederum die Funktion  $\phi$ , die sich als gewichtete Summe der Translatierten einer durch die Matrix  $A$  dilatierten Kopie ihrer selbst schreiben läßt. Bilden die Translatierten von  $\phi$  eine Basis des von ihnen aufgespannten Raumes  $\mathcal{S}$  und ist  $\phi$  zudem skalierbar im Sinne von (1), so erhält man durch Skalierung

der Translatierten von  $\phi$  Basen für skalierte Versionen des Grundraumes  $\mathcal{S}$ . Dies ist die wesentliche Idee der in den Achtziger Jahren entwickelten Theorie der *Mehrfachauflösungen*.

Ist z.B.  $\phi(x) = \text{sinc}(x) := \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ , so zeigt das in Abschnitt 2.1 diskutierte *WSK-Theorem*, daß sich alle Funktionen  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , deren Fourier-Transformierte Träger im Intervall  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  haben, in der Form

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(\cdot - k) \quad (2)$$

darstellen lassen, d.h. diese Funktionen bilden einen translationsinvarianten Raum, und man kann zeigen, daß  $\phi(\cdot - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  für diesen Raum eine Orthonormalbasis ist.  $\phi$  ist aber – wie im Paragraph 3.4.1 ausgeführt wird – auch skalierbar und daher können alle Funktionen, deren Fourier-Transformierte Träger im Intervall  $[-\omega, \omega]$ ,  $\omega \in \mathbb{R}_+^*$  haben, in der Basis  $\phi(2\omega \cdot - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  dargestellt werden.

Die *Interpolationseigenschaft* der sinc-Funktion ist es schließlich, die aus der Reihe in (2) eine *Sampling-Reihe* werden läßt. Es ist dies die Eigenschaft

$$\phi(k) = \delta_{0,k} \quad k \in \mathbb{Z} . \quad (3)$$

Damit ergeben sich nämlich durch Einsetzen der Werte  $l \in \mathbb{Z}$  die Koeffizienten  $(c_k)$  in (2) als Funktionswerte (*Samples*) von  $f$ , es ist also

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \phi(\cdot - k)$$

für Funktionen  $f$ , deren Fourier-Transformierte Träger in  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  hat. Für praktische Anwendungen ist dies eine wertvolle Eigenschaft, da mit dem Computer zu bearbeitende oder zu analysierende Funktionen oft bereits in gesampelter Form vorliegen, man denke etwa an Meßreihen in der Physik oder der Medizin.

## Problemstellung

Das bereits erwähnte Beispiel des Sinus Cardinalis ist eines der wenigen, in denen sich die Skalierungsfunktion explizit angeben läßt. Normalerweise hat man lediglich die implizite Darstellung in Form der Zwei-Skalen-Relation (1). Entscheidend ist hierbei die Koeffizientenfolge  $(h_k)$ , die *Skalierungsmaske*. Es gilt, Folgen  $(h_k)$  zu konstruieren, so daß durch (1) tatsächlich eine Skalierungsfunktion gegeben ist, die zudem weitere erwünschte Eigenschaften wie z.B. die Interpolationseigenschaft (3) besitzt.

Auf Basis der Mehrfachauflösungen hat Daubechies 1988 ein Konstruktionsverfahren angegeben, mit dem sich eindimensionale Skalierungsfunktionen (und *Wavelets*) beliebigen *Regularitätsgrades* und mit orthogonalen Translatierten konstruieren lassen. Diese bahnbrechende Arbeit war der Auslöser für den einsetzenden Ansturm auf das Themengebiet *Wavelet-Theorie*.

Die Konstruktion von Daubechies hat jedoch einen entscheidenden Nachteil: Sie läßt sich nicht auf höhere Dimensionen verallgemeinern. Das Verfahren führt zwangsläufig auf das Problem der Faktorisierung eines trigonometrischen Polynoms der Form  $|m|^2$  zur Bestimmung von  $m$  selbst, für das in höheren Dimensionen kein kanonisches Lösungsverfahren existiert. Hinzu kommen weitere Probleme. Die in (1) auftretende Dilatationsmatrix  $A$  reduziert sich im eindimensionalen Fall auf einen Faktor und dieser wird – unter dem Aspekt der Implementierung auf Computern sicher naheliegend – immer gleich 2 gewählt. Erst durch die Betrachtung des mehrdimensionalen Falles wird jedoch klar, daß diese spezielle Wahl das Verfahren erheblich vereinfacht. Es stellt sich heraus, daß für die Konstruktion einer mehrdimensionalen Mehrfachauflösung stets  $|\det A| = a$  Funktionen benötigt werden: Eine Skalierungsfunktion und  $a - 1$  Wavelets. Dadurch wird die Raumzerlegung der Mehrfachauflösung strukturell komplizierter, da die Zahl einzelner Teilräume einer Skala mit der Determinante der Dilatationsmatrix korreliert. In einigen Fällen zieht man sich daher zur Vereinfachung auf den Spezialfall  $a = 2$  zurück.

Für Regularitätsaussagen spielen die Eigenwerte der Matrix  $A$  eine entscheidende Rolle. So lassen sich im Fall *isotroper* Matrizen (i.e. alle Eigenwerte von  $A$  haben den gleichen Betrag) Regularitätsabschätzungen einfacher und exakter gewinnen als im anisotropen Fall.

Schließlich ist es schlicht die kompliziertere Geometrie des  $\mathbb{R}^n$ , die für einige der entstehenden Probleme verantwortlich ist. Wer hätte gedacht, daß sich bereits bei der Verallgemeinerung der einfachsten bekannten Wavelet-Basis auf höhere Dimensionen, der Haar-Basis, derart komplizierte Träger wie der Twin-Dragon in Abbildung 2.5 auf Seite 90 ergeben? Die Ausführungen zu selbstaffinen Mengen in Anhang 2.C zeigen, daß die fraktale Struktur dieser Menge nicht eine Ausnahme, sondern die Regel ist.

Ziel der Arbeit ist es daher, die Theorie der mehrdimensionalen Skalierungsfunktionen zunächst umfassend darzustellen und darauf aufbauend zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die eingangs erwähnten guten Eigenschaften der sinc-Funktion auch für andere Erzeuger von Mehrfachauflösungen gelten.

## Literaturübersicht

Seit der Formulierung der Theorie der Mehrfachauflösung durch Mallat und Meyer [Mal89], [Mey90] im Jahr 1986 und der darauf aufbauenden Konstruktion eindimensionaler orthonormaler Wavelets mit kompaktem Träger 1988 durch Daubechies [Dau88] erfreut sich der Themenkreis „Wavelet-Theorie“ außerordentlicher Popularität. Wissenschaftler unterschiedlicher Disziplinen haben die Anwendungsmöglichkeiten der Wavelet-Transformation für ihre Zwecke erkannt und weitergehend untersucht. Nicht zuletzt die Entwicklung eines auf der Wavelet-Transformation basierenden Standards zur digitalen Speicherung von Fingerabdrücken durch das amerikanische FBI (ANSI/NIST-CSL 1-1993) trug dazu bei.

Die eindimensionale Konstruktion Daubechies' ist mittlerweile gut verstanden und gehört vielfach schon zum mathematischen Allgemeinwissen. Es gibt zahlreiche Bücher zum Thema, der weitaus größte Teil davon in englischer Sprache. Zu den wenigen deutschsprachigen Titeln gehören das Buch von Louis *et al.* [LMR94] aus dem Jahr 1994 sowie die Einführung von Blatter [Bla98] neueren Datums. Es ist uns jedoch kein Werk bekannt, das die mehrdimensionale Theorie in nennenswertem Umfang berücksichtigt. Einzige Ausnahme ist hier das im Original in Französisch erschienene Buch von Meyer [Mey90, Vol. I], das auch nach 10 Jahren noch zur Klärung aktueller Fragen beiträgt. Der Grund für die Zurückhaltung ist ebenso einfach wie durchschlagend: Die mehrdimensionale Theorie ist – wie der vorangegangene Abschnitt eingehend erläutert – um ein Vielfaches komplizierter als der eindimensionale Fall. An die Stelle des Paukenschlages von Daubechies [Dau88], der mit einem Streich die eindimensionale orthogonale Theorie in weiten Teilen aufklärte, sowie der umfassenden Darstellung des eindimensionalen biorthogonalen Falles durch Cohen *et al.* [CDF92] treten nunmehr viele Einzelresultate, die sich langsam zum Mosaik der mehrdimensionalen Theorie der Skalierungsfunktionen und Wavelets zusammenfügen.

Wichtige Beiträge lieferten Anfang der Neunziger Jahre Dubuc *et al.* [DDD91] und Cavaretta *et al.* [CDM91] im Kontext der Verfeinerungsschemata. Etwa zur gleichen Zeit begann auch die systematische Untersuchung translationsinvarianter Räume. Hier sind die Arbeiten von Ron [Ron89], [Ron92], Jia/Micchelli [JM91], [JM92], de Boor *et al.* [dBDR94] und Ron/Shen [RS95] zu nennen. Für die Entwicklung der Theorie der mehrdimensionalen Mehrfachauflösungen von Bedeutung ist die Untersuchung des verallgemeinerten Haar-Falles durch Gröchenig/Madych [GM92]. Ebenfalls ein wichtiger Meilenstein auf diesem Weg ist die nahezu einhundert Seiten umfassende Arbeit von Cohen/Daubechies [CD93] über nicht-separable zweidimensionale Wa-



veletbasen. Eine ausführliche Darstellung des mehrdimensionalen biorthogonalen Falles lieferten Chui/Li [CL94]. Im Zusammenhang mit der Regularitätsanalyse ist die Einführung des Übergangsoperators durch Conze/Raugi [CR90] besonders erwähnenswert. Resultate zur Hölder-Regularität finden sich bei Daubechies/Lagarias [DL91], [DL92], Cohen/Daubechies [CD93], Daubechies [Dau92] und Riemenschneider/Shen [RS97]. Die Sobolev-Regularität betrachten Villemoes [Vil93], Jia [Jia99a] für den Fall *isotroper* Dilatationsmatrizen und Cohen *et al.* [CGV99] im anisotropen Fall. Neuere Arbeiten, die sich speziell den interpolierenden Skalierungsfunktionen annehmen, sind Dahlke/Maaß [DM97], Ji/Shen [JS97], Dahlke *et al.* [DGM98] und Ji *et al.* [JRS99]. Zur Verbindung zwischen der Sampling-Theorie und den Mehrfachauflösungen sind lediglich die Arbeiten von Walter [Wal92], Saito/Beylkin [SB93], Xia/Zhang [XZ93] und Zhou/Sun [ZS99] bekannt.

## Aufbau der Arbeit

Die Gliederung der Arbeit orientiert sich an den zwei Schwerpunkt-Themen *Sampling-Theorie* und *Skalierungsfunktionen*.

**Kapitel 1** stellt zunächst die für nachfolgende Kapitel grundlegenden Eigenschaften der Fourier-Transformation zusammen. Sowohl auf  $\mathbb{R}^n$  als auch auf  $\mathbb{T}^n$  bzw.  $\mathbb{Z}^n$  werden die vier Standardräume  $L^1$ ,  $L^2$ ,  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{S}'$  betrachtet. Dazu gehört vorab eine Einführung in die Distributionentheorie.

Das **Kapitel 2** widmet sich dem Themenkomplex *Sampling-Theorie*. Der Abschnitt 2.1 geht zunächst ausführlich auf den eindimensionalen Fall ein. Paragraph 2.1.1 stellt das für die Sampling-Theorie zentrale Whittaker-Shannon-Kotel'nikov Sampling-Theorem vor und diskutiert die Fälle des Over- und Undersamplings. Verallgemeinerungen des WSK-Theorems werden in den nachfolgenden beiden Paragraphen betrachtet: Für bandbeschränkte Funktionen in 2.1.2 und für nicht (notwendigerweise) bandbeschränkte Funktionen in 2.1.3. Von besonderer Bedeutung ist hier die Theorie der Hilbert-Räume mit reproduzierendem Kern. Den Abschluß der eindimensionalen Betrachtungen bildet der Paragraph 2.1.4 zur Fehleranalyse. Im zweiten Abschnitt des Kapitels wird die mehrdimensionale Sampling-Theorie beleuchtet. Nach der Verallgemeinerung des WSK-Theorems auf höhere Dimensionen im Paragraphen 2.2.1 werden in den beiden verbleibenden Unterabschnitten die Fälle regulären bzw. irregulären Samplings untersucht.

In einem dreiteiligen Anhang zum Kapitel 2 finden sich eine Zusammenstellung der Eigenschaften der sinc-Funktion, Grundbegriffe aus der Gittertheorie sowie ein Abschnitt über Selbstaffine Mengen.

Es schließt sich das von allen umfangreichste **Kapitel 3** an, das die Theorie

der Skalierungsfunktionen und im speziellen die der interpolierenden Skalierungsfunktionen beleuchtet. Die bereits erwähnten fundamentalen Eigenschaften der Translationsinvarianz und Skalierbarkeit sind Gegenstand der beiden ersten Abschnitte. Eine kurze Zusammenstellung der im folgenden häufig verwendeten Eigenschaften liefert der Paragraph 3.2.3. Die Sektion 3.3 ist den Mehrfachauflösungen gewidmet. Der Definition im Paragraph 3.3.1 folgt eine kurze Darstellung der darauf aufsetzenden eindimensionalen Konstruktion von Daubechies im Paragraphen 3.3.2 sowie eine ausführliche Diskussion des mehrdimensionalen biorthogonalen Falles in 3.3.3. Im Abschnitt 3.4 werden Verbindungen zur Sampling-Theorie und damit zum Kapitel 2 hergestellt. Im Unterabschnitt 3.4.1 wird die dem WSK-Theorem assoziierte *Shannon-Mehrfachauflösung* betrachtet. Der sich anschließende Paragraph 3.4.2 untersucht die Fragestellung, wann für die Räume einer Mehrfachauflösung ein Sampling-Theorem gilt. Das Thema Regularitätsanalyse ist Gegenstand des Abschnitts 3.5. Paragraph 3.5.1 enthält eine Definition der für Regularitätsaussagen wichtigen Hölder- und Sobolev-Räume. Die sich anschließenden zwei Unterabschnitte stellen zwei Verfahren zur Regularitätsabschätzung vor: Die *Brute-Force* Methode in 3.5.2 sowie die *Littlewood-Paley* Methode unter Verwendung des *Übergangsooperators* in 3.5.3. Der letzte Paragraph 3.5.4 dieses Abschnitts untersucht den Einfluß der *Strang-Fix Bedingungen* auf die Regularität. Das Kapitel schließt mit dem Abschnitt 3.6 über spezielle Konstruktionsverfahren für interpolierende Skalierungsfunktionen. Dazu gehören das von Dubuc *et al.* entwickelte Verfahren der *Iterativen Interpolation* in Paragraph 3.6.1 sowie die von Gröchenig/Madych auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinerte Haar-Basis. Diese ist zwar nicht im strengen Sinne interpolierend, besitzt jedoch einen Teil der Eigenschaften. Wie aus orthogonalen Skalierungsfunktionen interpolierende konstruiert werden können, zeigt der Paragraph 3.6.3. Im Paragraphen 3.6.4 schließlich wird ein von Ji *et al.* vorgestelltes iteratives Verfahren zur Konstruktion interpolierender Symbole diskutiert, mit dem sich unter bestimmten Voraussetzungen insbesondere auch die Regularität der Symbole erhöhen läßt. Im Anhang 3.A sind einige häufig verwendete Resultate zum Spektralradius zusammengestellt.

Das abschließende **Kapitel 4** faßt die Ergebnisse aus den vorangegangenen Teilen zusammen und gibt einen Ausblick auf zukünftige Arbeiten.

Zur besseren Orientierung und schnellen Referenz ist der Arbeit ein Verzeichnis der verwendeten mathematischen Symbole beigelegt.

Alle in der vorliegenden Arbeit abgedruckten Funktions-Graphen wurden mit dem Programm *Mathematica* der Firma Wolfram Research in der Version 3.0 selbst erstellt.

# KAPITEL 1

---

## Präliminarien

Das vorliegende Kapitel dient der Bereitstellung eines für spätere Ausführungen notwendigen Begriffsapparates. Dazu gehören einige häufig verwendete Bezeichnungen, die im Abschnitt 1.1 eingeführt werden. Es folgt der Abschnitt 1.2 mit einer Einführung in die Theorie der Distributionen. Die sich daran anschließenden drei Sektionen 1.3 bis 1.5 liefern eine ausführliche Darstellung der Fourier-Transformation, die sowohl für die Sampling-Theorie in Kapitel 2 als auch für die Theorie der Skalierungsfunktionen in Kapitel 3 von grundlegender Bedeutung ist. Aufgrund des propädeutischen Charakters dieses Kapitels wird auf die Angabe von Beweisen weitgehend verzichtet. Die zur Darstellung herangezogene Literatur wird jeweils zu Beginn eines jeden Abschnitts referenziert.

### 1.1 Bezeichnungen

Sei  $\Omega$  eine beliebige, nichtleere, offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ .

Ein geordnetes  $n$ -Tupel

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \alpha_i \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n$$

heißt **Multiindex**. Es sei

$$\beta \leq \alpha \Leftrightarrow \beta_i \leq \alpha_i, i = 1, \dots, n.$$

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

heißt **Ordnung** von  $\alpha$ .

Mit jedem Multiindex assoziiert man den **Differential-Operator**

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} \quad \text{wobei} \quad \partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j} .$$

Ist  $|\alpha| = 0$ , so ist  $\partial^\alpha f = f$ .

Sei  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Für einen Multiindex  $\alpha$  ist das **Monom**  $x^\alpha$  durch

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

definiert.

$|x|$  bezeichne die Euklidische Norm von  $x$ :

$$|x| := \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Für eine stetige Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  heißt

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}$$

der **Träger** von  $f$ .

Von zentraler Bedeutung für die vorliegende Arbeit sind Funktionen mit kompaktem Träger. Nach Heine-Borel ist eine Menge  $K$  genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Der Träger einer Funktion ist also genau dann kompakt, wenn er beschränkt ist.

Die Funktionen-Räume

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\Omega) &= \mathcal{C}^0(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ stetig}\} \\ \mathcal{C}_b(\Omega) &= \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ stetig und beschränkt}\} \\ \mathcal{C}^m(\Omega) &= \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}; \partial^\alpha f \in \mathcal{C}(\Omega) \forall \text{ Multiindizes } \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq m, m \in \mathbb{N}\} \\ \mathcal{C}^\infty(\Omega) &= \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}; \partial^\alpha f \in \mathcal{C}(\Omega) \forall \text{ Multiindizes } \alpha\} \\ \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) &= \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}; f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \text{supp } f \text{ kompakt}\} \\ \mathcal{C}_0(\Omega) &= \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}; f \in \mathcal{C}(\Omega), \lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = 0\} \end{aligned}$$

sind, versehen mit den üblichen lokal-konvexen Topologien, topologische Vektorräume. Es ist

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathcal{C}^m(\Omega)$$

und es gelten folgende Inklusionen:

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) \subset \mathcal{C}^j(\Omega) \subset \mathcal{C}^i(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega) \quad 0 \leq i \leq j.$$

Für  $\Omega = \mathbb{R}^n$  schreibt man kurz:

$$\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n) =: \mathcal{C}^m \quad 0 \leq m \leq \infty.$$

Die Räume

$$L^p(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ meßbar}, \|f\|_p < \infty\} \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (1.1)$$

mit den Normen

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup } |f| := \inf_{\substack{\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n \\ \mathcal{N} \text{ Nullmenge}}} \sup_{t \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}} |f(t)|, & p = \infty \end{cases} \quad (1.2)$$

sind Banachräume (d.h. normierte, bezüglich der durch die Norm induzierten Metrik vollständige Räume), wobei wie üblich  $f \in L^p$  mit der Äquivalenzklasse  $\{g \in L^p; f = g \text{ fast überall}\}$  identifiziert wird.

Mit  $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  sei der Raum der auf  $\Omega$  lokal in  $p$ -ter Potenz integrierbaren Funktionen bezeichnet:

$$L^p_{\text{loc}}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ meßbar}, \left( \int_K |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \forall K \subset \Omega, K \text{ kompakt} \right\}.$$

Eine auf  $\mathbb{Z}^n$  definierte komplexwertige Funktion heißt **Folge**.

$$\ell(\mathbb{Z}^n) := \{c : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}\}$$

sei der Raum aller Folgen.

Notation:  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$  oder  $(c_k)$  oder einfach  $c$ .

Die Räume

$$\ell^p(\mathbb{Z}^n) := \{c : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}; \|c\|_p < \infty\} \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (1.3)$$

mit den Normen

$$\|c\|_p := \begin{cases} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_k|, & p = \infty \end{cases} \quad (1.4)$$

sind ebenfalls Banachräume.

$L^2(\mathbb{R}^n)$  und  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$  sind Hilbert-Räume.

**Bemerkung 1.1**

$\ell^p(\mathbb{Z}^n)$  läßt sich auffassen als  $L^p(\mathbb{Z}^n, \mu)$ , wobei  $\mu$  das Dirac-Maß ist. Somit gelten die (maßunabhängigen) Eigenschaften von  $L^p$  auch für  $\ell^p$ .

Kurzschreibweisen:  $L^p$  statt  $L^p(\mathbb{R}^n)$  bzw.  $\ell^p$  statt  $\ell^p(\mathbb{Z}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

Eigenschaften der Normen (1.2) und (1.4):

- 1.) Für  $p \geq 1$  gilt die **Minkowski-Ungleichung**

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (1.5)$$

- 2.) Seien  $p, q \in (0, \infty)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Ist  $f \in L^p, g \in L^q$ , so ist  $f \cdot g \in L^1$  und es gilt die **Hölder-Ungleichung**

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q. \quad (1.6)$$

Ist  $p = \infty, q = 1$ , so gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1.$$

- 3.) Für  $p, q = 2$  liefert (1.6) die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2. \quad (1.7)$$

Sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$ .

$\chi_Q$  bezeichne die charakteristische Funktion auf  $Q$ :

$$\begin{aligned} \chi_Q : \mathbb{R}^n &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

$id_Q : Q \rightarrow Q$  sei die identische Abbildung auf der Menge  $Q$ .

Weiterhin sei  $\check{id} := id(-\cdot)$ .

Für  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  sei

- 1.)  $T_b f := f(\cdot - b) \quad b \in \mathbb{R}^n$

die **Translation**,

- 2.)  $E_\lambda f := e_\lambda f \quad \text{mit} \quad e_\lambda(\cdot) := e^{2\pi i \langle \lambda, \cdot \rangle} \quad \lambda \in \mathbb{R}^n$

die **Modulation** und

$$3.) D_A^p f := |\det A|^{-\frac{1}{p}} f(A^{-1}\cdot) \quad A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}), \quad 1 \leq p < \infty$$

die **p-Dilatation**.

### Definition 1.2

Sind  $f, g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$  und  $f \cdot g(\xi - \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$  für fast alle  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , so heißt

$$(f * g)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(\xi - x)dx \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.8)$$

die **Faltung** von  $f$  und  $g$ .

Eigenschaften der Faltung:

- 1.) Kommutativität:  $f * g = g * f$ , falls eines der Integrale existiert.
- 2.) Ist  $f \in L^p, g \in L^1$ , so ist  $f * g \in L^p$  mit  $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_1$ .
- 3.) Sind  $f, g \in L^2$ , so ist  $f * g \in L^\infty$  mit  $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$ .
- 4.) Assoziativität: Sind  $f, g, h \in L^1$ , so gilt  $f * (g * h) = (f * g) * h$ .  
Die sog. Faltungsalgebra auf  $L^1$  ist also kommutativ und assoziativ.
- 5.) Falls  $f * g$  existiert, so ist  
 $\text{supp}(f * g) \subset \overline{\text{supp } f + \text{supp } g} = \overline{\{x + y \in \mathbb{R}^n; x \in \text{supp } f, y \in \text{supp } g\}}$ .  
Für nicht stetiges  $f$  ist  $\text{supp } f$  im Sinne der Definition auf Seite 15 zu verstehen. Hat  $f$  oder  $g$  kompakten Träger, so ist  $\text{supp } f + \text{supp } g$  abgeschlossen.
- 6.) Ist  $f \in L_{\text{loc}}^1, g \in \mathcal{C}^m$  und hat  $f$  oder  $g$  kompakten Träger, so ist  $f * g \in \mathcal{C}^m$  und für alle Multiindizes  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq m$  gilt

$$\partial^\alpha(f * g) = f * \partial^\alpha g.$$

- 7.) Nach Bemerkung 1.1 übertragen sich die Eigenschaften der Faltung auf  $\ell^p$ .

## 1.2 Distributionen

...the space of distributions is essentially the smallest extension of the space of continuous functions where differentiation is always well defined.

L. Hörmander [Hör83, S. 1]

Zur Darstellung der Theorie der Distributionen wurden hauptsächlich Rudin [Rud91, Kap. 6], Hörmander [Hör83, Kap. I-IV] und Khoan [Kho72, Kap. B+C] herangezogen.

### 1.2.1 Testfunktionen

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $K \subset \Omega$  kompakt.

$$\mathcal{D}_K(\Omega) := \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega); \text{supp } \varphi \subset K\}$$

bildet zusammen mit der durch die abzählbare Familie der Halbnormen

$$p_k(\varphi) := \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty \quad k \in \mathbb{N} \quad (1.9)$$

erzeugten Topologie einen Fréchet-Raum (d.h. einen lokal-konvexen Raum, der bezüglich der durch die Halbnormen (1.9) erzeugten Metrik vollständig ist).

#### Definition 1.3

$$\mathcal{D}(\Omega) := \bigcup_{\substack{K \subset \Omega \\ K \text{ kompakt}}} \mathcal{D}_K = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$

heißt **Raum der Testfunktionen** auf  $\Omega$ .

$\mathcal{D}(\Omega)$  ist, versehen mit der Topologie des induktiven Limes, ein lokal-konvexer topologischer Vektorraum.  $\mathcal{D}(\Omega)$  liegt dicht in  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

#### Beispiel 1.4

Sei  $c \in \mathbb{C}$ ,  $c \neq 0$ . Die durch

$$\vartheta(x) = \begin{cases} c e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & , |x| < 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

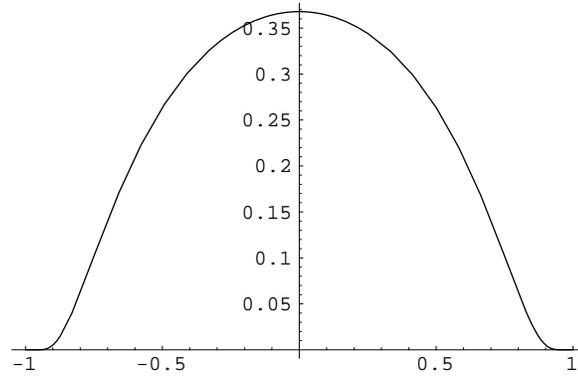
definierte Funktion  $\vartheta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine Testfunktion.

#### Satz 1.5

Sind  $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  und gilt

$$\int_{\Omega} f \varphi = \int_{\Omega} g \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

so ist  $f = g$  fast überall in  $\Omega$ .



**Abbildung 1.1:** Graph der Testfunktion aus Beispiel 1.4 mit  $c = 1$ .

## 1.2.2 Definition

### Definition 1.6

Ein stetiges lineares Funktional

$$\begin{aligned} \eta : \mathcal{D}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \eta(\varphi) =: \langle \varphi, \eta \rangle \end{aligned}$$

heißt **Distribution** auf  $\Omega$ .

Der **Raum aller Distributions** auf  $\Omega$  wird gemäß der üblichen Bezeichnung für den topologischen Dualraum mit  $\mathcal{D}'(\Omega)$  bezeichnet.

### Satz 1.7

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1.)  $\eta \in \mathcal{D}'(\Omega)$
- 2.) Für alle Kompakta  $K \subset \Omega$  existieren  $N \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq C < \infty$  mit

$$|\langle \varphi, \eta \rangle| \leq C \cdot p_N(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Hierbei sind die  $p_N(\varphi)$  die in (1.9) definierten Halbnormen.

Die Stetigkeit eines linearen Funktionals  $\eta : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  ist also äquivalent zur Stetigkeit der  $\eta|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$  für alle Kompakta  $K \subset \Omega$ .

### Beispiel 1.8

Für jedes  $x \in \Omega$  wird durch

$$\begin{aligned} \delta_x : \mathcal{D}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

ein lineares Funktional auf  $\mathcal{D}(\Omega)$  definiert. Nach Satz 1.7 ist  $\delta_x \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .  $\delta_x$  heißt **Dirac'sche Delta-Distribution** im Punkte  $x$ . Für  $\delta_0$  schreibt man kurz  $\delta$ .

**Bemerkung 1.9**

Sei  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  und

$$\begin{aligned} \eta_f : \mathcal{D}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \int_{\Omega} f \varphi. \end{aligned}$$

Da

$$|\langle \varphi, \eta_f \rangle| \leq \int_K |f| \|\varphi\|_{\infty} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$$

ist nach Satz 1.7  $\eta_f$  eine Distribution auf  $\Omega$ . Nach Satz 1.5 sind zwei Funktionen  $f, g \in L^1_{\text{loc}}$  identisch, wenn sie die gleiche Distribution definieren. Man faßt daher  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  als Untervektorraum von  $\mathcal{D}'(\Omega)$  auf und identifiziert die Distribution  $\eta_f$  mit der Funktion  $f$ .

Für die Dirac'sche Delta-Distribution aber gilt:  $\delta_x \notin L^1_{\text{loc}}$ .

**Bemerkung 1.10**

Seien  $X, Y$  topologische Vektorräume mit  $X \subset Y$ ,  $X', Y'$  die jeweiligen topologischen Dualräume sowie

$$\iota : X \rightarrow Y$$

die kanonische Injektion von  $X$  in  $Y$ . Ist  $\iota$  stetig und liegt  $\iota(X)$  dicht in  $Y$ , so ist die zu  $\iota$  duale Abbildung

$$\begin{aligned} \iota' : Y' &\rightarrow X' \\ \eta &\rightarrow \eta \circ \iota \end{aligned} \tag{1.10}$$

injektiv. Man identifiziert daher häufig  $Y'$  mit dem Unterraum  $\iota'(Y')$  von  $X'$  und schreibt  $Y' \subset X'$ .

Gelegentlich wird eine Topologie auf dem Dualraum eines topologischen Vektorraums benötigt. Ist  $X$  topologischer Vektorraum und  $Y \subset X$ , so heißt

$$Y^0 := \left\{ \eta \in X'; \sup_{x \in Y} |\eta(x)| \leq 1 \right\}$$

die *Polare* von  $Y$ . Sei  $\mathcal{O}$  eine Familie beschränkter Teilmengen von  $X$  mit folgenden Eigenschaften:

$$1.) P, Q \subset \mathcal{O} \Rightarrow \exists R \subset \mathcal{O} \text{ mit } P \cup Q \subset R.$$

$$2.) P \subset \mathcal{O}, \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists Q \subset \mathcal{O} \text{ mit } \lambda P \subset Q.$$

Dann bilden die Polaren der Teilmengen von  $\mathcal{O}$  eine Nullumgebungsbasis, die auf  $X'$  eine lokal-konvexe Topologie erzeugt, die sog.  $\mathcal{O}$ -Topologie. Die beiden wichtigsten auf dem Dualraum gegebenen Topologien sind die **schwache und die starke Topologie**. Die schwache Topologie ergibt sich, wenn  $\mathcal{O}$  aus den endlichen Teilmengen von  $X$  besteht. Wählt man für  $\mathcal{O}$  hingegen die Menge der beschränkten Teilmengen von  $X$ , so erhält man die starke Topologie. Die schwache Topologie läßt sich auch charakterisieren als die Topologie der punktweisen Konvergenz in  $X$ , während die starke Topologie gerade die der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Teilmengen von  $X$  ist [Kho72, Vol. 1, S. 70], [Tre67, Kap. 19].

Für normierte Räume ist außerdem noch die durch die Norm erzeugte Topologie von Bedeutung.

### 1.2.3 Distributionen mit kompaktem Träger

Für  $\eta \in \mathcal{D}'(\Omega)$  und  $U \subset \Omega$ ,  $U$  offen, sei

$$\eta|_U := \eta|_{\{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega); \text{supp } \varphi \subset U\}}$$

die Restriktion von  $\eta$  auf  $U$ .

#### Satz 1.11

Sei

$$\eta \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad G := \bigcup_{\substack{U \subset \Omega \text{ offen} \\ \eta|_U = 0}} U.$$

Dann ist  $\eta|_G = 0$ .

Eine Distribution auf  $\Omega$  ist also durch ihre Restriktionen auf die Mengen einer offenen Überdeckung von  $\Omega$  bereits festgelegt.

$\Omega \setminus G =: \text{supp } \eta$  heißt **Träger der Distribution  $\eta$** . Analog der Definition für stetige Funktionen ist also auch  $\text{supp } \eta$  abgeschlossen. Mittels der Identifikation aus Bemerkung 1.9 läßt sich somit der Begriff des Trägers auch auf nicht stetige Funktionen  $f \in L^1_{\text{loc}}$  ausdehnen.

#### Bezeichnung 1.12

Es bezeichne  $\mathcal{E}(\Omega)$  den Raum  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ . Wie die Notation  $\mathcal{D}(\Omega)$  für den Raum  $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$  geht auch diese auf Laurent Schwartz zurück. Die Familie von Halb-

normen

$$p_k(\varphi) := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\substack{K \subset \Omega \\ K \text{ kompakt}}} \partial^\alpha \varphi \quad k \in \mathbb{N}$$

erzeugt eine Topologie auf  $\mathcal{E}(\Omega)$ , bezüglich derer  $\mathcal{D}(\Omega)$  in  $\mathcal{E}(\Omega)$  dicht liegt. Vermöge der kanonischen Injektion (1.10) identifiziert man daher den Unterraum von  $\mathcal{D}'(\Omega)$  der Distributionen mit kompaktem Träger mit dem topologischen Dualraum von  $\mathcal{E}(\Omega)$  und verwendet die Bezeichnung  $\mathcal{E}'(\Omega)$  für den Raum der Distributionen auf  $\Omega$  mit kompaktem Träger.

### 1.2.4 Operationen auf Distributionen

Operationen auf Distributionen werden als mit den entsprechenden Operationen auf Funktionen verträgliche Verallgemeinerungen definiert.

Sei  $\eta \in \mathcal{D}'(\Omega)$  und  $b \in \mathbb{R}^n$ , so heißt

$$\langle \varphi, T_b \eta \rangle := \langle T_{-b} \varphi, \eta \rangle \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

die **Translation** der Distribution  $\eta$ .

Es ist z.B.  $\langle \varphi, T_b \delta_0 \rangle = \langle \varphi(\cdot + b), \delta_0 \rangle = \delta_b$ .

Sei  $\eta \in \mathcal{D}'(\Omega)$  und  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ , so heißt

$$\langle \varphi, D_A^1 \eta \rangle := \frac{1}{|\det A|} \langle D_{A^{-1}}^1 \varphi, \eta \rangle \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

die **Dilatation** der Distribution  $\eta$ .

#### Differentiation

Für  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  ist

$$\int_{\Omega} \partial_j f \cdot \varphi = - \int_{\Omega} f \cdot \partial_j \varphi.$$

Man definiert daher verträglich:

#### Definition 1.13

Für  $\eta \in \mathcal{D}'(\Omega)$  heißt

$$\langle \varphi, \partial_j \eta \rangle := - \langle \partial_j \varphi, \eta \rangle \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

partielle **Ableitung** der Distribution  $\eta$ .  $\partial_j \eta$  ist wieder eine Distribution. Allgemeiner definiert man für einen Multiindex  $\alpha$ :

$$\langle \varphi, \partial^\alpha \eta \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \partial^\alpha \varphi, \eta \rangle.$$

Die Reihenfolge der partiellen Differentiation einer Distribution ist daher beliebig.

**Beispiel 1.14**

Sei

$$H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

die Heavyside-Funktion. Es ist

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \partial H \rangle &= -\langle \partial \varphi, H \rangle \\ &= -\int_0^\infty \partial \varphi(x) dx = \varphi(0) \\ &= \langle \varphi, \delta_0 \rangle, \end{aligned}$$

die Ableitung der Heavyside-Funktion im distributiven Sinne ist also die Dirac'sche Delta-Distribution im Punkt 0.

**Multiplikation mit Funktionen****Definition 1.15**

Für  $f \in \mathcal{E}(\Omega)$  ist  $f\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Für  $\eta \in \mathcal{D}'(\Omega)$  definiert daher

$$\langle \varphi, f\eta \rangle := \langle f\varphi, \eta \rangle \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (1.11)$$

eine Distribution auf  $\Omega$ .

**Beispiel 1.16**

Es ist

$$\begin{aligned} \langle \varphi, id \cdot \partial \delta_0 \rangle &= \langle id \cdot \varphi, \partial \delta_0 \rangle \\ &= -\langle \partial(id \cdot \varphi), \delta_0 \rangle \\ &= -\partial(id \cdot \varphi)(0) = -\varphi(0) \end{aligned}$$

und somit  $id \cdot \partial \delta_0 = -\delta_0$ .

**Faltung von Distributionen**

Im folgenden sei  $\check{\varphi} := \varphi \circ \check{id} = \varphi(-\cdot)$ .

**Definition 1.17**

Ist  $\eta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  und  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  oder  $\eta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  und  $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ , so heißt

$$(\varphi * \eta)(x) := \langle T_x \check{\varphi}, \eta \rangle = \langle \varphi(x - \cdot), \eta \rangle \quad (1.12)$$

die **Faltung** von  $\eta$  mit der Funktion  $\varphi$ .

Ist  $\eta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  und  $\zeta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ , so heißt

$$\langle \varphi, \zeta * \eta \rangle := \langle \varphi * \check{\zeta}, \eta \rangle = \langle \varphi * \check{\eta}, \zeta \rangle \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad (1.13)$$

die **Faltung** von  $\eta$  mit der **Distribution**  $\zeta$ .

Für  $\eta \in L^1_{\text{loc}}$  stimmt (1.12) mit (1.8) überein, die Definition ist somit verträglich.

Die meisten der im Anschluß an die Definition 1.2 aufgeführten Eigenschaften gelten auch für die Faltung von Distributionen.

Sind  $\varphi, \vartheta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\eta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\zeta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  und  $\alpha$  ein Multiindex, so gilt:

- 1.)  $\varphi * \eta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ , d.h.  $\langle \varphi * \eta, \zeta \rangle$  in (1.13) definiert tatsächlich ein lineares Funktional  $\zeta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ .
- 2.) Für die asymmetrische Definition (1.12) macht Kommutativität zunächst keinen Sinn, die Faltung zweier Distributionen gemäß (1.13) ist jedoch wieder kommutativ.
- 3.) Die Faltung kommutiert mit der Translation:  $(T_b \varphi) * \eta = T_b(\varphi * \eta)$ .
- 4.)  $\varphi * (\vartheta * \eta) = (\varphi * \vartheta) * \eta$  und  
 $\varphi * (\zeta * \eta) = (\varphi * \zeta) * \eta$ .  
 Damit ist auch (1.13) verträglich mit früheren Definitionen.
- 5.)  $\text{supp}(\varphi * \eta) \subset \text{supp} \varphi + \text{supp} \eta$  und  
 $\text{supp}(\zeta * \eta) \subset \text{supp} \zeta + \text{supp} \eta$ .
- 6.)  $\partial^\alpha(\varphi * \eta) = \varphi * (\partial^\alpha \eta) = (\partial^\alpha \varphi) * \eta$  und  
 $\partial^\alpha(\zeta * \eta) = \zeta * (\partial^\alpha \eta) = (\partial^\alpha \zeta) * \eta \quad \forall \alpha$ .
- 7.)  $\delta_b * \eta = T_b \eta$  und  $(\partial^\alpha \delta) * \eta = \partial^\alpha \eta$ , d.h. die Differentiation einer Distribution läßt sich als Faltung interpretieren.

### Definition 1.18

Eine Folge  $(h_j)$  von Funktionen der Form

$$h_j(x) = j^n h(jx) \quad j \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^n$$

mit  $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $h \geq 0$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} h(x) dx = 1$  heißt **Fast-Eins in**  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

### Satz 1.19

Seien  $(h_j)$  eine Fast-Eins in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  und  $\eta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  sei mit der Topologie aus (1.9) versehen, auf  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  sei die schwache Topologie gegeben. Dann gilt:

- 1.)  $\lim_{j \rightarrow \infty} h_j * \varphi = \varphi$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

2.)  $\lim_{j \rightarrow \infty} h_j * \eta = \eta$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

Jede Distribution ist also im Sinne der Topologie von  $\mathcal{D}'$  Grenzwert einer Folge unendlich oft differenzierbarer Funktionen.

### 1.2.5 Temperierte Distributionen

#### Bezeichnung 1.20

Für Multiindizes  $\alpha, \beta$  und  $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  sei

$$p_{\alpha, \beta}(\varphi) := \|\text{id}^\beta \partial^\alpha \varphi\|_\infty. \quad (1.14)$$

Die Menge der Funktionen

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n); p_{\alpha, \beta}(\varphi) < \infty \forall \alpha, \beta\}$$

bildet zusammen mit der durch die abzählbare Familie der Halbnormen (1.14) erzeugten Topologie einen Fréchet-Raum. Dieser heißt **Schwartz-Raum der rasch fallenden Funktionen**.

Es gilt:

- 1.)  $\mathcal{S} \subset L^p, 1 \leq p \leq \infty$ .
- 2.)  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ , jeweils dicht und stetig eingebettet.

Aufgrund der jeweils dichten und stetigen Einbettungen der Räume identifiziert man gemäß Bemerkung 1.10  $\mathcal{S}'$  mit einem Unterraum von  $\mathcal{D}'$  und  $\mathcal{E}'$  mit einem Unterraum von  $\mathcal{S}'$  und schreibt  $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ .

#### Definition 1.21

Die Distributionen  $\eta \in \mathcal{S}'$  heißen **temperiert**.

#### Beispiel 1.22

- 1.) Jede Distribution mit kompaktem Träger ist temperiert.
- 2.)  $L^p \subset \mathcal{S}' \quad 1 \leq p \leq \infty$ .
- 3.) Jedes Polynom  $p$  über  $\mathbb{R}^n$  liegt in  $\mathcal{S}'$ .

Die Operationen auf Distributionen müssen für temperierte Distributionen adaptiert werden. Das Produkt einer temperierten Distribution  $\eta \in \mathcal{S}'$  mit einer Funktion  $f \in \mathcal{E}$  ist z.B. nur dann wieder eine temperierte Distribution, wenn  $f\varphi \in \mathcal{S} \forall \varphi \in \mathcal{S}$  gilt.

**Bezeichnung 1.23**

- 1.) Eine Funktion  $f$  heißt **langsam wachsend**, falls  $\partial^\alpha f$  für beliebige Multiindizes  $\alpha$  polynomiales Wachstum besitzt, d.h. falls gilt: Für alle Multiindizes  $\alpha$  existiert  $m \in \mathbb{N}$  mit

$$\sup \frac{|\partial^\alpha f|}{(1 + |id|^2)^m} < \infty .$$

- 2.) Eine Funktion  $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  heißt **Multiplikator für  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$** , falls  $f\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  für alle  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist. Der Raum aller Multiplikatoren für  $\mathcal{S}$  wird mit  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet.
- 3.) Eine Distribution  $\eta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  heißt **Konvolutor für  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$** , falls  $\varphi * \eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  für alle  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist. Der Raum aller Konvolutoren für  $\mathcal{S}$  wird mit  $\mathcal{O}'_C(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet.

**Satz 1.24**

- 1.) *Folgende Eigenschaften sind äquivalent:*
- (i)  $f \in \mathcal{O}_M$ .
  - (ii) Für  $f \in \mathcal{E}, \varphi \in \mathcal{S}$  ist  $f\varphi \in \mathcal{S}$  und die Abbildung  $\varphi \mapsto f\varphi$  ist stetig.
  - (iii) Für alle Multiindizes  $\alpha$  ist  $\partial^\alpha f$  langsam wachsend.
- 2.) Für  $f \in \mathcal{O}_M, \eta \in \mathcal{S}'$  ist  $f\eta \in \mathcal{S}'$  und die Abbildung  $\eta \mapsto f\eta$  ist stetig. Die Multiplikatoren für  $\mathcal{S}$  sind also auch Multiplikatoren für  $\mathcal{S}'$ .
- 3.)  $\mathcal{E}' \subset \mathcal{O}'_C$ .

Damit läßt sich die Definition 1.17 für temperierte Distributionen folgendermaßen adaptieren:

**Definition 1.25**

Ist  $\eta \in \mathcal{S}'$  und  $\vartheta \in \mathcal{S}$ , so heißt

$$\langle \varphi, \vartheta * \eta \rangle := \langle \check{\vartheta} * \varphi, \eta \rangle \quad (1.15)$$

die Faltung von  $\eta$  mit der Funktion  $\vartheta$ .

Ist  $\eta \in \mathcal{S}'$  und  $\zeta \in \mathcal{O}'_C$ , so heißt

$$\langle \varphi, \eta * \zeta \rangle := \langle \varphi * \check{\zeta}, \eta \rangle \quad \varphi \in \mathcal{S} \quad (1.16)$$

die Faltung der Distributionen  $\eta$  und  $\zeta$ .

Hat  $\vartheta$  oder  $\eta$  kompakten Träger, so ist diese Definition verträglich mit jener in Definition 1.17.

### 1.2.6 Periodische Distributionen

#### Definition 1.26

Eine Distribution  $\zeta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  heißt  **$\mathbb{Z}^n$ -periodisch**, wenn gilt:

$$T_k \zeta = \zeta \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n .$$

Sei  $\mathbb{T}^n := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ , so ist  $\mathbb{T}^n$  isomorph zu  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ .  $\mathbb{T}^n$  heißt  **$n$ -dimensionale Torusgruppe**. Vorläufig bezeichne  $\mathcal{Q}(\mathbb{T}^n)$  den Raum der  $\mathbb{Z}^n$ -periodischen Distributionen auf  $\mathbb{R}^n$ .  $\mathcal{Q}(\mathbb{T}^n)$  ist ein (im Sinne der schwachen Topologie auf  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ) abgeschlossener Untervektorraum von  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

$\mathbb{T}^n$  läßt sich als Menge auch mit dem  $n$ -dimensionalen halboffenen Einheitsintervall  $I^n := \prod_{i=1}^n [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  identifizieren.

#### Definition 1.27

Für eine Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  heißt

$$\varpi \varphi := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} T_k \varphi \tag{1.17}$$

die **Periodisierung** von  $\varphi$ .

Da  $\text{supp } \varphi$  kompakt, ist die Summe in (1.17) auf jedem Kompaktum  $K \subset \mathbb{R}^n$  endlich, also ist  $\varpi \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  und  $\mathbb{Z}^n$ -periodisch. Die  $\mathbb{Z}^n$ -periodischen Funktionen  $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  bilden einen abgeschlossenen Untervektorraum von  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ , der mit  $\mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$  bezeichnet wird.

Sind  $\varphi, \vartheta \in \mathcal{D}$ , so sind  $\varpi \varphi, \varpi \vartheta \in \mathcal{E}(\subset L^1_{\text{loc}})$ , nach Bemerkung 1.9 ist daher

$$\begin{aligned} \langle \vartheta, \varpi \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \vartheta(x) \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi(x - k) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \vartheta(y + k) dy \\ &= \langle \varphi, \varpi \vartheta \rangle . \end{aligned}$$

Für eine Distribution  $\eta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  definiert man daher verträglich:

$$\langle \varphi, \varpi \eta \rangle := \langle \varpi \varphi, \eta \rangle \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) . \tag{1.18}$$

#### Definition 1.28

Das durch (1.18) definierte lineare Funktional  $\varpi \eta : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **Periodisierung der Distribution**  $\eta$ .

**Satz 1.29 (Eigenschaften)**

- 1.) Der (lineare) Periodisierungsoperator  $\varpi$  bildet  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  stetig in  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  und  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  stetig in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ab.
- 2.)  $\varpi\eta$  ist  $\mathbb{Z}^n$ -periodisch  $\forall \eta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  und  $T_k$  kommutiert mit  $\varpi$ :

$$\varpi(T_k\eta) = T_k(\varpi\eta) = \varpi\eta \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

- 3.)  $\varpi(\varphi\zeta) = \varpi\varphi \cdot \zeta \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  und  $\forall \zeta \in \mathcal{Q}(\mathbb{T}^n)$ .
- 4.)  $\varpi(\vartheta\eta) = \vartheta \cdot \varpi\eta \quad \forall \vartheta \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$  und  $\forall \eta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Definition 1.30**

Eine Funktion  $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , für die  $\varpi\theta = 1$  ist, heißt **periodische Teilung der Eins** in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Sei z.B.  $\varphi \in \mathcal{D}$  eine auf  $\mathbb{R}^n$  nicht-negative Funktion mit  $\varphi \neq 0$  auf  $I^n$ , so ist  $\theta := \frac{\varphi}{\varpi\varphi} \in \mathcal{D}$  eine periodische Teilung der Eins.

Damit lassen sich folgende Surjektivitätsaussagen zeigen:

**Lemma 1.31**

- 1.) Jede  $\mathbb{Z}^n$ -periodische Funktion  $\vartheta \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$  ist die Periodisierung einer Testfunktion.
- 2.) Jede  $\mathbb{Z}^n$ -periodische Distribution  $\zeta \in \mathcal{Q}(\mathbb{T}^n)$  ist die Periodisierung einer Distribution mit kompaktem Träger.

Es bezeichne  $\mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$  den Raum aller stetigen linearen Funktionale

$$\begin{aligned} \zeta : \mathcal{E}(\mathbb{T}^n) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \langle \varphi, \zeta \rangle_{\mathbb{T}^n}. \end{aligned}$$

Die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n) &\rightarrow \mathcal{Q}(\mathbb{T}^n) \\ \langle \varpi\varphi, \zeta \rangle_{\mathbb{T}^n} &\mapsto \langle \varphi, \zeta \rangle \quad \varphi \in \mathcal{D}, \zeta \in \mathcal{E}' \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{Q}(\mathbb{T}^n) &\rightarrow \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n) \\ \langle \theta\vartheta, \zeta \rangle &\mapsto \langle \vartheta, \zeta \rangle_{\mathbb{T}^n} \quad \vartheta \in \mathcal{E}, \zeta \in \mathcal{Q}, \end{aligned}$$

wobei  $\theta$  eine periodische Teilung der Eins in  $\mathcal{D}$  sei, definieren zwei zueinander inverse Isomorphismen. Man identifiziert daher  $\mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$  mit  $\mathcal{Q}(\mathbb{T}^n)$  und faßt  $\mathcal{Q}(\mathbb{T}^n)$  als topologischen Dualraum zu  $\mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$  auf.

Somit ist für  $\vartheta \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$ ,  $\zeta \in \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$  und  $\theta$  eine periodische Teilung der Eins in  $\mathcal{D}$

$$\langle \vartheta, \zeta \rangle_{\mathbb{T}^n} = \langle \theta \vartheta, \zeta \rangle = \langle \theta \vartheta, \varpi \eta \rangle = \langle \varpi(\theta \vartheta), \eta \rangle$$

wobei  $\zeta = \varpi \eta$  die Periodisierung von  $\eta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  ist. Nach Satz 1.29 ist  $\varpi(\theta \vartheta) = \vartheta$  und somit gilt:

$$\langle \vartheta, \zeta \rangle_{\mathbb{T}^n} = \langle \vartheta, \eta \rangle . \quad (1.19)$$

Ist  $\zeta \in L^1_{\text{loc}} \mathbb{Z}^n$ -periodisch, so kann  $\eta = \chi_{I^n} \zeta$  gewählt werden und es gilt:

$$\langle \vartheta, \zeta \rangle_{\mathbb{T}^n} = \int_{I^n} \vartheta \zeta .$$

### Bemerkung 1.32

Für eine  $\mathbb{Z}^n$ -periodische Funktion  $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$  gilt punktweise die Formel

$$f = \varpi(\chi_{I^n} f) ,$$

d.h. eine solche Funktion  $f$  ist bereits durch ihre Restriktion auf  $\mathbb{T}^n$  festgelegt. Im Gegensatz dazu sind Distributionen i.a. nicht punktweise definiert, zu ihrer Charakterisierung reicht also nicht allein die Restriktion auf  $\mathbb{T}^n$  (vgl. Satz 1.11).

Für  $\zeta \in \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$  und  $\theta$  eine periodische Teilung der Eins in  $\mathcal{D}$  gilt jedoch nach Satz 1.29

$$\varpi(\theta \zeta) = \varpi \theta \cdot \zeta = \zeta ,$$

für Distributionen übernimmt also eine periodische Teilung der Eins in gewissem Sinne die Rolle der charakteristischen Funktion des Einheitsintervalls.

## 1.2.7 Übersicht

Die Abbildung 1.2 zur Veranschaulichung der Beziehungen zwischen den wichtigsten Funktionen- und Distributionenräumen findet sich in ähnlicher Form bei Khoan [Kho72, Vol. 2, CA II].

## 1.3 Fourier-Transformation auf $\mathbb{R}^n$

Die Darstellung der Fourier-Transformation gliedert sich in drei Abschnitte. Der vorliegende Teil konzentriert sich auf die Theorie der Fourier-Integrale über  $\mathbb{R}^n$ , die harmonische Analyse auf dem Torus  $\mathbb{T}^n$  wird im Abschnitt 1.4 behandelt und der letzte Teil 1.5 bietet eine Einführung in die Theorie der Fourier-Transformation auf lokal-kompakten abelschen Gruppen.

Als Quellen für diesen Abschnitt dienten Forster [For84, Kap. 12], Hörmander [Hör83, Kap. VII], Khoan [Kho72, Vol. 2, CB] und Rudin [Rud91, Kap. 7].

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) & \longleftarrow & \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & L_c^p(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) & \longleftarrow & \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n) & \longleftarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & L^p(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) & \longleftarrow & \mathcal{C}'_0(\mathbb{R}^n) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{C}(\mathbb{R}^n) & \longleftarrow & \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) & \longleftarrow & \mathcal{C}'_c(\mathbb{R}^n)
\end{array}$$

**Abbildung 1.2:** Stetige Einbettung  $\hookrightarrow$  der Funktionen- und Distributionenräume (nach Khoan [Kho72, Vol. 2, CA II]). Die Distributionenräume seien jeweils mit der schwachen Topologie versehen.

### 1.3.1 Bemerkungen zur Notation

Bei der Arbeit mit drei verschiedenen Büchern zum Thema ist es wahrscheinlich, daß in jedem der drei die Fourier-Transformation anders definiert wird. Natürlich unterscheiden sich alle nur durch einen Faktor, dieser zieht sich aber durch alle auf der Fourier-Transformation basierenden Berechnungen und kann daher bei geschickter Wahl nachfolgende Darstellungen und Formeln erheblich vereinfachen.

Allgemein hat die Fourier-Transformation einer Funktion  $f$  die Form

$$\mathcal{F}f := \hat{f}(\omega) := \sigma_1 \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\sigma_2 i \omega x} dx \quad \omega \in \mathbb{R}^n$$

mit der Umkehrformel

$$f(x) = \frac{\sigma_2}{2\pi\sigma_1} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\omega) e^{\sigma_2 i x \omega} d\omega \quad x \in \mathbb{R}^n$$

und Konstanten  $\sigma_1, \sigma_2 \neq 0$ .

Die meist im Zusammenhang mit partiellen Differentialgleichungen verwendete Form entspricht den Werten  $\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  und  $\sigma_2 = 1$ , d.h. beide Integrale haben den gleichen Vorfaktor. Diese findet sich z.B. bei Forster [For84, Kap. 12].

Seltener ist die unsymmetrische Definition mit  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ , die z.B. bei Chui [Chu92a] und Vetterli/Kovačević [VK95] verwendet wird.

Unschön bei beiden ist jedoch, daß die Vorfaktoren bei allen Rechnungen mitgeführt werden müssen.

Im vorliegenden Text wird folgende Definition Verwendung finden, die im Kontext der harmonischen Analyse einen Quasi-Standard darstellt:

$$\hat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx \quad \omega \in \mathbb{R}^n$$

mit der Umkehrformel

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x \omega} d\omega \quad x \in \mathbb{R}^n .$$

Mit dieser Definition ist  $\mathcal{F}$  sowohl eine Isometrie auf  $L^2$ , als auch ein komplexer Homomorphismus der Faltungsalgebra auf  $L^1$ :

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2 \quad \text{und} \quad (f * g)\hat{\ } = \hat{f} \hat{g} .$$

Weiterhin hat sie den Vorteil, daß man sich bei der Betrachtung der Periodizitätseigenschaften der Fourier-Transformation in  $\mathbb{Z}^n$  bewegt.

### 1.3.2 Fourier-Transformation in $L^1$ , $\mathcal{S}$ und $\mathcal{D}$

Zur Erinnerung:  $e_\lambda(\cdot) = e^{2\pi i \langle \lambda, \cdot \rangle} \quad \lambda \in \mathbb{R}^n$ .

#### Definition 1.33

Für  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  heißt

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \hat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e_{-\omega}(x) dx \quad \omega \in \mathbb{R}^n$$

die **Fourier-Transformierte** von  $f$ .

#### Satz 1.34

Für  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  gilt:

- 1.) Die Fourier-Transformation vertauscht Translation und Modulation:  
 $(T_b f)\hat{\ } = E_{-b} \hat{f} \quad \text{und} \quad (E_\lambda f)\hat{\ } = T_\lambda \hat{f}$ .
- 2.) Die Fourier-Transformation vertauscht Faltung und Multiplikation:  
 $(f * g)\hat{\ } = \hat{f} \hat{g} \quad \text{und} \quad \hat{f} * \hat{g} = (fg)\hat{\ }.$
- 3.)  $\hat{f}g, f\hat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}g = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g} .$$

4.) Sind  $f, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , so gilt die **Parseval-Identität**:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \bar{\hat{g}}. \quad (1.20)$$

5.) Für die Dilatation gilt:

(i) Für  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$  und  $g = f(\frac{\cdot}{\lambda})$  ist  $\hat{g} = \lambda^n \hat{f}(\lambda \cdot)$ .

(ii) Für  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$  ist  $(f \circ A)^\wedge = |\det A|^{-1} \hat{f}((A^T)^{-1} \cdot)$ .

(iii)  $(D_A^p f)^\wedge = D_{A^T}^q \hat{f}$  für  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

6.) Die Fourier-Transformation vertauscht Differentiation und Multiplikation mit Monomen:

(i) Ist  $id^\alpha f \in L^1$  für alle Multiindizes  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq m$ , so ist  $\hat{f} \in \mathcal{C}^m$  und es gilt  $\partial^\alpha \hat{f} = ((-2\pi i \cdot id)^\alpha f)^\wedge$ .

(ii) Ist  $f \in \mathcal{C}^m$  und  $\partial^\alpha f \in L^1$  für alle Multiindizes  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq m$ , so ist  $id^\alpha \hat{f} \in L^\infty$  und es gilt  $(2\pi i \cdot id)^\alpha \hat{f} = (\partial^\alpha f)^\wedge$ .

Eine Funktion  $f \in L^1$  mit guten Differenzierbarkeitseigenschaften wird also durch die Fourier-Transformation auf eine Funktion  $\hat{f}$  mit raschem Fallverhalten im Unendlichen abgebildet und umgekehrt.

### Satz 1.35 (Riemann-Lebesgue)

Ist  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , so ist  $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$  und es gilt:

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

### Satz 1.36

1.) Ist  $g \in \mathcal{S}$ , so ist

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\omega) e_x(\omega) d\omega \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Die Funktion

$$(\overline{\mathcal{F}} f)(x) := \check{f}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\omega) e_x(\omega) d\omega \quad x \in \mathbb{R}^n$$

heißt daher **Inverse Fourier-Transformierte** von  $f$ .

2.) Die Fourier-Transformation  $\mathcal{F}$  auf  $\mathcal{S}$  ist ein topologischer (d.h. in beide Richtungen stetiger) Automorphismus und  $\overline{\mathcal{F}}$  ist die zu  $\mathcal{F}$  inverse Abbildung.

3.) Sind  $f$  und  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , so gilt:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\omega) e_x(\omega) d\omega \quad x \in \mathbb{R}^n .$$

**Bemerkung 1.37**

Es ist  $\check{f}(x) = \hat{f}(-x)$  und für die Operatoren  $\mathcal{F}$  und  $\overline{\mathcal{F}}$  gilt:

$$\overline{\mathcal{F}}(\bar{f}) = \overline{\mathcal{F}f} \quad \text{für alle } f \in L^1(\mathbb{R}^n) .$$

Nach Satz 1.36 gelten die Umkehrformeln

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}} = id_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} . \quad (1.21)$$

Paley-Wiener-Sätze sind für die Sampling-Theorie ebenso wie im Zusammenhang der Skalierungsfunktionen und Wavelets von außerordentlicher Bedeutung, da sie Charakterisierungen der Mengen der Funktionen bzw. Distributionen liefern, deren Fourier-Transformierte kompakten Träger haben. Diese sog. *bandbeschränkten* Funktionen spielen in Kapitel 2 eine zentrale Rolle.

Sowohl für Funktionen als auch für Distributionen existieren mehrere unterschiedliche Versionen des Satzes von Paley-Wiener. Die in der Literatur geläufigere ist die in den Sätzen 1.38 und 1.48 wiedergegebene Form, die für die ganze Funktion  $f$  eine Wachstumsbeschränkung fordert, die den Imaginärteil des Arguments involviert. Sie kann z.B. bei Dieudonné [Die75, Kap. XXII.18] nachgelesen werden.

Die Formulierung über den Betrag des Arguments, wie sie in den Sätzen 1.40 und 1.49 wiedergegeben ist, findet sich in ähnlicher Form z.B. bei Smith *et al.* [SSW77, S. 1264].

**Satz 1.38 (Paley-Wiener I)**

Sei  $r \in \mathbb{R}_+$ .

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1.)  $f$  ist die Fourier-Transformierte einer Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp } \varphi \subset \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq r\}$ .
- 2.)  $f$  läßt sich auf  $\mathbb{C}^n$  analytisch fortsetzen und für die (wiederum mit  $f$  bezeichnete) Fortsetzung gilt:  $\forall N \in \mathbb{N} \exists C_N \geq 0$  mit

$$|f(z)| \leq C_N (1 + |z|)^{-N} e^{2\pi r |\Im z|} \quad z \in \mathbb{C}^n .$$

Für die Formulierung der zweiten Version des Satzes von Paley-Wiener wird der Begriff des *exponentiellen Typs* einer ganzen Funktion benötigt. Higgins [Hig96, §6.1] gibt einen Überblick über den unterschiedlichen Sprachgebrauch dieses Begriffs, bei Nikol'skiĭ [Nik75, §3.1] findet sich eine Definition für den mehrdimensionalen Fall.

**Definition 1.39**

- 1.) Eine ganze Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **von exponentiellem Typ**, falls Konstanten  $C, \sigma \in \mathbb{R}_+$ ,  $C > 0$  existieren mit

$$|f(z)| \leq C e^{\sigma|z|} \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1.22)$$

$f$  heißt **von exponentiellem Typ kleiner oder gleich  $\sigma \in \mathbb{R}_+$** , falls gilt:  $\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  mit

$$|f(z)| \leq C_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|} \quad z \in \mathbb{C}.$$

- 2.) Eine ganze Funktion  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **von exponentiellem Typ kleiner oder gleich  $\sigma \in \mathbb{R}_+^n$** , falls gilt:  $\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  mit

$$|f(z)| \leq C_\varepsilon e^{\sum_{i=1}^n (\sigma_i + \varepsilon)|z_j|} \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

**Satz 1.40 (Paley-Wiener II)**

Sei  $K_\sigma := \prod_{i=1}^n [-\sigma_i, \sigma_i]$  ein  $n$ -dimensionales kompaktes Intervall im  $\mathbb{R}^n$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1.)  $f$  ist die Fourier-Transformierte einer Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp } \varphi \subset K_\sigma$ .
- 2.)  $f \in \mathcal{S}$  läßt sich auf  $\mathbb{C}^n$  analytisch fortsetzen und die (wiederum mit  $f$  bezeichnete) Fortsetzung ist eine ganze Funktion von exponentiellem Typ kleiner oder gleich  $\sigma$ .

### 1.3.3 Fourier-Transformation in $L^2$ , $\mathcal{S}'$ und $\mathcal{E}'$ .

**Satz 1.41 (Plancherel)**

Es existiert ein eindeutig bestimmter unitärer Automorphismus  $\mathcal{F}_{L^2}$  auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$  mit folgenden Eigenschaften:

- 1.)  $\|\mathcal{F}_{L^2} f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ .
- 2.)  $\mathcal{F}_{L^2} f = \mathcal{F} f \quad \forall f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ .
- 3.)  $\mathcal{F}_{L^2}^{-1} g = \overline{\mathcal{F} g} \quad \forall g \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ .

**Bemerkung 1.42**

1.) Die lineare Abbildung  $\mathcal{F}_{L^2}$  ist durch die Bedingung

$$\mathcal{F}_{L^2} f = \mathcal{F} f \quad \forall f \in \mathcal{S}$$

eindeutig bestimmt. Die Gleichung  $\mathcal{F}_{L^2} f = \mathcal{F} f$  gilt auch noch für  $L^1 \cap L^2$ , denn  $\mathcal{S}$  liegt dicht in  $L^p$  für  $1 \leq p \leq \infty$ . Die Fortsetzung ist also konsistent:  $\mathcal{F}_{L^2}$  ist auf  $L^2$  definiert,  $\mathcal{F}$  ist auf  $L^1$  definiert und  $\mathcal{F}_{L^2} f = \mathcal{F} f$ , falls  $f \in L^1 \cap L^2$ . Man schreibt daher in Vereinfachung der Notation für  $\mathcal{F}_{L^2}$  wieder  $\mathcal{F}$ .

2.) Die Fourier-Transformation auf  $\mathcal{S}$  ist ein topologischer Automorphismus, die Parseval-Identität (1.20) gilt also insbesondere für  $f, g \in \mathcal{S}$  und wegen der dichten Einbettung von  $\mathcal{S}$  in  $L^2$  somit auch für  $f, g \in L^2$ .

**Definition 1.43**

Als **Fourier-Transformation auf  $\mathcal{S}'$**  bezeichnet man die zu  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  duale Abbildung  $\mathcal{F}' : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$  (vgl. Bemerkung 1.10) und schreibt in Vereinfachung der Notation für  $\mathcal{F}'$  wieder  $\mathcal{F}$ .

Für  $\eta \in \mathcal{S}'$  und  $\varphi \in \mathcal{S}$  heißt

$$\langle \varphi, \mathcal{F} \eta \rangle = \langle \varphi, \hat{\eta} \rangle := \langle \hat{\varphi}, \eta \rangle$$

die **Fourier-Transformierte** und

$$\langle \varphi, \overline{\mathcal{F} \eta} \rangle = \langle \varphi, \check{\eta} \rangle := \langle \check{\varphi}, \eta \rangle$$

die **Inverse Fourier-Transformierte** der Distribution  $\eta$ .

Für  $f \in L^p$ ,  $p = 1, 2$  und  $\varphi \in \mathcal{S}$  ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \hat{\varphi} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \varphi.$$

Daher ist  $\mathcal{F}'|_{L^1} = \mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}'|_{L^2} = \mathcal{F}_{L^2}$ , die Definition der Fourier-Transformation auf  $\mathcal{S}'$  ist also verträglich mit den Definitionen für  $L^1$  und  $L^2$ .

**Satz 1.44**

Die Fourier-Transformation  $\mathcal{F}$  auf  $\mathcal{S}'$  ist ein topologischer Automorphismus, der zu  $\mathcal{F}$  inverse Automorphismus ist durch  $\overline{\mathcal{F}}$  gegeben und es gilt analog zu (1.21):

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}} = id_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.23)$$

In Analogie zu Satz 1.34 gilt für die Fourier-Transformation auf  $\mathcal{S}'$  der folgende Satz.

**Satz 1.45**

Seien  $\eta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\zeta \in \mathcal{O}'_C(\mathbb{R}^n)$  und  $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ .

- 1.) Die Fourier-Transformation auf  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  vertauscht Faltung und Multiplikation:

$$(\zeta * \eta)^\wedge = \hat{\eta} \hat{\zeta} \quad , \quad (f\eta)^\wedge = \hat{f} * \hat{\eta} .$$

- 2.) Die Fourier-Transformation auf  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  vertauscht den Raum  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$  der Multiplikatoren für  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  mit dem Raum  $\mathcal{O}'_C(\mathbb{R}^n)$  der Konvolutionen für  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ :

$$\hat{\zeta} \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n) \quad , \quad \hat{f} \in \mathcal{O}'_C(\mathbb{R}^n) .$$

Das folgende Korollar ergibt sich als Spezialfall dieses Satzes.

**Korollar 1.46**

Für  $\varphi \in \mathcal{S}$ ,  $\eta \in \mathcal{S}'$  gilt:

$$(\varphi * \eta)^\wedge = \hat{\varphi} \hat{\eta} \quad \text{und} \quad (\varphi\eta)^\wedge = \hat{\varphi} * \hat{\eta} .$$

Die Paley-Wiener Sätze 1.38 und 1.40 lassen sich auf Distributionen verallgemeinern. Der Spezialfall  $f \in L^2$  wird in Kapitel 2 häufig benötigt und daher gesondert betrachtet.

**Satz 1.47 (Paley-Wiener für  $L^2$ )**

Sei  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  und  $K_\sigma$  wie in Satz 1.40 definiert. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1.)  $f$  ist die Fourier-Transformierte einer Funktion mit Träger in  $K_\sigma$ .
- 2.)  $f$  läßt sich auf  $\mathbb{C}^n$  analytisch fortsetzen und die (wiederum mit  $f$  bezeichnete) Fortsetzung ist eine ganze Funktion von exponentiellem Typ kleiner oder gleich  $\sigma$ .

**Satz 1.48 (Paley-Wiener-Schwartz I)**

Sei  $r \in \mathbb{R}_+$ .

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1.)  $f$  ist die Fourier-Transformierte einer Distribution  $\eta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp } \eta \subset \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq r\}$ .
- 2.)  $f$  läßt sich auf  $\mathbb{C}^n$  analytisch fortsetzen und für die (wiederum mit  $f$  bezeichnete) Fortsetzung gilt:  $\exists N \in \mathbb{N}$ ,  $c \geq 0$  mit

$$|f(z)| \leq c(1 + |z|)^N e^{2\pi r |\Im z|} \quad z \in \mathbb{C}^n .$$

**Satz 1.49 (Paley-Wiener-Schwartz II)**

Sei  $K_\sigma$  wie in Satz 1.40 definiert. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1.)  $f$  ist die Fourier-Transformierte einer Distribution  $\eta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp } \eta \subset K_\sigma$ .
- 2.)  $f \in \mathcal{O}_M$  läßt sich auf  $\mathbb{C}^n$  analytisch fortsetzen und die (wiederum mit  $f$  bezeichnete) Fortsetzung ist eine ganze Funktion von exponentiellem Typ kleiner oder gleich  $\sigma$ .

Insbesondere gilt also für die Fourier-Transformierte  $\hat{\eta}$  einer Distribution  $\eta \in \mathcal{E}'$ :  $\hat{\eta} \in \mathcal{E}$  und  $\hat{\eta}$  ist langsam wachsend.

**Beispiel 1.50**

Sei  $\alpha$  ein Multiindex,  $b \in \mathbb{R}^n$ .

- 1.)  $\hat{\delta} = 1$ ,  $\hat{\delta}_b = e_{-b}$ ,  $(\partial^\alpha \delta)^\wedge = (2\pi i \cdot id)^\alpha$ .
- 2.)  $\mathcal{F}(1) = \delta$ ,  $\hat{e}_b = \delta_b$ ,  $((-2\pi i \cdot id)^\alpha)^\wedge = \partial^\alpha \delta$ .

**1.4 Fourier-Transformation auf  $\mathbb{T}^n$  und  $\mathbb{Z}^n$** 

Im folgenden wird die Theorie der Fourier-Transformation auf  $\mathbb{T}^n$  und  $\mathbb{Z}^n$  vorgestellt. Analog zur Diskussion der Fourier-Transformation auf  $\mathbb{R}^n$  im Abschnitt 1.3 werden die Räume  $L^1(\mathbb{T}^n)$ ,  $\mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$ ,  $L^2(\mathbb{T}^n)$  und  $\mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$  sowie die dazu dualen Räume  $\ell^1(\mathbb{Z}^n)$ ,  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ ,  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$  und  $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$  betrachtet.

Wie sich in Abschnitt 1.4.3 zeigen wird, besteht mit der Poisson-Formel ein enger Zusammenhang zwischen der Fourier-Transformation auf dem  $n$ -dimensionalen Torus und jener auf  $\mathbb{R}^n$ , der in vielen Anwendungen ausgenutzt wird.

Ausführliche Darstellungen der harmonischen Analyse auf dem Torus finden sich bei Khoan [Kho72], Schempp/Dreseler [SD80] und Dieudonné [Die75].

**1.4.1 Fourier-Lebesgue-Reihen**

Mit der Notation (vgl. (1.2))

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} := \begin{cases} \left( \int_{\mathbb{T}^n} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup } |f|, & p = \infty \end{cases} \quad (1.24)$$

sei  $L^p(\mathbb{T}^n)$  der Banach-Raum aller  $\mathbb{Z}^n$ -periodischen Funktionen  $f$  mit  $\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} < \infty$ .

Da  $\mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$  für  $1 \leq p < \infty$  in  $L^p(\mathbb{T}^n)$  dicht liegt, lassen sich nach dem Weierstraß'schen Approximationssatz Funktionen  $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$  mittels der Exponentiale  $\{e_k(\cdot); k \in \mathbb{Z}^n\}$  beliebig genau approximieren (vgl. Young [You80, S. 20]):

**Satz 1.51**

Das trigonometrische System  $\{e_k(\cdot); k \in \mathbb{Z}^n\}$  ist total in  $L^p(\mathbb{T}^n)$  für  $1 \leq p < \infty$ , d.h. der von den  $e_k$  aufgespannte lineare Raum liegt dicht in  $L^p$   $1 \leq p < \infty$ .

Für  $1 < p < \infty$  bildet das Trigonometrische System sogar eine Basis des  $L^p(\mathbb{T}^n)$ , vgl. Marti [Mar69, §III.7, Th. 8]. Interessanterweise gilt dies im Falle des  $L^2(\mathbb{T}^n)$  auch noch für das „leicht gestörte“ Trigonometrische System  $\{e_{t_k}; |t_k - k| \leq L < \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}^n\}$  (vgl. Young [You80, Kap. 1, Th. 14], siehe auch den Abschnitt 2.1.2).

**Lemma 1.52**

Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt, so folgt aus der Hölder-Ungleichung für  $1 \leq q \leq p \leq \infty$ :

$$L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$$

und diese Einbettung ist stetig. Insbesondere ist also

$$L^p(\mathbb{T}^n) \subseteq L^q(\mathbb{T}^n) \quad 1 \leq q \leq p \leq \infty .$$

Die für  $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$  gültigen Aussagen gelten somit auch für  $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ ,  $1 < p \leq \infty$ .

**Definition 1.53**

Sei  $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$   $\mathbb{Z}^n$ -periodisch, so heißt

$$c_k(f) := \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e_{-k}(x) dx \quad k \in \mathbb{Z}^n$$

der  $k$ -te **Fourier-Koeffizient** von  $f$ .

Die Reihe

$$R_f := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(f) e_k$$

heißt **Fourier-(Lebesgue)-Reihe** von  $f$ .

**Bezeichnung 1.54**

1.) Eine Folge  $(c_k)$  heißt **rasch fallend**, falls

$$(k^\alpha c_k) \in \ell^1(\mathbb{Z}^n)$$

für alle Multiindizes  $\alpha$  gilt. Der Raum aller rasch fallenden Folgen wird (in Anlehnung an den Schwartz-Raum) mit  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$  bezeichnet.

- 2.)  $\mathcal{C}_0(\mathbb{Z}^n)$  bezeichne den Raum aller im Unendlichen verschwindenden Folgen:

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{Z}^n) := \{c : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}; \lim_{|k| \rightarrow \infty} |c_k| = 0\}.$$

Es ist  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{Z}^n)$ .

**Lemma 1.55 (Riemann-Lebesgue)**

Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} : f &\mapsto (c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}^n} \\ \overline{\mathcal{F}}_{\mathbb{T}^n} : f &\mapsto (c_{-k}(f))_{k \in \mathbb{Z}^n} \end{aligned} \quad (1.25)$$

bilden  $L^1(\mathbb{T}^n)$  stetig, linear und injektiv nach  $\mathcal{C}_0(\mathbb{Z}^n)$  ab und es gilt:

$$\|\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} f\|_{\infty} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}.$$

$\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}$  heißt **Fourier-Transformation** auf  $\mathbb{T}^n$  und  $\overline{\mathcal{F}}_{\mathbb{T}^n}$  heißt **Inverse Fourier-Transformation** auf  $\mathbb{T}^n$ .

**Bemerkung 1.56**

Die Injektivität der Fourier-Transformation bedeutet, daß eine Funktion  $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$  durch ihre Fourier-Koeffizienten bereits eindeutig bestimmt ist, auch wenn sie nicht durch ihre Fourier-Reihe dargestellt wird.

**Definition 1.57**

Für eine Folge  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$  betrachtet man die formale Reihe

$$m = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e_{-k}(\cdot). \quad (1.26)$$

$m$  heißt **Symbol** der  $(c_k)$ . Für  $(c_k) \in \ell^1(\mathbb{Z}^n)$  ist  $m \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^n) \subset L^1(\mathbb{T}^n)$ . Man definiert daher die Abbildungen  $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n}, \overline{\mathcal{F}}_{\mathbb{Z}^n} : \ell^1(\mathbb{Z}^n) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{T}^n)$  mit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n} : (c_k) &\mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e_{-k} \\ \overline{\mathcal{F}}_{\mathbb{Z}^n} : (c_k) &\mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e_k \end{aligned} \quad (1.27)$$

als **Fourier-Transformation** bzw. **Inverse Fourier-Transformation** auf  $\mathbb{Z}^n$ .

Für das Bild von  $L^1(\mathbb{T}^n)$  unter der Fourier-Transformation  $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}$  hat man keine einfache Beschreibung. Von Interesse sind also insbesondere jene Räume, für die die Abbildungen  $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}$  und  $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n}$  zwei zueinander inverse topologische Isomorphismen sind.

**Satz 1.58 (Fourier-Transformation auf  $\mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$ )**

1.) Die Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} : \mathcal{E}(\mathbb{T}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$$

ist ein topologischer Isomorphismus.

2.) Für alle  $(c_k) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$  konvergiert das Symbol der  $(c_k)$  im Sinne der Topologie von  $\mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$  (der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz einschließlich aller Ableitungen) gegen eine Funktion  $g \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$ . Die Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$$

ist ebenfalls ein topologischer Isomorphismus.

3.) Analog zu (1.21) gelten folgende Umkehrformeln:

$$\overline{\mathcal{F}}_{\mathbb{T}^n} \circ \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n} = id_{\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)} \quad \text{und} \quad \overline{\mathcal{F}}_{\mathbb{Z}^n} \circ \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} = id_{\mathcal{E}(\mathbb{T}^n)}. \quad (1.28)$$

**Satz 1.59 (Fourier-Transformation auf  $L^2(\mathbb{T}^n)$ )**

1.) Die Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} : L^2(\mathbb{T}^n) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^n)$$

bildet  $L^2(\mathbb{T}^n)$  isomorph und isometrisch auf  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$  ab und es gilt die Parseval-Identität:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} = \|\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} f\|_{\ell^2}.$$

2.) Für alle  $(c_k) \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$  konvergiert das Symbol der  $(c_k)$  in der Norm von  $L^2(\mathbb{T}^n)$  gegen eine Funktion  $g \in L^2(\mathbb{T}^n)$ . Die Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n} : \ell^2(\mathbb{Z}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{T}^n)$$

bildet  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$  isomorph und isometrisch auf  $L^2(\mathbb{T}^n)$  ab.

3.) Es gelten die Fourier-Umkehrformeln:

$$\overline{\mathcal{F}}_{\mathbb{T}^n} \circ \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n} = id_{\ell^2(\mathbb{Z}^n)} \quad \text{und} \quad \overline{\mathcal{F}}_{\mathbb{Z}^n} \circ \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} = id_{L^2(\mathbb{T}^n)}. \quad (1.29)$$

## 1.4.2 Fourier-Schwartz-Reihen

### Definition 1.60

Sei  $\eta \in \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$   $\mathbb{Z}^n$ -periodisch, so heißt

$$c_k(\eta) := \langle e_{-k}, \eta \rangle_{\mathbb{T}^n}$$

der  **$k$ -te Fourier-Koeffizient** von  $\eta$ .

Die Reihe

$$R_f := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(\eta) e_k$$

heißt **Fourier-(Schwartz)-Reihe** von  $\eta$ .

Analog zu (1.25) definiert man für  $\eta \in \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$  die

**Fourier-Transformation** und **Inverse Fourier-Transformation** auf  $\mathbb{T}^n$ .

### Bezeichnung 1.61

Eine Folge  $(c_k)$  heißt **temperiert**, falls  $m \in \mathbb{N}^*$  existiert mit

$$\left( \frac{c_k}{(1 + |k|^2)^m} \right) \in \ell^1(\mathbb{Z}^n).$$

Vorläufig bezeichne  $r(\mathbb{Z}^n)$  den Raum aller temperierten Folgen. Ist  $(b_k) \in r(\mathbb{Z}^n)$ ,  $(c_k) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ , so konvergiert  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k c_k$  absolut, die Abbildung

$$\begin{aligned} C : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (c_k) &\mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k c_k \end{aligned}$$

ist ein lineares Funktional auf  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$  und die Abbildung  $(b_k) \mapsto C$  ist bijektiv. Man identifiziert daher  $r(\mathbb{Z}^n)$  mit dem topologischen Dualraum zu  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$  und bezeichnet den Raum der temperierten Folgen mit  $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ .

### Satz 1.62 (Fourier-Transformation auf $\mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$ )

1.) Die Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} : \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$$

ist ein topologischer Isomorphismus.

2.) Für alle  $(c_k) \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$  konvergiert das Symbol der  $(c_k)$  im Sinne der schwachen Topologie auf  $\mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$  gegen eine Distribution  $\eta \in \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$ . Man definiert daher analog zu (1.27) die **Fourier-Transformation** bzw. **Inverse Fourier-Transformation** auf  $\mathbb{Z}^n$ . Die Abbildung

$$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n} : \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n) \rightarrow \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$$

ist ebenfalls ein topologischer Isomorphismus.

3.) Es gelten die Fourier-Umkehrformeln:

$$\overline{\mathcal{F}}_{\mathbb{T}^n} \circ \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n} = id_{\mathcal{D}'(\mathbb{Z}^n)} \quad \text{und} \quad \overline{\mathcal{F}}_{\mathbb{Z}^n} \circ \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} = id_{\mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)}. \quad (1.30)$$

### Bemerkung 1.63

Analog zum  $L^1$ -Fall (vgl. Bemerkung 1.56) ist auch eine Distribution  $\eta \in \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$  durch ihre Fourier-Koeffizienten eindeutig bestimmt und wird durch ihre Fourier-Reihe dargestellt.

### 1.4.3 Poisson-Formel

In diesem Abschnitt soll der Zusammenhang zwischen den Fourier-Transformationen auf  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{T}^n$  näher untersucht werden. Dazu ist es notwendig, aus einer auf  $\mathbb{R}^n$  definierten Funktion (Distribution) eine  $\mathbb{Z}^n$ -periodische Funktion (Distribution) zu konstruieren.

In (1.17) wurde die Periodisierung einer Testfunktion eingeführt. Für  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  ist  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} T_k \varphi =: \varpi \varphi \in \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$ . Nach Lemma 1.31 ist jede  $\mathbb{Z}^n$ -periodische Funktion  $\vartheta \in \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$  die Periodisierung einer Testfunktion und jede  $\mathbb{Z}^n$ -periodische Distribution  $\zeta \in \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$  die Periodisierung einer Distribution  $\eta$  mit kompaktem Träger. Insbesondere gilt für  $\mathbb{Z}^n$ -periodische Funktionen  $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ : Ist  $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ , so ist  $f \chi_{I^n} \in L^p$ , hat kompakten Träger und es gilt  $f = \varpi(f \chi_{I^n})$ .

Die Fourier-Transformation liefert jedoch noch einen anderen Weg,  $\mathbb{Z}^n$ -periodische Funktionen (Distributionen) zu konstruieren. Ist z.B.  $f \in \mathcal{S}$ , so ist auch  $\hat{f} \in \mathcal{S}$ . Die Einschränkung von  $\hat{f}$  auf  $\mathbb{Z}^n$  liefert daher eine rasch fallende Folge  $(\hat{f}_k) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ , deren Symbol nach Satz 1.58 gegen eine  $\mathbb{Z}^n$ -periodische Funktion  $\tilde{f} \in \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$  konvergiert.

Die *Poisson-Formel* besagt im wesentlichen, daß beide Wege – wenn sie gangbar sind – zum gleichen Ergebnis führen.

### Satz 1.64

Sei  $f \in L^1$ , so gilt:

- 1.)  $\varpi f := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(\cdot - k)$  konvergiert fast überall absolut und besitzt eine Majorante in  $L^1(\mathbb{T}^n)$ .
- 2.)  $\varpi f \in L^1(\mathbb{T}^n)$  und  $\|\varpi f\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \leq \|f\|_1$ .
- 3.) Für den  $k$ -ten Fourier-Koeffizienten von  $\varpi f$  gilt:  $c_k = \hat{f}(k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^n$ .

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \text{Zu 3.)} \quad c_k(\varpi f) &= \int_{\mathbb{T}^n} (\varpi f)(x) e_{-k}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} T_k f(x) \right) e_{-k}(x) dx . \end{aligned}$$

Nach 1.) hat  $\varpi f$  eine Majorante in  $L^1(\mathbb{T}^n)$ , mit dem Satz von Lebesgue folgt daher

$$\begin{aligned} c_k(\varpi f) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{T_k I^n} f(x) e_{-k}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e_{-k}(x) dx \\ &= \hat{f}(k) . \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Identifikation von  $\mathbb{T}^n$  mit  $I^n$  benutzt (vgl. Kapitel 1.2.6) sowie die Tatsache, daß  $I^n$  die Voronoi-Zelle des Gitters  $\mathbb{Z}^n$  in  $\mathbb{R}^n$  ist (siehe Definition 2.47). □

Damit folgt unmittelbar:

**Satz 1.65**

Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  mit folgenden Eigenschaften:

- 1.)  $\varpi f$  ist stetig auf  $\mathbb{R}^n$ .
- 2.) Für die Folge  $(\hat{f}(k))$  (d.h. die Folge der Fourier-Koeffizienten von  $\varpi f$ ) gilt  $(\hat{f}(k)) \in \ell^1$ .

Dann gilt für  $f$  die **Poisson-Formel**

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e_k(x) \quad (1.31)$$

punktweise für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Satz 1.66**

- 1.) Ist  $f \in L^2$  mit  $\text{supp } f$  kompakt, so ist  $\varpi f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ . Die Fourier-Koeffizienten  $(c_k)$  von  $\varpi f$  bilden nach Satz 1.59 eine in  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$  konvergente Folge. Die Reihe  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e_k$  ist daher die Inverse Fourier-Transformierte der  $(c_k)$  und aufgrund der Fourier-Umkehrformel (1.29)

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{E}(\mathbb{T}^n) & \hookrightarrow & \mathcal{C}(\mathbb{T}^n) & \hookrightarrow & L^2(\mathbb{T}^n) & \hookrightarrow & L^1(\mathbb{T}^n) & \hookrightarrow & \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n) \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) & \hookrightarrow & \ell^1(\mathbb{Z}^n) & \hookrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}^n) & \hookrightarrow & \mathcal{C}_0(\mathbb{Z}^n) & \hookrightarrow & \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)
\end{array}$$

**Abbildung 1.3:** Stetige Einbettung  $\hookrightarrow$  der Funktionen- und Distributionenräume der Fourier-Transformation auf  $\mathbb{T}^n$  und  $\mathbb{Z}^n$ . Die mit  $\updownarrow$  verbundenen Räume werden isomorph aufeinander abgebildet. Die Distributionenräume seien jeweils mit der schwachen Topologie versehen.

gilt die Poisson-Formel in  $L^2(\mathbb{T}^n)$ . Da die Fourier-Reihe einer Funktion  $\vartheta \in L^2(\mathbb{T}^n)$  sogar punktweise fast überall gegen  $\vartheta$  konvergiert (vgl. Schempp/Dreseler [SD80, §I.11.5]), gilt die Poisson-Formel auch punktweise für fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .

- 2.) Ist  $\eta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ , so ist  $\varpi\eta \in \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$ . Die Fourier-Koeffizienten  $(c_k)$  von  $\varpi\eta$  bilden nach Satz 1.62 eine temperierte Folge. Die Reihe  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e_k$  konvergiert daher in der schwachen Topologie gegen eine Distribution  $\zeta \in \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$ , ist also die Inverse Fourier-Transformierte der  $(c_k)$  und aufgrund der Fourier-Umkehrformel (1.30) gilt die Poisson-Formel in  $\mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$ .

#### 1.4.4 Übersicht

Die Abbildung 1.3 veranschaulicht die Beziehungen zwischen den im Zusammenhang der harmonischen Analyse auf dem Torus wichtigen Funktionen- und Distributionenräumen.

### 1.5 Fourier-Transformation auf LCA-Gruppen

Die in den vorangegangenen beiden Kapiteln entwickelte Theorie der Fourier-Transformation auf  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{Z}^n$  läßt sich als Spezialfall der allgemeineren Theorie der Fourier-Transformation auf lokal-kompakten abelschen Gruppen auffassen. Diese Verallgemeinerung wird im Zusammenhang mit  $n$ -dimensionalen Gittern (vgl. Kapitel 2.B) benötigt und soll daher kurz vorgestellt werden. Eine ausführlichere Abhandlung dieser Thematik bieten Rudin [Rud62] und Schempp/Dreseler [SD80].

**Definition 1.67**

Sei  $G$  eine (multiplikativ geschriebene) abelsche Gruppe.  $G$  heißt **topologische Gruppe**, falls gilt:

- 1.)  $G$  trägt eine Topologie, die  $G$  zu einem Hausdorff-Raum macht.
- 2.) Die Abbildung  $(x, y) \mapsto xy$  des mit der Produkttopologie versehenen Raumes  $G \times G$  auf  $G$  ist stetig.

Ist die Topologie auf  $G$  lokal-kompakt, so heißt  $G$  **lokal-kompakte abelsche Gruppe**.

**Definition 1.68**

Als **Charakter** einer Gruppe  $G$  bezeichnet man einen Homomorphismus  $\chi$  von  $G$  in die (multiplikative) Gruppe  $\mathbb{U}$  der komplexen Zahlen vom Betrag 1:  $\chi : G \rightarrow \mathbb{U}$  mit

- 1.)  $|\chi(g)| = 1 \quad g \in G$ .
- 2.)  $\chi(g_1 g_2) = \chi(g_1) \chi(g_2)$ .

Man unterscheidet diskrete Gruppen wie z.B.  $(\mathbb{Z}, +)$  und kontinuierliche Gruppen wie z.B.  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, + \text{ mod } 1)$ . Im Falle kontinuierlicher Gruppen fordert man zusätzlich, daß ein Charakter eine auf  $G$  stetige Funktion sei.

Die Menge der Charaktere von  $G$  bildet mit der Verknüpfung  $\chi_1 \chi_2(g) = \chi_1(g) \chi_2(g)$ ,  $g \in G$  selbst eine abelsche Gruppe mit dem Einselement  $\chi(g) = 1 \quad \forall g \in G$ , die mit  $\hat{G}$  bezeichnet wird. Versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von  $G$ , der *Topologie der kompakten Konvergenz*, ist  $\hat{G}$  ebenfalls eine lokal-kompakte abelsche Gruppe.

**Definition 1.69**

Sei  $G$  eine lokal-kompakte abelsche Gruppe, so heißt  $\hat{G}$ , versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz, die zu  $G$  **duale Gruppe**.

Das Dual der Dualgruppe einer lokal-kompakten abelschen Gruppe  $G$ , das sog. **Bidual**  $\hat{\hat{G}}$ , läßt sich nach dem Satz von Pontryagin-van Kampen [SD80, Th. V.5.3] mit  $G$  identifizieren.

An dieser Stelle fügt sich ein Resultat über Charaktersummen ein, das in Kapitel 3 benötigt wird und daher mit Beweis angegeben wird.

**Satz 1.70**

Sei  $G$  eine endliche abelsche Gruppe und  $\chi$  ein Charakter von  $G$ . Dann gilt:

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} |G|, & \chi(g) = 1 \quad \forall g \in G \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

**Beweis:**

Ist  $\chi(g) = 1 \quad \forall g \in G$ , so ist trivialerweise  $\sum_{g \in G} \chi(g) = |G|$ .

Sei  $h \in G$ . Dann gilt

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(gh) = \chi(h) \sum_{g \in G} \chi(g).$$

Somit ist

$$(1 - \chi(h)) \sum_{g \in G} \chi(g) = 0$$

für beliebiges  $h \in G$ . Existiert also ein  $h \in G$  mit  $\chi(h) \neq 1$ , so ist der erste Faktor  $\neq 0$  und somit muß  $\sum_{g \in G} \chi(g) = 0$  gelten. □

**Satz 1.71 (z.B. [SD80, Th. 2.8])**

- 1.) Die Exponentiale  $\{e_k; k \in \mathbb{Z}^n\}$  sind genau die Charaktere von  $\mathbb{T}^n$ . Es ist also  $\hat{\mathbb{T}}^n = \{e_k; k \in \mathbb{Z}^n\}$ .
- 2.) Die Exponentiale  $\{e_\lambda; \lambda \in \mathbb{R}^n\}$  sind genau die Charaktere von  $\mathbb{R}^n$ . Da die Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $e_\lambda \mapsto \lambda$  ein Isomorphismus ist, ist  $\mathbb{R}^n$  selbst-dual:  $\hat{\mathbb{R}}^n \simeq \mathbb{R}^n$ .

**Satz 1.72 (z.B. [Rud62, Th. 1.2.5])**

- 1.) Ist  $G$  diskret, so ist  $\hat{G}$  kompakt.
- 2.) Ist  $G$  kompakt, so ist  $\hat{G}$  diskret.

**Definition 1.73**

Sei  $G$  eine lokal-kompakte abelsche Gruppe,  $\hat{G}$  die zu  $G$  duale Gruppe und  $\mu$  das Haar-Maß auf  $G$ , d.h. das bis auf einen Faktor eindeutig bestimmte translationsinvariante Maß auf  $G$ . Dann heißt für  $f \in L^1(G, \mu)$

$$(\mathcal{F}_G f)(\chi) = \hat{f}(\chi) := \int_G f(g) \overline{\chi(g)} d\mu(g) \quad \chi \in \hat{G} \quad (1.32)$$

die **Fourier-Transformierte** von  $f$  und

$$(\overline{\mathcal{F}_G f})(\chi) = \check{f}(\chi) := \int_G f(g)\chi(g)d\mu(g) \quad \chi \in \hat{G} \quad (1.33)$$

die **Inverse Fourier-Transformierte** von  $f$ .

**Satz 1.74 (Fourier-Umkehrformel)**

Sei  $G$  eine LCA-Gruppe mit Haar-Maß  $\mu$ ,  $\hat{G}$  die zu  $G$  duale Gruppe und  $\hat{\mu}$  das Haar-Maß auf  $\hat{G}$ . Ferner sei  $f \in L^1(G, \mu)$  und  $\hat{f} \in L^1(\hat{G}, \hat{\mu})$ . Dann läßt sich  $\hat{\mu}$  derart normieren, daß die Umkehrformel

$$f = \overline{\mathcal{F}_{\hat{G}} \hat{f}}$$

gilt.

Es gelten die für die Fourier-Transformation bekannten Eigenschaften:

1.) **Riemann-Lebesgue**

Die Fourier-Transformation  $\mathcal{F}_G$  bildet  $L^1(G, \mu)$  in  $\mathcal{C}_0(\hat{G})$  ab und es gilt:

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

2.) **Plancherel**

Bei geeigneter Normierung von  $\mu$  und  $\hat{\mu}$  bildet die Fourier-Transformation  $L^2(G, \mu)$  isometrisch und isomorph auf  $L^2(\hat{G}, \hat{\mu})$  ab.

3.) **Parseval-Identität**

Für  $f, g \in L^2(G, \mu)$  ist

$$\int_G f\bar{g}d\mu = \int_{\hat{G}} \hat{f}\overline{\hat{g}}d\hat{\mu}.$$

4.) Die Fourier-Transformation vertauscht Faltung und Multiplikation:

$$\hat{f} * \hat{g} = (\widehat{fg}).$$

**Satz 1.75 (Poisson-Formel, [Die75, Th. 22.12.3])**

Sei  $G$  eine LCA-Gruppe mit Haar-Maß  $\mu_G$ ,  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$  mit Haar-Maß  $\mu_H$ . Es bezeichne  $H^\perp$  die Gruppe der auf  $H$  trivialen Charaktere von  $G$  mit Haar-Maß  $\mu_{H^\perp} : H^\perp := \{\chi \in \hat{G}; \chi(g) = 1 \forall g \in H\}$ .  $H^\perp$  heißt die zu  $H$  **orthogonale** Gruppe und ist isomorph zur dualen Gruppe von  $G/H$ . Sei  $f \in L^1(G, \mu_G)$  mit folgenden Eigenschaften:

- 1.) Die Einschränkung von  $\mathcal{F}f$  auf  $H^\perp$  ist bezüglich  $\mu_{H^\perp}$  integrierbar.
- 2.) Die Funktion  $x \mapsto f(gx)$  ist auf  $H$  für alle  $g \in G$  bezüglich  $\mu_H$  integrierbar.
- 3.) Die Funktion  $g \mapsto \int_H f(gx)d\mu_H$  ist stetig in  $G$ .

Dann gilt für  $f$  die Poisson-Formel:

$$\int_H f d\mu_H = \int_{H^\perp} \mathcal{F}f d\mu_{H^\perp} . \quad (1.34)$$

**Bemerkung 1.76**

Für  $G = \mathbb{R}^n$  und  $H = \mathbb{Z}^n$  erhält man aus (1.34) den Spezialfall

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k)$$

der Poisson-Formel (1.31), denn  $H^\perp$  ist isomorph zur dualen Gruppe von  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n$  und  $\hat{\mathbb{T}}^n = \{e_k; k \in \mathbb{Z}^n\}$ .

## KAPITEL 2

---

# Sampling-Theorie

Die *Sampling-Theorie* oder *Abtast-Theorie* ist sicher eine der wichtigsten mathematischen Techniken in der Informations- und Kommunikationstheorie. Ihre Anwendung umfaßt heute viele Bereiche der Physik bzw. der Ingenieurwissenschaften wie z.B. Signalanalyse, Bildverarbeitung, Radar, Sonar, Holographie und Meteorologie. Sie liefert die Verbindung zwischen den natürlicherweise auftretenden analogen Signalen und deren zur Bearbeitung am Computer benötigten Diskretisierungen.

Der Begriff **Signal** wird in der ingenieurwissenschaftlichen Literatur häufig gebraucht. Ein Signal ist im mathematischen Sinne nichts anderes als eine Funktion einer oder mehrerer Variablen, von denen i.d.R. mindestens eine eine Zeitvariable ist. Die Begriffe *Funktion* und *Signal* werden daher synonym verwendet. Man unterscheidet jedoch zwei Arten von Signalen. Häufig wird in der Literatur eine Funktion, deren Definitionsbereich nicht diskret ist, als *continuous-time* Signal bezeichnet. Nach Glassner [Gla95, §4.2.1] ist dieser Begriff jedoch in zweifacher Hinsicht unglücklich gewählt: Ein *continuous-time* Signal ist weder notwendigerweise stetig, noch muß es sich um eine Funktion einer (oder mehrerer) Zeitvariablen handeln, wenngleich das meistens der Fall ist. Ebenfalls verwendet wird die Bezeichnung *analytisches Signal*, doch auch diese ist nicht ganz glücklich, da sie die Bandbeschränktheit des Signals impliziert. Im vorliegenden Text werden daher die Begriffe **kontinuierliches** bzw. **analoges Signal** verwendet.

Im Gegensatz dazu spricht man von *discrete-time* Signalen, wenn deren Definitionsbereich diskret ist. Aus den vorgenannten Gründen sind auch hier die Bezeichnungen **diskretes** bzw. **gesampeltes Signal** trefflicher.

Quasi der Fundamentalsatz der Sampling-Theorie ist das in Kapitel 2.1.1 vorgestellte Sampling-Theorem für bandbeschränkte Funktionen. Es besagt, daß analoge Funktionen mit beschränktem Spektrum ohne Informationsver-

lust diskretisiert und aus ihren diskreten Werten wieder exakt rekonstruiert werden können. Allgemeiner liefert die Sampling-Theorie Aussagen über die exakte oder näherungsweise Rekonstruktion von Funktionen aus diskreten Werten. Diese Werte, die sog. *Samples*, sind oft Meßwerte und müssen nicht notwendigerweise Werte der Funktion selbst sein, sondern können auch die Werte der Ableitungen oder anderer Transformationen sein, wie z.B. der Radon-Transformation im Kontext der Computer-Tomographie [Nat86], [SSW77].

Butzer und Stens [BS92] geben einen Überblick über die historische Entwicklung der Sampling-Theorie mit dem Schwerpunkt auf nicht bandbeschränkten Funktionen. Dort werden die Ursprünge des Sampling-Theorems bis zu der aus dem Jahr 1908 stammenden Arbeit des belgischen Mathematikers Charles-Jean Baron de la Vallée-Poussin (1866-1962) [VP08] zurückverfolgt. Higgins [Hig85] weist darauf hin, daß bereits E. Borel [Bor99] 1899 die später als *Kardinalreihe* bezeichnete Form der Sampling-Reihe verwendete. Jedenfalls erwachsen die Anfänge der Sampling-Theorie aus dem Studium von Problemen der Interpolation und Approximation. Über die Sätze von Paley-Wiener ergeben sich auch enge Verbindungen zur Theorie der ganzen Funktionen. Erst in den späten Sechziger Jahren lebte das Interesse an der Sampling-Theorie wieder auf und die meisten der in Abschnitt 2.1.2 diskutierten Verallgemeinerungen datieren nach dieser Zeit.

Das Kapitel gliedert sich im wesentlichen in zwei Teile. Im Abschnitt 2.1 wird die eindimensionale Sampling-Theorie entwickelt: Paragraph 2.1.1 enthält das Sampling-Theorem für bandbeschränkte Funktionen, das *Whittaker-Shannon-Kotel'nikov Theorem*, sowie Ausführungen zum Over- und Under-sampling. Die nachfolgenden Verallgemeinerungen des WSK-Theorems gliedern sich in solche für bandbeschränkte Funktionen in Paragraph 2.1.2 bzw. Resultate für nicht (notwendigerweise) bandbeschränkte Funktionen in Paragraph 2.1.3. Den Abschluß der Betrachtung des eindimensionalen Falls bildet der Unterabschnitt 2.1.4 zur Fehleranalyse. Der sich anschließende Abschnitt 2.2 geht auf die Besonderheiten der mehrdimensionalen Sampling-Theorie ein. Paragraph 2.2.1 enthält die Definition der Bandbeschränktheit in höheren Dimensionen sowie die  $n$ -dimensionale Verallgemeinerung des WSK-Theorems, den Satz von Parzen. Die verbleibenden Unterabschnitte 2.2.2 und 2.2.3 diskutieren die Fälle regulären bzw. irregulären Samplings.

In einem dreiteiligen Anhang finden sich schließlich kurze Einführungen in Themengebiete, die zwar für die Sampling-Theorie von Bedeutung sind, ihr aber nicht direkt zuzuordnen sind. Dazu zählen eine Zusammenstellung der Eigenschaften der sinc-Funktion in Anhang 2.A, Grundbegriffe aus der Gittertheorie in 2.B und eine kurze Einführung in den Themenkreis der Selbst-

affinen Mengen im Anhang 2.C. Insbesondere die letzten beiden Abschnitte sind auch für das nachfolgende Kapitel 3 von großer Bedeutung, so daß oft auf sie verwiesen werden wird.

## 2.1 Eindimensionale Sampling-Theorie

### 2.1.1 Das WSK Sampling-Theorem für bandbeschränkte Funktionen

Der Fundamentalsatz der Sampling-Theorie, das Sampling-Theorem für bandbeschränkte Funktionen, besagt, daß eine Funktion  $f$  einer Variablen, deren Spektrum keine Frequenzen vom Betrag größer als  $\omega$  enthält, durch ihre diskreten Werte an Punkten des Abstands  $\frac{1}{2\omega}$  vollständig bestimmt ist und aus diesen rekonstruiert werden kann.

Obwohl dieser Satz allgemein als das *Shannon-Theorem* bekannt ist, besteht fast weltweites Einverständnis darüber, daß er zuerst im Jahr 1915 von E. T. Whittaker entdeckt wurde. Später in 1940 wurde er von C. E. Shannon wiederentdeckt und in der Informationstheorie eingeführt. Ende der Fünfziger Jahre wurde bekannt, daß Shannon's Ergebnis bereits 1933 unabhängig von einem russischen Ingenieur, V. Kotel'nikov, entdeckt wurde. Man bezeichnet diesen fundamentalen Satz daher als *Whittaker-Shannon-Kotel'nikov Sampling-Theorem* oder kurz **WSK-Theorem**.

#### Definition 2.1

Eine Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  heißt **bandbeschränkt**, wenn ihre Fourier-Transformierte  $\hat{f}$  beschränkten und somit kompakten Träger besitzt. Ist  $\text{supp } \hat{f} \subseteq B$ , so heißt  $B$  **Bandregion** von  $f$ . Speziell sei für  $\omega \in \mathbb{R}_+^*$

$$V_\omega := \{f \in L^2; \text{supp } \hat{f} \subseteq [-\omega, \omega]\}$$

die Menge der  **$\omega$ -bandbeschränkten** Funktionen. Für eine bandbeschränkte Funktion  $f$  heißt  $\sup_{x \in \text{supp } \hat{f}} |x|$  **Bandbreite** von  $f$ .

Nicht ganz grundlos ist hier der Fall einer zum Nullpunkt symmetrischen Bandregion vor anderen ausgezeichnet. Da man in erster Linie an reellwertigen Funktionen interessiert ist, kann  $\bar{f} = f$  angenommen werden. Dann ist nach Bemerkung 1.37  $\hat{f}(-\cdot) = \check{f} = \bar{\check{f}} = \tilde{\hat{f}}$  und daher  $|\hat{f}| = |\hat{f}(-\cdot)|$ , d.h. in diesem Fall ist der Träger von  $\hat{f}$  notwendigerweise symmetrisch zum Nullpunkt.

Wir betrachten in diesem Abschnitt zunächst bandbeschränkte Funktionen mit einem zum Nullpunkt symmetrischen Intervall als Bandregion. Allgemei-

nerer Fälle wie *Band-Pass* bzw. *Multi-Band Funktionen* werden im nachfolgenden Abschnitt 2.1.2 diskutiert.

**Satz 2.2 (WSK-Theorem)**

Sei  $f \in V_\omega$ . Dann ist

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2\omega}\right) \frac{\sin \pi(2\omega x - k)}{\pi(2\omega x - k)} \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

und die Reihe konvergiert in  $L^2(\mathbb{R})$ , absolut und lokal gleichmäßig.

**Bemerkung 2.3**

- 1.) Ist  $f \in V_\omega$ , so sind definitionsgemäß  $f$  und  $\hat{f} \in L^2$ . Da  $\hat{f} = \hat{f} \cdot \chi_{[-\omega, \omega]}$  ist nach Cauchy-Schwarz dann auch  $\hat{f} \in L^1$ , d.h. nach Satz 1.35 ist  $f$  stetig und  $f\left(\frac{k}{2\omega}\right)$  ist für alle  $k \in \mathbb{Z}$  definiert.
- 2.) Reihen der Form  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \frac{\sin \pi(\cdot - k)}{\pi(\cdot - k)}$  werden nach J.M. Whittaker als *Kardinalreihen* bezeichnet [Zay93, S. 19].
- 3.) Die Konvergenz der Sampling-Reihe (2.1) ist sogar global gleichmäßig, vgl. Satz 2.20.

**Beweis des Satzes:**

Sei  $f \in V_\omega$ , so ist  $\hat{f} \in L^1 \cap L^2$ , nach Satz 1.64 läßt sich also  $\hat{f}$  periodisieren und für den  $k$ -ten Fourier-Koeffizienten  $c_k := \mathcal{F}_{\mathbb{T}}(\varpi \hat{f})(k)$  gilt:

$$c_k = \hat{\hat{f}}(k) = f(-k).$$

Betrachte die Periodisierung von  $\hat{f}(2\omega \cdot) = \frac{1}{2\omega} \hat{f}\left(\frac{\cdot}{2\omega}\right)$ .

Für deren Fourier-Koeffizienten gilt:

$$c_k = \left(\frac{1}{2\omega} \left(\hat{f}\left(\frac{\cdot}{2\omega}\right)\right)\right)(k) = \frac{1}{2\omega} f\left(\frac{-k}{2\omega}\right). \quad (2.2)$$

Nach Satz 1.66 ist  $\varpi(\hat{f}(2\omega \cdot)) \in L^2(\mathbb{T})$  und es gilt die Poisson-Formel in  $L^2$ , also ist

$$\varpi(\hat{f}(2\omega \cdot)) = \frac{1}{2\omega} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{-k}{2\omega}\right) e_k.$$

Ist  $\text{supp } \hat{f} \subseteq [-\omega, \omega]$ , so ist  $\text{supp } \hat{f}(2\omega \cdot) \subseteq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  und es gilt

$$\hat{f}(2\omega \cdot) = \varpi(\hat{f}(2\omega \cdot)) \chi_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}.$$

Es folgt

$$\hat{f}(2\omega \cdot) = \frac{1}{2\omega} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{-k}{2\omega}\right) e_k \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$$

und aufgrund der Unitarität der Inversen Fourier-Transformation auf  $L^2$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\cdot}{2\omega}\right) &= \frac{1}{2\omega} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{-k}{2\omega}\right) \overline{\mathcal{F}}\left(e_k \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}\right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{-k}{2\omega}\right) \frac{\sin \pi(\cdot + k)}{\pi(\cdot + k)}, \end{aligned}$$

denn nach (2.36) ist  $\frac{\sin \pi \cdot}{\pi} = \tilde{\chi}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$  und nach Satz 1.34 ist  $(T_{-k}g)^\wedge = E_k \hat{g}$ .

Durch Substitution von  $x$  durch  $2\omega x$  sowie von  $k$  durch  $-k$  erhält man schließlich die Darstellung (2.1).

Da  $\hat{f} \in L^2([-\omega, \omega])$ , ist nach Satz 1.59  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(\frac{k}{2\omega})|^2 < \infty$ . Die absolute Konvergenz der Reihe folgt daher mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz. Aufgrund der Inklusion der Räume  $L^p(\Omega)$  für beschränktes  $\Omega \subset \mathbb{R}$  (Lemma 1.52) folgt die gleichmäßige Konvergenz auf Kompakta mit dem Konvergenzkriterium von Weierstraß, da  $f, \text{sinc} \in L^2$ . Die  $L^2$ -Konvergenz der Reihe gegen  $f$  zusammen mit der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta liefert schließlich die punktweise Konvergenz gegen  $f$ . □

Wie der Satz zeigt, ist eine Funktion  $f \in V_\omega$  durch ihre diskreten Werte  $f(\frac{k}{2\omega})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , die sog. **Samples**, eindeutig bestimmt. Die Reihe in (2.1) wird auch als **Sampling-Reihe** bezeichnet. Die **Sampling-Punkte**  $\{\frac{k}{2\omega}, k \in \mathbb{Z}\}$  sind äquidistant, der Kehrwert ihres Abstands heißt **Sampling-Rate**. Für Funktionen, deren Bandregion ein symmetrisch zum Nullpunkt liegendes Intervall ist, ist sie gleich der doppelten Bandbreite. Diese Rate  $2 \sup_{x \in \text{supp } f} |x|$  heißt **Nyquist-Rate** und ist die zur exakten Rekonstruktion einer Funktion  $f \in V_\omega$  notwendige minimale Sampling-Rate (vgl. die Ausführungen zum *Undersampling* weiter unten in diesem Abschnitt).

Führt man für die Sampling-Punkte die Kurzschreibweise  $t_k := \frac{k}{2\omega}$  ein, so läßt sich (2.1) umschreiben in

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t_k) \frac{\sin \pi 2\omega(x - t_k)}{\pi 2\omega(x - t_k)}.$$

Für die Funktion  $\frac{\sin \pi \cdot}{\pi}$  wird allgemein die Bezeichnung **sinc** verwendet. Diese Funktion ist von so fundamentaler Bedeutung, daß sie im Anhang 2.A noch näher untersucht wird. Damit schreibt sich Gleichung (2.1) nun in der Form

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t_k) \text{sinc } 2\omega(x - t_k) \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Hat die Bandregion einer bandbeschränkten Funktion  $f$  die Gestalt eines Intervalls, das nicht symmetrisch zum Nullpunkt liegt, also z.B. des Intervalls  $[x_0 - \omega, x_0 + \omega]$ , so zeigt eine geringfügige Modifikation des Beweises des WSK-Theorems, daß in diesem Fall die Sampling-Reihe folgende Form hat:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2\omega}\right) \operatorname{sinc}(2\omega x - k) e_{x_0}(2\omega x - k) \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Allgemeinere Bandregionen werden in den Abschnitten 2.1.2 und 2.2.2 diskutiert.

Bemerkenswert ist, daß die Sampling-Reihe unabhängig von den tatsächlichen Eigenschaften von  $f$  wie Stetigkeit oder Bandbeschränktheit die Samples  $f(t_k)$  interpoliert. Wegen  $\operatorname{sinc}(k) = \delta_{0,k}$  für  $k \in \mathbb{Z}$  bleibt nämlich für  $x = t_k$  von der Sampling-Reihe lediglich der Summand  $f(t_k)$  stehen. Diese Eigenschaft macht man sich bei der Approximation nicht bandbeschränkter Funktionen durch die Sampling-Reihe zunutze, vgl. Paragraph 2.1.3.

### Oversampling

Für  $\sigma \geq \omega$  ist  $V_\omega \subseteq V_\sigma$ , das WSK-Theorem liefert daher für  $f \in V_\omega$

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2\sigma}\right) \operatorname{sinc}(2\sigma x - k).$$

Wegen

$$\hat{f} = \hat{f} \cdot \chi_{[-\omega, \omega]} \quad (2.5)$$

ist

$$f = f * \tilde{\chi}_{[-\omega, \omega]}.$$

Setzt man

$$h_k := \operatorname{sinc}(2\sigma \cdot -k) \quad \text{und} \quad g := \tilde{\chi}_{[-\omega, \omega]} = 2\omega \operatorname{sinc}(2\omega \cdot),$$

so folgt:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2\sigma}\right) (h_k * g)(x). \quad (2.6)$$

Weiterhin ist mit  $\tilde{t}_k := \frac{k}{2\sigma}$

$$\begin{aligned} (h_k * g)^\wedge &= \hat{h}_k \cdot \hat{g} \\ &= (\operatorname{sinc} 2\sigma(\cdot - \tilde{t}_k))^\wedge \cdot \hat{g} \\ &= e_{-\tilde{t}_k} \frac{1}{2\sigma} \chi_{[-\sigma, \sigma]} \cdot \chi_{[-\omega, \omega]} \\ &\stackrel{\omega \leq \sigma}{=} \frac{1}{2\sigma} e_{-\tilde{t}_k} \chi_{[-\omega, \omega]}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} h_k * g &= \frac{1}{2\sigma} 2\omega \operatorname{sinc} 2\omega(\cdot - \tilde{t}_k) \\ &= \frac{\omega}{\sigma} \operatorname{sinc} 2\omega(\cdot - \tilde{t}_k), \end{aligned}$$

also

$$f(x) = \frac{\omega}{\sigma} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\tilde{t}_k) \operatorname{sinc} 2\omega(\cdot - \tilde{t}_k). \quad (2.7)$$

Setzt man  $r := \frac{\omega}{\sigma}$ , so erhält man schließlich

$$f(x) = r \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(r t_k) \operatorname{sinc} 2\omega(x - r t_k) \quad 0 < r \leq 1. \quad (2.8)$$

Für  $\sigma > \omega$  ist die Sampling-Rate  $2\sigma$  größer als die Nyquist-Rate  $2\omega$ , daher spricht man in diesem Fall von **Oversampling**. Bei Zayed [Zay93, S. 22] heißt  $r$  *sampling rate parameter*. Da die Darstellung (2.8) jedoch nur für oversampelte bzw. exakt gesampelte Funktionen gilt, verwenden wir im folgenden die Bezeichnung **Oversampling-Parameter**. Ist  $r = 1$ , so reduziert sich (2.8) auf (2.3).

Die Samples sind im Falle des Oversampling nicht mehr unabhängig. Für  $0 < r < 1$  gilt nämlich

$$\begin{aligned} f(\tilde{t}_m) &= r \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\tilde{t}_k) \operatorname{sinc} 2\omega(\tilde{t}_m - \tilde{t}_k) \\ &= r f(\tilde{t}_m) + r \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq m}} f(\tilde{t}_k) \operatorname{sinc} r(m - k) \\ &= \frac{r}{1 - r} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq m}} f(\tilde{t}_k) \operatorname{sinc} r(m - k). \end{aligned}$$

Ein oversampeltes Signal kann daher selbst bei Verlust eines Samples aus den verbleibenden Abtastwerten noch exakt rekonstruiert werden. Man kann sogar zeigen, daß diese Aussage auch noch bei Verlust von endlich vielen Samples gültig ist [Mar91].

Oversampling hat noch einen weiteren Vorteil. Die mit Nyquist-Rate gesampelten Werte  $f(t_k)$  sind gemäß (2.2) bis auf einen Faktor die Fourier-Koeffizienten der Periodisierung von  $\hat{f}$ . Für  $f = \operatorname{sinc}(2\omega \cdot)$  ist aber  $f(t_k) = \delta_{0,k}$ , die Sampling-Funktionen sind daher in diesem Falle eindeutig bestimmt, es sind die Translatierten der sinc-Funktion. Diese fällt nur sehr langsam, es ist sogar  $\operatorname{sinc} \notin L^1$  (vgl. Anhang 2.A). *Oversampling* erlaubt es,  $f$  als Linearkombination von besser lokalisierten Funktionen darzustellen. Dadurch

kann z.B. der in vielen praktischen Anwendungen durch Abschneiden der Sampling-Reihe auftretende *Cut-Off Fehler* erheblich verringert werden, vgl. hierzu den Abschnitt 2.1.4 zur Fehleranalyse.

In der Gleichung (2.5)

$$\hat{f} = \hat{f} \cdot \chi_{[-\omega, \omega]}$$

kann man die in den Randpunkten des Intervalls  $[-\omega, \omega]$  unstetige charakteristische Funktion durch eine glattere Funktion  $\hat{\varphi} \in V_\sigma$  mit  $\hat{\varphi} \equiv 1$  auf  $[-\omega, \omega]$  ersetzen. Geeignet ist z.B. die auch bei Daubechies [Dau92, Kap. 2] diskutierte Faltung zweier charakteristischer Funktionen. Sei  $\lambda = \sigma - \omega$  und

$$\hat{\varphi}(\xi) = \left( \chi_{[-\omega - \frac{\lambda}{2}, \omega + \frac{\lambda}{2}]} * \chi_{[-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}]} \right)(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \leq \omega \\ 1 - \frac{|\xi| - \omega}{\lambda}, & \omega \leq |\xi| \leq \sigma \\ 0, & |\xi| \geq \sigma \end{cases} \quad (2.9)$$

Entsprechend der Gleichung (2.5) gilt dann

$$\hat{f} = \hat{f} \cdot \hat{\varphi}$$

und somit

$$f = f * \varphi.$$

Mit (2.6) folgt

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\tilde{t}_k) (h_k * \varphi)(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} (h_k * \varphi)^\wedge &= \hat{h}_k \cdot \hat{\varphi} \\ &= (\text{sinc } 2\sigma(\cdot - \tilde{t}_k))^\wedge \cdot \hat{\varphi} \\ &= e^{-i\tilde{t}_k} \frac{1}{2\sigma} \chi_{[-\sigma, \sigma]} \cdot \hat{\varphi} \\ &= \frac{1}{2\sigma} e^{-i\tilde{t}_k} \hat{\varphi}. \end{aligned}$$

Daher ist

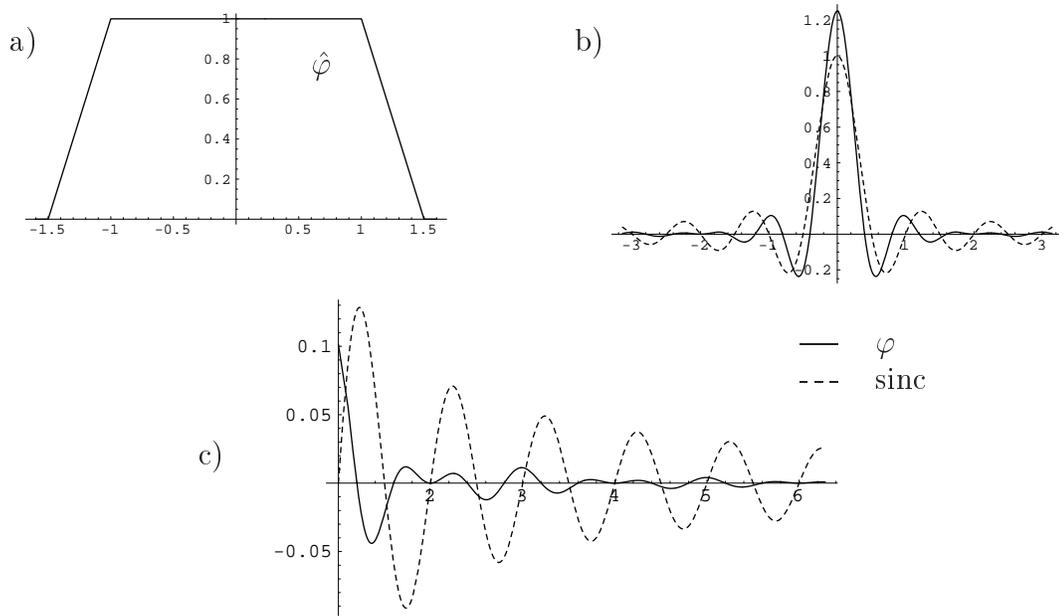
$$h_k * \varphi = \frac{1}{2\sigma} \varphi(\cdot - \tilde{t}_k)$$

und

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\tilde{t}_k) \varphi(x - \tilde{t}_k) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Da  $\hat{\varphi}$  die Faltung zweier charakteristischer Funktionen ist, ergibt sich  $\varphi$  als Produkt zweier sinc-Funktionen:

$$\varphi(x) = (\sigma + \omega)(\sigma - \omega) \text{sinc}(\sigma + \omega)x \text{sinc}(\sigma - \omega)x. \quad (2.10)$$



**Abbildung 2.1:** Die Funktion  $\hat{\varphi}$  aus (2.9) und ihre Fourier-Inverse  $\varphi$  für die Parameter  $\omega = 1$  und  $\sigma = \frac{3}{2}$ . Abbildung c) zeigt deutlich das im Vergleich zur sinc-Funktion raschere Abklingen von  $\varphi$ .

Man hat also mit  $|\varphi(x)| = O(x^{-2})$  gegenüber  $|\text{sinc}(x)| = O(x^{-1})$  schneller abklingende Sampling-Funktionen. Durch die Wahl einer noch glatteren Funktion  $\hat{\varphi}$  lassen sich die Lokalisationseigenschaften von  $\varphi$  weiter verbessern. Ist z.B.  $\hat{\varphi} \in \mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ , so ist  $\varphi \in \mathcal{S}$  und daher

$$|\varphi| \leq C_j (1 + |\cdot|)^{-j}$$

für beliebiges  $j \in \mathbb{N}$ , die Konstante  $C_j$  kann jedoch u. U. sehr groß werden, so daß sich eine höhere Differenzierbarkeitsordnung von  $\hat{\varphi}$  nur bedingt auszahlt.

### Undersampling

Es wurde bereits angedeutet, daß für  $f \in V_\omega$  die Nyquist Sampling-Rate die kritische Schranke darstellt, unterhalb der eine exakte Rekonstruktion von  $f$  aus den Samples mittels der Sampling-Reihe nicht mehr möglich ist, wengleich eine Rekonstruktion auf anderem Wege natürlich denkbar wäre. Man denke nur an die Rekonstruktionsformel (2.4) für Funktionen mit einem translatierten Intervall als Bandregion. Die Sampling-Reihe (2.1) konvergiert für jede Funktion  $f \in L^2$ , bereits eine beliebig kleine Unterschreitung der Nyquist-Rate führt jedoch dazu, daß ihr Grenzwert weder punktweise noch

in  $L^2$  die Funktion  $f$  ist (Standish [Sta67]). Welche Funktion ist es nun, die dann durch die Sampling-Reihe dargestellt wird? Daubechies [Dau92, S. 19] betrachtet dazu folgendes Beispiel.

Sei  $f \in V_\omega$  mit Rate  $2\sigma < 2\omega$  gesampelt, also die Werte  $f(\frac{k}{2\sigma})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  gegeben. Nach der Fourier-Umkehrformel ist

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k}{2\sigma}\right) &= \int_{-\omega}^{\omega} \hat{f}(\xi) e_k\left(\frac{\xi}{2\sigma}\right) d\xi \\ &= \int_{-\sigma}^{\sigma} \hat{f}(\xi) e_k\left(\frac{\xi}{2\sigma}\right) d\xi + \int_{-\omega}^{-\sigma} \hat{f}(\xi) e_k\left(\frac{\xi}{2\sigma}\right) d\xi + \int_{\sigma}^{\omega} \hat{f}(\xi) e_k\left(\frac{\xi}{2\sigma}\right) d\xi. \end{aligned}$$

Da  $e_k(\frac{\cdot}{2\sigma})$   $2\sigma$ -periodisch ist, gilt unter der Voraussetzung  $\frac{\omega}{3} < \sigma < \omega$

$$\int_{\sigma}^{\omega} \hat{f}(\xi) e_k\left(\frac{\xi}{2\sigma}\right) d\xi = \int_{-\sigma}^{\omega-2\sigma} \hat{f}(\xi + 2\sigma) e_k\left(\frac{\xi}{2\sigma}\right) d\xi = \int_{-\sigma}^{\sigma} \hat{f}(\xi + 2\sigma) e_k\left(\frac{\xi}{2\sigma}\right) d\xi,$$

da  $\hat{f}(\xi + 2\sigma) = 0$  für  $\omega - 2\sigma < \xi$ . Nach einer analogen Umformung des zweiten Teilintegrals erhält man durch erneutes Zusammenfassen aller Integrale

$$f\left(\frac{k}{2\sigma}\right) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \left( \hat{f}(\xi) + \hat{f}(\xi + 2\sigma) + \hat{f}(\xi - 2\sigma) \right) e_k\left(\frac{\xi}{2\sigma}\right) d\xi.$$

Setzt man

$$\hat{\tilde{f}}(\xi) := \begin{cases} \hat{f}(\xi) + \hat{f}(\xi + 2\sigma) + \hat{f}(\xi - 2\sigma), & \xi \in [-\sigma, \sigma] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

so ist  $f(\frac{k}{2\sigma}) = \tilde{f}(\frac{k}{2\sigma})$ , die mit einer Rate kleiner der Nyquist-Rate gesampelten Werte von  $f$  sind also gleichzeitig die mit Nyquist-Rate gesampelten Werte der Funktion  $\tilde{f}$  geringerer Bandbreite und diese ist es, die durch die Sampling-Reihe dargestellt wird. Die Fourier-Transformierte von  $\tilde{f}$  enthält nunmehr Anteile von  $\hat{f}$  aus dem oberen Spektralbereich in niedrigeren Bereichen, ein Phänomen, das gemeinhin als **Aliasing** bezeichnet wird. Dieser Fall tritt z.B. immer dann ein, wenn das WSK-Theorem auf nicht bandbeschränkte Funktionen angewendet wird. Wir werden in Abschnitt 2.1.3 darauf noch näher eingehen. Dort wird auch eine Abschätzung für den beim Undersampling auftretenden *Aliasing-Fehler* angegeben.

Zur Veranschaulichung betrachten wir nochmals die Funktion  $\varphi$  aus (2.10).

**Beispiel 2.4**

Sei  $\varphi$  die Funktion aus (2.10), also bandbeschränkt mit Bandbreite  $\omega = \frac{3}{2}$ , mit der Rate  $2\sigma = 2$  gesampelt, d.h. es stehen statt der Werte  $\varphi(\frac{k}{3})$ , die für eine exakte Rekonstruktion durch die Sampling-Reihe notwendig wären, lediglich die Werte  $\varphi(\frac{k}{2\sigma}) = \varphi(\frac{k}{2})$  zur Verfügung. Die Sampling-Reihe hat dann die Gestalt

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{k}{2}\right) \operatorname{sinc}(2x - k) \\ &= \frac{5}{4} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{sinc}\left(\frac{5}{2}k\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \operatorname{sinc}(2x - k) \\ &= \frac{5}{4} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sin(\frac{5}{2}k\pi) \sin(\frac{k}{2}\pi)}{\frac{5}{4}\pi^2 k^2} \operatorname{sinc}(2x - k).\end{aligned}$$

Es ist  $\sin(\frac{5}{2}k\pi) = \sin(\frac{k}{2}\pi) = (-1)^{k+1}$  für ungerade  $k$  und Null für gerade  $k$ . Daher ist

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\pi^2(2k+1)^2} \operatorname{sinc}(2(x-k)-1).$$

Mit  $\frac{2}{3} < \frac{3}{2} < 2$  ist die Bedingung für das Daubechies'sche Beispiel erfüllt, es ist also

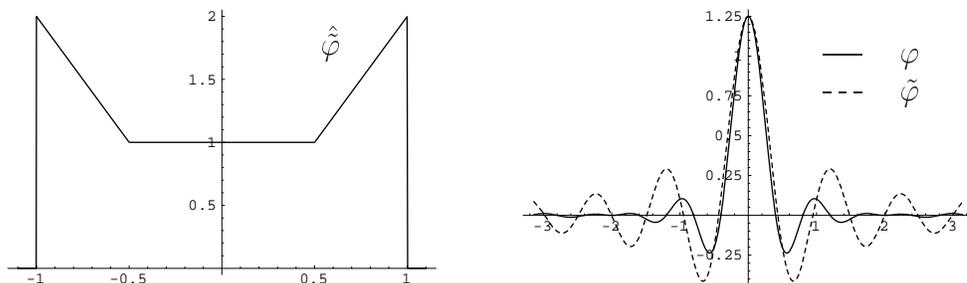
$$\hat{\tilde{\varphi}}(\xi) = \begin{cases} \hat{\varphi}(\xi) + \hat{\varphi}(\xi+2) + \hat{\varphi}(\xi-2), & |\xi| \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Abbildung 2.2 zeigt die Graphen von  $\tilde{\varphi}$  und  $\hat{\tilde{\varphi}}$  sowie zum Vergleich die Funktion  $\varphi$  aus (2.10).

## 2.1.2 Verallgemeinerte Sampling-Theoreme für bandbeschränkte Funktionen

Bald nach der Veröffentlichung der Arbeit Shannons im Jahr 1949 [Sha49] begann man damit, das WSK-Theorem auf die eine oder andere Weise zu verallgemeinern. Ansatzpunkte boten sich bei der Beschränkung auf die  $L^2$ -Theorie ebenso wie bei der Äquidistanz der Sampling-Punkte oder der schlechten Konvergenz der Reihe aufgrund der unzureichenden Lokalisation der sinc-Funktion.

Im vorliegenden Abschnitt wird zunächst die Bandbeschränktheit mit Hilfe der Fourier-Transformation für Distributionen neu interpretiert und unter diesem Blickwinkel werden Verallgemeinerungen des WSK-Theorems für in diesem Sinne bandbeschränkte Funktionen diskutiert. Resultate unter Aufgabe der Bandbeschränktheit werden im nachfolgenden Abschnitt 2.1.3 vorgestellt.



**Abbildung 2.2:** Die  $\omega$ -bandbeschränkte Funktion  $\varphi$  aus (2.10) für  $\omega = \frac{3}{2}$  und die aus den mit zu kleiner Rate  $2\sigma = 2$  gesampelten Werten  $\varphi(\frac{k}{2\sigma})$  rekonstruierte Funktion  $\tilde{\varphi}$ . Die Fourier-Transformierte von  $\tilde{\varphi}$  zeigt deutliche Aliasing-Effekte.

### Bernstein-Räume

Voraussetzung für die Anwendbarkeit des WSK-Theorems auf eine Funktion  $f$  ist deren Bandbeschränktheit im Sinne der Definition 2.1, d.h.  $f \in L^2$  mit  $\text{supp } \hat{f} \subset [-\omega, \omega]$ . *Bernstein-Räume* erweitern den Begriff der Bandbeschränktheit auf die übrigen  $L^p$ -Räume. Da  $L^p \subset \mathcal{S}'$  (vgl. Beispiel 1.22) ist die Fourier-Transformation auf  $L^p$  definiert.

Für weiterführende Aussagen, wie sich die Bandbeschränktheit geeignet verallgemeinern läßt, sei auf Zayed [Zay93, §2.2] verwiesen. Eine Diskussion der Bernstein-Räume findet sich auch bei Higgins [Hig96, Kap. 6] und Butzer *et al.* [BSS88].

#### Definition 2.5

Für  $\omega \geq 0$  und  $1 \leq p \leq \infty$  sei die **Bernstein-Klasse**  $\mathcal{B}_\omega^p$  die Menge aller Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  von exponentiellem Typ höchstens  $\omega$ , deren Restriktion auf  $\mathbb{R}$  in  $L^p(\mathbb{R})$  liegt.

Mit der  $L^p$ -Norm sind die Bernstein-Klassen Banach-Räume (Young [You80, S.84+99]). Anders als die  $L^p$ -Räume bilden sie bei festem  $\omega$  für wachsendes  $p$  eine aufsteigende Kette:

$$\mathcal{B}_\omega^1 \subset \mathcal{B}_\omega^p \subset \mathcal{B}_\omega^q \subset \mathcal{B}_\omega^\infty \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty. \quad (2.11)$$

Nach dem Satz von Paley-Wiener in der  $L^2$ -Version (Satz 1.47) ist der Raum  $\mathcal{B}_\omega^2$ ,  $\omega > 0$  genau der Raum der  $\omega$ -bandbeschränkten Funktionen. Das WSK-Theorem gilt also für  $f \in \mathcal{B}_\omega^2$  und wegen der Inklusion (2.11) auch für  $f \in \mathcal{B}_\omega^p$ ,  $1 \leq p \leq 2$ . Für  $p > 2$  ist jedoch  $\mathcal{B}_\omega^p \not\subset L^2$ , d.h. das WSK-Theorem

2.2 ist nicht anwendbar. Gemäß (2.11) ist aber  $f \in \mathcal{B}_\omega^p$  beschränkt auf  $\mathbb{R}$  und somit nach Satz 1.49 (Paley-Wiener-Schwartz-II) die Fourier-Inverse einer Distribution mit kompaktem Träger. Man bezeichnet daher die Funktionen der Bernstein-Räume auch als **im distributiven Sinne bandbeschränkt**. Für die Bernstein-Räume mit  $p < \infty$  läßt sich ein dem WSK-Theorem analoger Satz zeigen.

**Satz 2.6**

Sei  $f \in \mathcal{B}_\omega^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $\omega > 0$ . Dann ist

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t_k) \operatorname{sinc} 2\omega(x - t_k) \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.12)$$

und die Reihe konvergiert absolut und lokal gleichmäßig.

Der Beweis dieses Satzes erfordert im Vergleich zum WSK-Theorem neue Methoden, da man sich jenseits der  $L^2$ -Theorie bewegt. Es ist auch nicht klar, ob die Reihe in  $L^p$  konvergiert, da die zum Beweis der  $L^2$ -Konvergenz wesentliche Unitarität der Fourier-Transformation nicht zur Verfügung steht. Ansatzweise diskutiert wird die  $L^p$ -Konvergenz von Kardinalreihen in der dritten der fünf Kurzgeschichten von Higgins [Hig85]. Butzer *et al.* [BSS88] geben einen eleganten Beweis des Satzes, indem sie die Sampling-Reihe als semi-diskrete Faltung der Folge  $f(t_k)$  mit der Funktion  $\operatorname{sinc}(2\omega \cdot)$  auffassen und deren Kommutativität ausnutzen:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t_k) \operatorname{sinc} 2\omega(x - t_k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x) \operatorname{sinc}(k) .$$

Die Behauptung folgt dann aus der Eigenschaft  $\operatorname{sinc}(k) = \delta_{0,k}$ . Diese sogenannte *Interpolationseigenschaft* ist sowohl für Sampling-Funktionen als auch für Skalierungsfunktionen von großer Bedeutung und wird später noch eingehend untersucht, vgl. dazu die Abschnitte 2.1.3 und 3.2.2.

Wie die Funktion  $f = \sin(2\pi\omega \cdot)$  zeigt, läßt sich dieser Satz nicht auf den Fall  $p = \infty$  ausdehnen, denn es ist  $f \in \mathcal{B}_\omega^\infty$ , aber  $f(t_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ . Nur für Sampling-Raten größer als der Nyquist-Rate erhält man auch für  $\mathcal{B}_\omega^\infty$  ein Sampling-Theorem.

**Satz 2.7 ([Zay93, Th. 2.3])**

Sei  $f \in \mathcal{B}_\omega^\infty$ ,  $\omega > 0$ . Dann ist

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\tilde{t}_k) \operatorname{sinc} 2\sigma(x - \tilde{t}_k) \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.13)$$

mit  $\tilde{t}_k = \frac{k}{2\sigma}$ ,  $0 < \omega < \sigma$  und die Reihe konvergiert lokal gleichmäßig.

### Irreguläres Sampling

Das WSK-Theorem (2.1) ist anwendbar auf das Problem der Rekonstruktion eines Signals aus seinen diskreten Werten an äquidistanten Punkten. Eine naheliegende Verallgemeinerung ist die Rekonstruktion aus nicht äquidistanten Samples. Sampling mit äquidistanten Stützstellen wird auch als **reguläres Sampling** bezeichnet, von **irregulärem Sampling** spricht man entsprechend im Fall nicht äquidistanter Sampling-Punkte. Irreguläres Sampling findet Anwendung z.B. in der Computer-Tomographie, der Radio-Astronomie sowie optischen und elektronischen Bildverarbeitungssystemen. Das bekannteste Resultat für diesen Fall stammt ursprünglich von Paley und Wiener [PW34].

#### Satz 2.8 (Paley-Wiener)

Sei  $\{t_k; k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$  und es gelte

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} |t_k - k| < \frac{1}{4}. \quad (2.14)$$

Weiterhin sei  $G$  die durch

$$G(z) = (z - t_0) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{t_k^2}\right)$$

gegebene ganze Funktion. Dann gilt für alle  $f \in \mathcal{B}_\omega^2$

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t_k) \tilde{S}_k(x) \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.15)$$

mit

$$\tilde{S}_k(x) = \frac{G(x)}{G'(t_k)(x - t_k)}$$

und die Reihe in (2.15) konvergiert lokal gleichmäßig.

Die Konstante  $\frac{1}{4}$  in (2.14) ist scharf und geht auf das sog.  $\frac{1}{4}$ -Theorem von Kadec zurück (z.B. bei Young [You80, Th. 1.14]). Es besagt, daß für  $|t_k - k| \leq L < \frac{1}{4}$  das trigonometrische System  $\{e^{2\pi i t_k \cdot}\}$  eine Riesz-Basis für  $L^2(\mathbb{T})$  bildet.

Aufgrund der Ähnlichkeit von (2.15) zur klassischen Lagrange'schen Interpolationsformel spricht man in diesem Fall auch von **Langrange-artiger Interpolation** sowie von Lagrange-artigen Sampling- bzw. Interpolationsfunktionen [You80, §4.1, Bsp. 3].

Weiterführende Resultate zum irregulären Sampling findet man bei Zayed [Zay93, §3.1] und Higgins [Hig96, Kap. 10], siehe auch den Paragraphen 2.2.3.

### Sampling-Theoreme für andere Kanäle

Im Zusammenhang der Rekonstruktion bandbeschränkter Funktionen aus diskreten Werten spricht man von **Mehr-Kanal Sampling** (*multi-channel sampling*), falls zur Rekonstruktion von  $f$  nicht nur Samples von  $f$  selbst, sondern auch von Transformationen von  $f$  herangezogen werden. Ein typisches Beispiel hierfür ist die Rekonstruktion aus Samples der Funktion und einer oder mehrerer ihrer Ableitungen.

Im Gegensatz dazu spricht man von **Ein-Kanal Sampling** (*single-channel sampling*), falls nur eine Datenquelle zur Verfügung steht. Hier ist abgesehen vom Standardfall der Rekonstruktion aus Samples von  $f$  der Fall der Rekonstruktion aus Punkten mit gleichem Funktionswert von Interesse (i.d.R. betrachtet man die Nullstellen).

Bereits Shannon wies darauf hin, daß eine bandbeschränkte Funktion aus ihren mit halber Nyquist-Rate gesampelten Werten rekonstruiert werden kann, wenn zusätzlich zu den Werten der Funktion selbst auch die der Ableitung bekannt sind. Eine Anwendung hierfür ergibt sich in der Flugsicherung, wo der Weg eines Flugzeugs aus seiner Position und der geschätzten Geschwindigkeit rekonstruiert wird und so die Häufigkeit der Positionsmeldungen eines Flugzeugs um die Hälfte reduziert werden kann.

Dieses Resultat läßt sich auch auf höhere Ableitungen ausdehnen: Sampeln einer Funktion und ihrer ersten  $n$  Ableitungen reduziert die Sampling-Rate um den Faktor  $\frac{1}{n+1}$ .

In der Interpolationstheorie ist das Problem der Interpolation von Funktions- und Ableitungswerten als *Hermite-Interpolation* bekannt.

Weitere Hinweise zur Rekonstruktion von Funktionen aus anderen Daten finden sich bei Zayed [Zay93, §3.6.A] und Higgins [Hig96, Kap. 12].

#### Satz 2.9

Sei  $f \in \mathcal{B}_\omega^2$ ,  $t_k = \frac{k}{2\omega}$ , so gilt

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{m!} (x - nt_k)^m f^{(m)}(nt_k) \right) \operatorname{sinc}^n 2\omega \left( \frac{x}{n} - t_k \right)$$

und die Reihe konvergiert lokal gleichmäßig.

Nach dem Satz von Paley-Wiener sind die bandbeschränkten Funktionen ganze Funktionen von exponentiellem Typ. Obwohl ganze Funktionen im allgemeinen nicht vollständig durch ihre Nullstellen bestimmt sind (Hadamard'scher Faktorisierungssatz für ganze Funktionen, z.B. bei Zayed [Zay93, Th. 1.1]), lassen sich überraschenderweise die bandbeschränkten Funktionen

doch bis auf eine Konstante allein aus ihren (stets abzählbar unendlich vielen) Nullstellen rekonstruieren.

**Satz 2.10 (Titchmarsh [Tit26])**

Sei  $f \in L^1([-\omega, \omega])$  mit  $\omega \in \mathbb{R}_+^*$  und

$$F(z) = \int_{-\omega}^{\omega} f(\xi) e^{z\xi} d\xi .$$

$\{z_n; n \in \mathbb{N}^*\}$  sei die Menge der Nullstellen von  $F$  und es gelte  $F(0) \neq 0$ . Dann ist

$$F(z) = F(0) e^{\omega z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \quad z \in \mathbb{C} .$$

$F(2\pi i \cdot)$  ist eine auf  $\mathbb{R}$  beschränkte ganze Funktion von exponentiellem Typ  $\leq \omega$  (Young [You80, S. 84]) und daher nach Paley-Wiener bandbeschränkt. Für  $z = 2\pi ix$ ,  $x \in \mathbb{R}$  ist nämlich  $F(z) = \check{f}(x)$ , falls  $f$  über das Intervall  $[-\omega, \omega]$  hinaus durch Null fortgesetzt wird. Daher ist ein bandbeschränktes Signal bis auf einen Exponentialterm, der lediglich von den Endpunkten des Spektralintervalls abhängt, durch seine Nullstellen bestimmt. Titchmarsh hat weiterhin gezeigt, daß sich die Dichte der Nullstellen proportional zur Bandbreite verhält. Ist  $n(r)$  die Anzahl der Nullstellen von  $F(z)$  für  $|z| \leq r$ , so gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r} = \frac{2\omega}{\pi} .$$

Reelle Nullstellen werden gemeinhin als **zero-crossings** bezeichnet. Sind alle Nullstellen eines Signals reell, so bezeichnet man es als **RZ-Signal** (real zero). Insbesondere lassen sich also bandbeschränkte RZ-Signale selbst nach einer Verzerrung, die einer nicht-linearen, die Nullstellen invariant lassenden, Transformation entspricht, noch bis auf eine Konstante exakt rekonstruieren. Für weiterführende Aussagen zur Rekonstruktion von Funktionen aus ihren Nullstellen sei auf Saito/Beylkin [SB93] sowie die darin zitierten Arbeiten von Mallat und Hummel verwiesen.

### Andere Sampling-Funktionen

Für praktische Anwendungen erweist sich die Sampling-Reihe (2.1) als unbrauchbar, da der durch Abschneiden der unendlichen Reihe zwangsläufig entstehende Cut-Off Fehler aufgrund der schlechten Lokalisation der sinc-

Funktion nur sehr langsam fällt. Ähnlich wie im Falle des Oversampling betrachtet man daher ganz allgemein Sampling-Reihen der Form

$$(S_{\omega, \varphi} f)(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2\omega}\right) \varphi(2\omega x - k) \quad (2.16)$$

mit einer geeigneten, sog. *Kern- oder Sampling-Funktion*  $\varphi$ , die an die Stelle der sinc-Funktion tritt. Dabei muß  $\varphi$  nicht notwendigerweise wie beim Oversampling selbst bandbeschränkt sein. Die Reihe (2.16) sollte nun aber für jede Funktion  $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$  existieren und für  $\omega \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergieren. In Butzer *et al.* [BSS88, Kap. 4] wird diese Problemstellung ausführlich diskutiert. Wir zitieren nachfolgend lediglich das Hauptresultat.

**Satz 2.11 ([BSS88, Th. 4.1])**

Sei  $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(\cdot - k)$  konvergiert absolut und lokal gleichmäßig.
- (ii)  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(\cdot - k) = 1$ .

Weiterhin sei

$$m_j(\varphi) := \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|^j |\varphi(x - k)| \quad j \in \mathbb{N}$$

das  $j$ -te absolute (Summen-)Moment von  $\varphi$ . Dann gilt:

- 1.) Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  beschränkt und stetig im Punkt  $x$ , so gilt

$$f(x) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (S_{\omega, \varphi} f)(x). \quad (2.17)$$

- 2.)  $\{S_{\omega, \varphi}\}_{\omega > 0}$  ist eine Familie linearer und beschränkter Operatoren von  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$  in sich, für die gilt

- (i)  $\|S_{\omega, \varphi}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_b)} = m_0(\varphi) \quad \omega > 0$ .
- (ii)  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|S_{\omega, \varphi} f - f\|_{\infty} = 0 \quad \forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ .

Bezüglich der Konvergenzaussagen zu (2.17) unterscheidet Butzer aufgrund unterschiedlicher Beweismethoden zwischen bandbeschränkten und nicht bandbeschränkten Kernen. Zu den ersteren gehören die sinc-Funktion und deren Potenzen, zur letzteren Klasse zählen z.B. die B-Splines sowie der sog. Cauchy-Poisson Kern  $\frac{1}{1+x^2}$ . Higgins [Hig96, Anh. A] gibt eine Übersicht der verwendeten Kerne.

Die Bedingung (ii) in Satz 2.11 erscheint zunächst merkwürdig, da im Zusammenhang mit interpolierenden Skalierungsfunktionen das gleiche Kriterium für  $\hat{\phi}$  auftaucht, vgl. Lemma 3.24. Das Lemma 3.27 zeigt jedoch, daß in der Mehrzahl der im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Fälle die Bedingung  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(\cdot - k) = \text{const}$  eine notwendige Voraussetzung für die Skalierbarkeit von  $\phi$  ist, vgl. hierzu auch Daubechies [Dau92, S. 143+145].

### Band-pass und Multi-Band Sampling

Die bisher in diesem Abschnitt diskutierten Resultate gelten – abgesehen von der Sampling-Reihe (2.4) – für den Fall einer Bandregion, die die Form eines symmetrisch um den Nullpunkt gelegenen Intervalls hat. In Anwendungen tauchen jedoch häufig Signale auf, deren Bandregion kompliziertere Struktur hat. In der Sprachverarbeitung sind z.B. sog. **Band-pass** Funktionen die Regel, i.e. Funktionen, die weder hohe noch niedrige Frequenzen enthalten. Die Bandregion einer solchen Funktion hat die Gestalt

$$B = [-x_0 - \omega, -x_0 + \omega] \cup [x_0 - \omega, x_0 + \omega] \quad (2.18)$$

mit  $x_0 > \omega > 0$ . Für solche Funktionen stellt auch das Intervall  $[-x_0 - \omega, x_0 + \omega]$  eine Bandregion dar, sie lassen sich daher auch mittels des WSK-Theorems rekonstruieren. Die Erwartung, daß dabei jedoch eine Sampling-Rate angenommen wird, die u.U. weit über dem notwendigen Minimum liegt, wird durch die nachfolgenden Aussagen bestätigt.

Das erste Resultat zum Sampling von Band-pass Funktionen stammt von Goldman [Gol53]. Er zeigte 1953, daß eine Band-pass Funktion  $f$  aus ihren Samples sowie denen ihrer Hilbert-Transformation  $\mathcal{H}(f)$  rekonstruiert werden kann. Ist nämlich  $f$  bandbeschränkt mit der Bandregion  $B$  aus (2.18), so ist  $g := f - i\mathcal{H}(f)$  bandbeschränkt auf das Intervall  $[x_0 - \omega, x_0 + \omega]$  und kann daher mittels der Sampling-Reihe (2.4) für  $g$  rekonstruiert werden, wenn die jeweils mit Rate  $2\omega$  gesampelten Werte für  $f$  und  $\mathcal{H}(f)$  zur Verfügung stehen.

Man beachte, daß die zur Rekonstruktion notwendige Sampling-Rate – wie man es auch nach der Sampling-Reihe (2.4) für translatierte Bandregionen erwarten wird – nicht von  $x_0$ , sondern lediglich von  $\omega$  abhängt und somit kleiner ist als die Nyquist-Rate.

Eine andere Möglichkeit besteht nach Higgins [Hig96, Kap. 13.6] darin, statt der Hilbert-Transformation eine zeitversetzte Version von  $f$  zu sampeln. Die dabei auftretenden Sampling-Funktionen sind jedoch wesentlich komplizierter. Weitere Resultate zum Band-pass Sampling werden bei Higgins (ibid.) und Zayed [Zay93, Kap. 3.5.B] diskutiert.

 Als **Multi-Band** Funktion bezeichnet man ein Signal, dessen Bandregion aus endlich vielen disjunkten Teilintervallen besteht.

$$B := \bigcup_{i=0}^{n-1} I_i, \quad I_i \text{ nicht-leeres Intervall .} \quad (2.19)$$

Higgins [Hig96, Kap. 13] zeigt, daß auch für Multi-Band Funktionen eine exakte Rekonstruktion aus Samples möglich ist, die mit einer lediglich vom Maß von  $B$  abhängigen Rate regulär gesampelt wurden. Voraussetzung hierfür ist allerdings eine geometrische Bedingung an  $B$ : Die Teilintervalle müssen sich nach geeigneter Translation zu einem Intervall  $[-\omega, \omega)$  zusammensetzen lassen. Erfüllt die Multi-Bandregion  $B$  diese geometrische Bedingung nicht, so läßt sich eine auf  $B$  bandbeschränkte Funktion dennoch mittels regulären Samplings rekonstruieren, die nötige Sampling-Rate liegt dann jedoch über dem Optimalwert.

Da es sich hierbei um einen Spezialfall des im Paragraphen 2.2.2 dargestellten mehrdimensionalen Falles handelt, wird an dieser Stelle auf eine ausführlichere Diskussion verzichtet.

### 2.1.3 Allgemeine Sampling-Theorie

#### Nicht bandbeschränkte Funktionen

Gemäß Satz 1.40 handelt es sich bei den bandbeschränkten Funktionen um ganze Funktionen von exponentiellem Typ. Nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen ist eine ganze Funktion bereits identisch Null, wenn sie auf einem Intervall verschwindet. Es kann daher – außer der Nullfunktion – keine Funktion geben, die zugleich bandbeschränkt ist und einen beschränkten Träger besitzt. In praktischen Anwendungen tauchen jedoch meist Signale von begrenzter Dauer auf, so daß man in natürlicher Weise zu nicht bandbeschränkten Funktionen gelangt. Man wird nicht erwarten, daß (2.1) für solche Funktionen gilt, es läßt sich aber zeigen, daß unter bestimmten Bedingungen die Sampling-Reihe punktweise für wachsendes  $\omega$  gegen die Funktion konvergiert:

$$f(x) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2\omega}\right) \operatorname{sinc} 2\omega x - k \quad x \in \mathbb{R} . \quad (2.20)$$

In diesem Fall interessiert man sich für den sog. **Aliasing-Fehler**, i.e. den für festes  $\omega > 0$  auftretenden Fehler

$$(R_\omega f)(x) := f(x) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2\omega}\right) \operatorname{sinc} 2\omega x - k \quad x \in \mathbb{R} . \quad (2.21)$$

Die Notwendigkeit der Stetigkeit von  $f$  im Punkt  $x$  für die Gültigkeit von (2.20) wurde bereits 1908 von de la Vallée-Poussin erkannt. 1919 zeigte M. Theis, daß die Stetigkeit allein nicht hinreichend ist. Man benötigt vielmehr Aussagen über die Regularität von  $f$  in einer Umgebung des Punktes  $x$  (Butzer *et al.* [BSS88, S. 3]). Wie in Abschnitt 2.1.2 ausgeführt existieren jedoch ähnliche Darstellungen wie (2.20) für stetige Funktionen, wenn man statt der sinc-Funktion andere Sampling-Funktionen  $\varphi$  zuläßt, für die  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(\cdot - k)| < \infty$  gleichmäßig auf Kompakta zusammen mit  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(\cdot - k) = 1$  gilt.

Nach den frühen Ergebnissen zum Aliasing-Fehler erwachte erst in den Sechziger Jahren mit der Arbeit von P. Weiss [Wei63] wieder das Interesse an dieser Thematik. Brown [Bro67] gelang es 1967, dieses Resultat zu verbessern. Der nachfolgende Satz, das **Näherungsweise Sampling-Theorem** (*AST, approximate sampling theorem*), faßt die Ergebnisse zusammen.

**Satz 2.12 (Butzer *et al.* [BSS88, Th. 3.8])**

Sei  $f \in L^2$  mit  $\hat{f} \in L^1$ , so gilt für den Aliasing-Fehler

$$(R_\omega f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 - e^{-4k\pi i \omega x}) \int_{(2k-1)\omega}^{(2k+1)\omega} \hat{f}(\xi) e_x(\xi) d\xi, \quad (2.22)$$

$$|R_\omega f| \leq 2 \int_{|\xi| > \omega} |\hat{f}(\xi)| d\xi \quad (2.23)$$

und die Konstante 2 in (2.23) ist scharf, wie ein Beispiel bei Brown [Bro67] zeigt. Insbesondere gilt (2.20) gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$ .

### Hilbert-Räume mit reproduzierendem Kern

Der Begriff des *Hilbert-Raums mit reproduzierendem Kern* wurde 1950 von N. Aronszajn [Aro50] geprägt. Die nachfolgende Darstellung der Thematik orientiert sich an Higgins [Hig96, §3.4], Zayed [Zay93, §10.1] und Young [You80, Kap. 1].

Im folgenden sei  $\mathcal{H}$  ein separabler Hilbert-Raum von Funktionen auf  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ein separabler Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  besitzt p.d. eine abzählbare ONB. Weiterhin besitzt jede Basis  $\{\varphi_k; k \in \mathbb{Z}^n\}$  von  $\mathcal{H}$  eine eindeutig bestimmte biorthonormale Basis  $\{\tilde{\varphi}_k; k \in \mathbb{Z}^n\}$ , d.h. es ist

$$\langle \varphi_k | \tilde{\varphi}_l \rangle = \delta_{k,l}$$

und für alle  $f \in \mathcal{H}$  gilt

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle f | \tilde{\varphi}_k \rangle \varphi_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle f | \varphi_k \rangle \tilde{\varphi}_k . \quad (2.24)$$

**Definition 2.13**

Eine auf  $X \times X$  definierte Funktion  $K$  heißt **reproduzierender Kern** von  $\mathcal{H}$ , falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

- 1.)  $K(\cdot, \xi) \in \mathcal{H} \quad \forall \xi \in X$ .
- 2.) Für alle  $f \in \mathcal{H}$  gilt die Reproduktionsformel

$$f(\xi) = \langle f | K(\cdot, \xi) \rangle \quad \xi \in X . \quad (2.25)$$

Ein Hilbert-Raum mit reproduzierendem Kern wird als **rk-Hilbert-Raum** (rk-HR) bezeichnet.

**Satz 2.14 (Eigenschaften von rk-Hilbert-Räumen)**

- 1.)  $\mathcal{H}$  besitzt genau dann einen reproduzierenden Kern, wenn für alle  $x \in X$  die punktweise Auswertung  $l_x f = f(x)$  ein beschränktes lineares Funktional auf  $\mathcal{H}$  ist. Wenn ein reproduzierender Kern existiert, dann ist er eindeutig bestimmt.
- 2.) Ist  $\{\varphi_k; k \in \mathbb{Z}^n\}$  ONB des rk-Hilbert-Raums  $\mathcal{H}$ , so ist der Kern  $K$  von  $\mathcal{H}$  durch

$$K(x, \xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi_k(x) \bar{\varphi}_k(\xi) = \overline{K(\xi, x)} . \quad (2.26)$$

gegeben und die Reihe konvergiert in der Norm von  $\mathcal{H}$ .

- 3.) Ist  $\{\varphi_k; k \in \mathbb{Z}^n\}$  Basis des rk-Hilbert-Raums  $\mathcal{H}$  und  $\{\tilde{\varphi}_k; k \in \mathbb{Z}^n\}$  die zu  $\{\varphi_k\}$  biorthonormale Basis, so ist der Kern  $K$  von  $\mathcal{H}$  durch

$$K(x, \xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi_k(x) \tilde{\varphi}_k(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tilde{\varphi}_k(x) \bar{\varphi}_k(\xi) . \quad (2.27)$$

gegeben und die Reihe konvergiert in der Norm von  $\mathcal{H}$

- 4.) Die Konvergenz einer Folge in einem rk-Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  in der Norm von  $\mathcal{H}$  impliziert die punktweise Konvergenz mit gleichem Grenzwert. Die Konvergenz ist gleichmäßig über jeder Teilmenge von  $X$ , für die  $K(x, x)$  beschränkt ist.

**Beispiel 2.15**

- 1.)  $\ell^2(\mathbb{Z})$  ist rk-Hilbert-Raum mit dem reproduzierenden Kern  
 $K(k, l) = \delta_{k,l}$ ,  $k, l \in \mathbb{Z}$ .
- 2.) Ist  $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{C}(X)$  stetig und  $\mathcal{C}(X)$  versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz, so ist  $\mathcal{H}$  rk-Hilbert-Raum, denn da  $\{x\}$  für jedes  $x \in X$  kompakt, ist

$$|f(x)| \leq C_x \|f\|_{\mathcal{H}} \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Diese Voraussetzung gilt z.B. für die Sobolev-Räume  $H^s(\mathbb{R}^n)$  mit  $s \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $s > \frac{n}{2}$ , da  $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ , vgl. Satz 3.57. Ein analoges Resultat erhält man für  $H^m(\Omega)$  mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt und  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m > \frac{n}{2}$ .

**Definition 2.16**

Sei  $\{S_k; k \in \mathbb{Z}^n\}$  Basis des rk-Hilbert-Raums  $\mathcal{H}$  und  $\{t_k, k \in \mathbb{Z}^n\} \subset X$  eine Menge von Punkten in  $X$ .

- 1.)  $\{S_k\}$  heißt **Sampling-Basis** (bezüglich der  $\{t_k\}$ ), falls für alle  $f \in \mathcal{H}$

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(t_k) S_k$$

gilt und die Reihe in der Norm von  $\mathcal{H}$  (und damit nach Satz 2.14 4.) auch punktweise) konvergiert.

- 2.)  $\{S_k\}$  heißt **interpolierend** (bezüglich der  $\{t_k\}$ ), falls

$$S_k(t_l) = \delta_{k,l}$$

gilt (vgl. Definition 3.23).

**Lemma 2.17**

Sei  $\{S_k; k \in \mathbb{Z}^n\}$  Basis eines rk-Hilbert-Raumes  $\mathcal{H}$  mit reproduzierendem Kern  $K$ .  $\{\tilde{S}_k\}$  sei die eindeutig bestimmte zu  $\{S_k\}$  biorthonormale Basis aus (2.24). Dann ist  $\{S_k\}$  genau dann Sampling-Basis von  $\mathcal{H}$  bezüglich  $\{t_k\}$ , wenn  $\tilde{S}_k = K(\cdot, t_k)$  gilt.

**Folgerung 2.18**

- 1.) Eine ONB  $\{S_k\}$  eines rk-Hilbert-Raums  $\mathcal{H}$  ist genau dann eine Sampling-Basis, wenn  $S_k = K(\cdot, t_k)$  gilt.
- 2.) Eine Basis  $\{S_k\}$  eines rk-Hilbert-Raums  $\mathcal{H}$  ist genau dann Sampling-Basis bezüglich  $\{t_k\}$ , wenn sie bezüglich der  $\{t_k\}$  interpolierend ist.

Wir beweisen den zweiten Teil, da er sich in dieser expliziten Form weder bei Zayed noch bei Higgins findet.

**Beweis:**

Zu 2.) Ist  $\{S_k\}$  Basis, die bezüglich  $\{t_k\}$  interpolierend ist, so folgt aus  $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f | \tilde{S}_k \rangle S_k$  mit Satz 2.14 4.), daß  $f(t_k) = \langle f | \tilde{S}_k \rangle$  ist. Somit muß nach (2.25)  $\tilde{S}_k = K(\cdot, t_k)$  gelten und nach Lemma 2.17 ist  $\{S_k\}$  Sampling-Basis.

Ist umgekehrt  $\{S_k\}$  Sampling-Basis, so gilt einerseits nach Definition 2.16  $S_l = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_l(t_k) S_k$  und andererseits nach (2.24)  $S_l = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle S_l | \tilde{S}_k \rangle S_k$ . Also gilt  $S_l(t_k) = \langle S_l | \tilde{S}_k \rangle = \delta_{k,l}$ , da  $\{S_k\}, \{\tilde{S}_k\}$  biorthonormal. □

Mit den eingeführten Begriffen und Resultaten läßt sich nun das WSK-Theorem für  $\omega$ -bandbeschränkte Funktionen als Spezialfall eines Sampling-Theorems für Funktionen eines Hilbert-Raums mit reproduzierendem Kern identifizieren. Es gilt nämlich folgender Satz.

**Satz 2.19**

*Der Raum  $V_\omega$  der  $\omega$ -bandbeschränkten Funktionen ist ein Hilbert-Raum mit reproduzierendem Kern  $K(x, \xi) = 2\omega \operatorname{sinc} 2\omega(x - \xi)$ .*

Der Beweis ist im wesentlichen eine Anwendung der Parseval-Identität. Der Satz ist auch noch gültig für Multi-Bandregionen  $B$ . Die Räume

$$PW_B := \{f \in L^2; \operatorname{supp} \hat{f} \subseteq B\} \quad (2.28)$$

sind demnach Hilbert-Räume mit reproduzierendem Kern. Sie werden in der Literatur als **Paley-Wiener-Räume**  $PW_B$  bezeichnet.

Die Eigenschaft 4.) aus Satz 2.14 benutzt Higgins, um ein allgemeines Konvergenzprinzip für Reihendarstellungen in  $PW_B$  abzuleiten.

**Satz 2.20 (Higgins [Hig96, §6.6])**

*Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und  $f \in PW_B$ . Konvergiert eine Reihendarstellung für  $f$  in der Norm von  $PW_B$ , so auch punktweise und global gleichmäßig auf  $\mathbb{R}^n$ .*

Damit ist gezeigt, daß die Konvergenz der Sampling-Reihe in (2.1) nicht nur lokal gleichmäßig, sondern global gleichmäßig ist.

### Andere Integral-Transformationen, Kramers Lemma

Definitionsgemäß sind bandbeschränkte Funktionen Fourier-Inverse von Funktionen mit kompaktem Träger. Das WSK-Theorem läßt sich daher als Methode zur Rekonstruktion einer speziellen Integral-Transformation über endliche Intervalle interpretieren. In Anwendungen treten jedoch auch andere

Integral-Transformationen auf, die aus diskreten Werten zu rekonstruieren sind. Ein Beispiel ist die Hankel-Transformation, die in der optischen Physik eine Rolle spielt. Mit ihr lassen sich Probleme, bei denen  $m$ -dimensionale kreissymmetrische Fourier-Transformationen auftauchen, auf 1-dimensionale Hankel-Transformationen reduzieren [Zay93, S. 46],[Hig96, Aufg. 14.1]. Das entscheidende Resultat zur Verallgemeinerung des Sampling-Theorems auf andere Integral-Transformationen geht zurück auf P. Weiss [Wei57], der seine Ergebnisse – allerdings ohne Beweise – 1957 im AMS-Bulletin ankündigte, und H. Kramer [Kra60], der 2 Jahre später seine Ergebnisse einschließlich der Beweise veröffentlichte.<sup>1</sup> Dabei wird der *Fourier-Kern*  $e_x$  durch geeignete andere Kerne ersetzt.

**Satz 2.21 (Kramers Lemma)**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$   $L$ -meßbar,  $K(\cdot, \xi) \in L^2(\Omega) \forall \xi \in X \subset \mathbb{R}$  sowie  $\{t_k, k \in \mathbb{Z}\} \subset X$ , so daß  $\{K(\cdot, t_k); k \in \mathbb{Z}\}$  eine ONB von  $L^2(\Omega)$  ist. Gilt

$$f(\xi) = \int_{\Omega} g(x)K(x, \xi)dx = \langle g | \overline{K(\cdot, \xi)} \rangle$$

mit  $g \in L^2(\Omega)$ , so ist

$$f(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t_k)S_k(\xi) \quad \xi \in \mathbb{R} \quad (2.29)$$

mit

$$S_k(\xi) = \int_{\Omega} K(x, \xi) \overline{K(x, t_k)} dx = \langle K(\cdot, \xi) | K(\cdot, t_k) \rangle$$

und die Reihe in (2.29) konvergiert absolut sowie gleichmäßig auf jeder Menge  $M \subset X$ , für die  $\|K(\cdot, \xi)\|$  beschränkt ist.

**Beweis:** Es gilt

$$\begin{aligned} \left| f(\xi) - \sum_{|k| \leq N} f(t_k)S_k(\xi) \right| &= \left| \langle g | \overline{K(\cdot, \xi)} \rangle - \sum_{|k| \leq N} f(t_k) \langle K(\cdot, \xi) | K(\cdot, t_k) \rangle \right| \\ &= \left| \left\langle g - \sum_{|k| \leq N} f(t_k) \overline{K(\cdot, t_k)} \middle| \overline{K(\cdot, \xi)} \right\rangle \right| \\ &\leq \left\| g - \sum_{|k| \leq N} f(t_k) \overline{K(\cdot, t_k)} \right\| \left\| K(\cdot, \xi) \right\|. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Hier hat wohl Higgins nicht aufgepaßt und Zayed von ihm abgeschrieben: Zayed schreibt auf S. 46 korrekt, daß Weiss 1957 seine Ergebnisse ankündigte und Kramer 2 Jahre später veröffentlichte. Das Literaturverzeichnis datiert die Arbeit von Kramer aber fälschlicherweise auf 1957 und auch *J. Math. Phys., Band 63* ist falsch. Die Arbeit von Weiss erschien im Band 63 des Bull. Amer. Math. Soc. Der gleiche Fehler findet sich bereits bei Higgins [Hig85] und erneut in dessen Buch von 1996 [Hig96].

Die erste Norm geht für wachsendes  $N$  gegen Null, da

$$f(t_k) = \langle g | \overline{K(\cdot, t_k)} \rangle$$

und somit

$$g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t_k) \overline{K(\cdot, t_k)}$$

ist. Die Reihe in (2.29) konvergiert daher punktweise und unbedingt sowie – falls  $\|K(\cdot, t_k)\|$  auf  $M$  beschränkt ist – auf  $M$  gleichmäßig.  $\square$

Satz 2.21 läßt sich auch auffassen als Verallgemeinerung der Sampling-Theorie für Hilbert-Räume mit reproduzierendem Kern. Higgins gibt folgendes Korollar an.

**Korollar 2.22 (Higgins [Hig96, Kor. 8.5])**

Sei

$$\begin{aligned} \mathcal{K} : L^2(\Omega) &\rightarrow L^2(\Delta) \\ g &\mapsto \int g(x) K(x, \cdot) dx . \end{aligned}$$

Ist  $\mathcal{K}^{-1}$  auf dem Bild von  $\mathcal{K}$  beschränkt, so ist das Bild von  $\mathcal{K}$  ein Hilbert-Raum mit reproduzierendem Kern.

Higgins gibt weiterhin auch eine biorthogonale Version des Kramer-Lemmas an.

**Satz 2.23 (Higgins (op. cit., Th. 8.8))**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$   $L$ -meßbar,  $K(\cdot, \xi), \tilde{K}(\cdot, \xi) \in L^2(\Omega) \forall \xi \in X \subset \mathbb{R}$  und  $\{t_k; k \in \mathbb{Z}\}, \{\tilde{t}_k; k \in \mathbb{Z}\} \subset X$ , so daß  $\varphi_k := K(\cdot, t_k)$  und  $\tilde{\varphi}_k := \tilde{K}(\cdot, \tilde{t}_k)$  biorthonormale Basen von  $L^2(\Omega)$  sind. Gilt

$$f(\xi) = \int_{\Omega} g(x) K(x, \xi) dx \quad \xi \in X$$

mit  $g \in L^2(\Omega)$ , so ist

$$f(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t_k) S_k(\xi) \tag{2.30}$$

und

$$S_k(\xi) = \int_{\Omega} K(x, \xi) \tilde{\varphi}_k(x) dx .$$

Gilt hingegen

$$f(\xi) = \int_{\Omega} h(x) \tilde{K}(x, \xi) dx$$

mit  $h \in L^2(\Omega)$ , so ist entsprechend

$$f(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\tilde{t}_k) \tilde{S}_k(\xi) \quad (2.31)$$

und

$$\tilde{S}_k(\xi) = \int_{\Omega} \tilde{K}(x, \xi) \tilde{\varphi}_k(x) dx .$$

Die Reihe in (2.30) konvergiert gleichmäßig auf jeder Menge  $M \subset X$ , für die  $\|K(\cdot, \xi)\|$  beschränkt ist und entsprechend konvergiert die Reihe in (2.31) gleichmäßig auf jeder Menge  $\tilde{M} \subset X$ , für die  $\|\tilde{K}(\cdot, \xi)\|$  beschränkt ist.

Weitere Resultate im Zusammenhang der Kramer'schen Sampling-Theorie finden sich bei Zayed [Zay93, §3.2]. Dem mehrdimensionalen Fall widmet Zayed ein eigenes Kapitel (op. cit., Kap. 10). Butzer *et al.* [BSS88, §6.4] leiten aus dem Kramer-Lemma das sog. *Walsh Sampling-Theorem* her.

### 2.1.4 Fehler-Analyse

Die strikten Voraussetzungen des WSK-Theorems wie die Bandbeschränktheit der Funktion oder die Äquidistanz der Sampling-Punkte sind in praktischen Anwendungen aufgrund begrenzter Meßgenauigkeit oft nicht einzuhalten oder werden wissentlich zugunsten anderer Vorteile verletzt. Die auftretenden Fehler beeinträchtigen das Rekonstruktionsergebnis und müssen daher berücksichtigt werden.

Der **Aliasing-Fehler**, der auftritt, wenn die gesampelte Funktion nicht bandbeschränkt ist oder die angenommene Bandbreite kleiner als die tatsächliche ist, wurde bereits im Abschnitt 2.1.3 diskutiert. Weiterhin unterscheidet man noch **Cut-off-**, **Amplituden-** und **Jitter-Fehler**. Insbesondere die letzteren beiden spielen jedoch im Zusammenhang der Wavelet-Theorie keine bedeutende Rolle und unterscheiden sich auch in ihrer Behandlung mit statistischen Methoden von den anderen Fehlerarten. Abgesehen von einer Begriffsbestimmung wird daher auf sie nicht weiter eingegangen. Ausführlichere Darstellungen mit weiteren Literaturhinweisen findet man bei Butzer *et al.* [BSS88], Higgins [Hig96, Kap. 11] und Zayed [Zay93, §3.8].

### Cut-Off Fehler

Da eine nicht-triviale bandbeschränkte Funktion keinen endlichen Träger haben kann, müssen zur Auswertung der Sampling-Reihe stets unendlich viele Samples einbezogen werden, eine Forderung, die in praktischen Anwendungen natürlich nicht erfüllt werden kann. Der Fehler, der durch Abschneiden der Sampling-Reihe entsteht, heißt Cut-Off Fehler.

$$\begin{aligned}(T_N f)(x) &= f(x) - \sum_{k=-N}^N f(t_k) \operatorname{sinc} 2\omega(x - t_k) \\ &= \sum_{|k| > N} f(t_k) \operatorname{sinc} 2\omega(x - t_k).\end{aligned}$$

Für den etwas allgemeineren Fall, daß einige Samples an beliebigen Stellen fehlen, wird auch die Bezeichnung *information loss error* verwendet, d.h. Fehler durch Informationsverlust.

Gemäß Butzer *et al.* [BSS88] kann für bandbeschränkte Funktionen  $f \in \mathcal{B}_\omega^p$ ,  $1 \leq p < \infty$  eine Schranke für den Cut-Off Fehler angegeben werden, wenn bekannt ist, daß die Folge der Samples  $f(t_k)$  rasch fällt:  $|f(t_k)| = O(|k|^{-\gamma})$ ,  $|k| \rightarrow \infty$ ,  $\gamma \geq 1$ . Das bekannteste Resultat stammt von Jagerman aus dem Jahr 1966 [Jag66], der  $id^j f \in L^2$  für ein  $j \in \mathbb{N}^*$  fordert. Dann ist  $|(T_N f)(x)| = O(N^{-j-\frac{1}{2}})$  für alle  $x$  mit  $|x| < \frac{N}{\omega}$ . Dieses und weitere Resultate zum Cut-Off Fehler werden bei Zayed [Zay93, §3.8.A] ausführlich diskutiert.

### Amplituden-Fehler

Der Amplituden-Fehler  $A_\varepsilon f$  entsteht, wenn statt der exakten Samples  $f(t_k)$  lediglich Näherungen  $\tilde{f}(t_k)$  vorliegen, deren Abweichung durch  $\varepsilon$  beschränkt ist:

$$(A_\varepsilon f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f(t_k) - \tilde{f}(t_k)) \operatorname{sinc} 2\omega(x - t_k).$$

Spezialfälle des Amplituden-Fehlers sind der *Rundungsfehler* sowie der *Quantisierungsfehler*.

### Jitter-Fehler

Als Jitter bezeichnet man den durch Sampling an ungenauen Sampling-Punkten  $\tilde{t}_k = t_k + \gamma_k$  mit  $|\gamma_k| \leq \delta$  entstehenden Fehler:

$$(J_\delta f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f(t_k) - f(\tilde{t}_k)) \operatorname{sinc} 2\omega(x - t_k).$$

Der Jitter spielt z.B. bei der Compact Disc (CDDA, *compact disc digital audio*) eine Rolle. Eine solche CD speichert Musik in digitaler Form, wobei die zwei Werte eines Bits durch Erhebungen und Vertiefungen in der Informationsschicht des Mediums, sog. *pits* und *lands* repräsentiert werden. Die Abweichung der Länge dieser pits und lands vom Standard bezeichnet man ebenfalls als Jitter.

## 2.2 Mehrdimensionale Samplingtheorie

Naheliegender und für praktische Anwendungen äußerst wichtig ist die Verallgemeinerung der Sampling-Theorie auf höhere Dimensionen, man denke nur an die Digitalisierung von Bildern oder Filmen. Trotzdem hat es lange gedauert, bis der mehrdimensionale Fall in der Literatur entsprechende Beachtung fand, und auch zum heutigen Zeitpunkt sind noch viele Fragen offen.

Das direkte Analogon zum WSK-Theorem ist das auf E. Parzen zurückgehende Sampling-Theorem für bandbeschränkte Funktionen  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , deren Bandregion die Gestalt eines  $n$ -dimensionalen Intervalls hat. Zusammen mit einer Betrachtung des Begriffs der Bandbeschränktheit in höheren Dimensionen bildet es den Inhalt des ersten Unterabschnitts.

Der nachfolgende Paragraph behandelt den Fall regulären Samplings für allgemeinere Bandregionen. Die Qualität und Komplexität der Resultate hängt stark von der Geometrie dieser Bandregion ab – eine Erfahrung, die man bereits im Fall des eindimensionalen Multi-Band Samplings macht. Die zur Diskussion dieser Ergebnisse nötigen Begriffe aus der Gittertheorie sowie Aussagen über selbstaffine Mengen werden im Anhang dieses Kapitels bereitgestellt.

Den Abschluß der Betrachtungen zur mehrdimensionalen Sampling-Theorie bildet ein Abschnitt zum irregulären Sampling. Aufgrund der untergeordneten Bedeutung für die Theorie der Skalierungsfunktionen beschränkt sich die Darstellung auf einen kurzen Überblick.

Wie bereits angedeutet existiert nur wenig Literatur zum mehrdimensionalen Sampling. Der hervorragende Artikel von Butzer *et al.* [BSS88] aus dem Jahre 1988 im Umfang von 70 Seiten widmet dem mehrdimensionalen Fall nicht einmal 3 Seiten. Die letzte der fünf Kurzgeschichten von Higgins über Kardinalreihen aus dem Jahr 1985 [Hig85] läßt keinen Zweifel daran, daß man sich noch in einem frühen Stadium der Entwicklung befindet. Allerdings sind in den 15 Jahren seit deren Erscheinen vielversprechende neue Ergebnisse erzielt worden. Dubois [Dub85] gibt eine Einführung in die Theorie des regulären Samplings in mehreren Dimensionen im Kontext der Bild-Rekonstruktion, ebenso Kovačević/Vetterli [KV92] im Zusammenhang mit  $n$ -dimensionalen

Rekonstruktions-Filtern. Zayed gibt im Kapitel 9 seines Buchs von 1993 [Zay93] eine Einführung in die Anfang der Neunziger Jahre von Feichtinger und Gröchenig entwickelte Sampling-Theorie und das Kapitel 10 bei Higgins [Hig96] bildete die Grundlage zur Darstellung des regulären Samplings im Abschnitt 2.2.2.

### 2.2.1 Bandbeschränktheit in höheren Dimensionen

Die nachfolgende Definition verallgemeinert den Begriff der Bandbeschränktheit in einer Dimension aus Definition 2.1 auf höhere Dimensionen.

**Definition 2.24**

Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und meßbar. Eine Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  heißt **bandbeschränkt mit Bandregion  $B$** , wenn  $\text{supp } \hat{f} \subseteq B$  ist. Hat  $B$  die Gestalt eines  $n$ -dimensionalen Intervalls,

$$B = I_\omega^n := \prod_{i=1}^n [-\omega_i, \omega_i] \quad \omega_i \in \mathbb{R}_+^*, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.32)$$

so sei

$$V_\omega := \{f \in L^2(\mathbb{R}^n); \text{supp } \hat{f} \subseteq I_\omega^n\}$$

die Menge der  **$\omega$ -bandbeschränkten Funktionen**. Für eine Funktion  $f$  mit Bandregion  $B$  heißt analog zum eindimensionalen Fall  $\sup_{x \in \text{supp } \hat{f}} |x|$  **Bandbreite** von  $f$  und  $2 \sup_{x \in \text{supp } \hat{f}} |x|$  **Nyquist-Rate**.

Für  $f \in V_\omega$  hat E. Parzen [Par56] bereits 1956 das WSK-Theorem 2.2 entsprechend verallgemeinert.

**Satz 2.25 (Parzen)**

Sei  $f \in V_\omega$ ,  $\omega \in (\mathbb{R}_+^*)^n$  und für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  sei  $\frac{x}{y} := (\frac{x_1}{y_1}, \dots, \frac{x_n}{y_n})$ . Dann ist

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f\left(\frac{k}{2\omega}\right) \text{sinc}(2\omega x - k) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

und die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.

Der Beweis ist analog zu dem des WSK-Theorems.

Satz 2.25 zeigt, daß auch im Mehrdimensionalen eine Funktion  $f \in V_\omega$  durch ihre Samples  $f(\frac{k}{2\omega})$ ,  $k \in \mathbb{Z}^n$  eindeutig bestimmt ist und aus ihnen rekonstruiert werden kann. Definiert man den komponentenweise gebildeten Kehrwert des Abstands der Sampling-Punkte als **Sampling-Rate**, so ist auch hier die minimale Sampling-Rate gleich der Nyquist-Rate. Dabei wird jede Komponente einzeln mit der jeweiligen (eindimensionalen) Nyquist-Rate gesampelt.

## 2.2.2 Reguläres Sampling

Im folgenden gelten die Bezeichnungen aus dem Anhang 2.B, insbesondere sei  $\Gamma = A\mathbb{Z}^n$  ein vollständiges Gitter im  $\mathbb{R}^n$ ,  $B = A^T$  und  $\Lambda$  das zu  $\Gamma$  duale Gitter, also  $\Lambda = B^{-1}\mathbb{Z}^n$ . Ferner seien die nachfolgend häufiger auftretenden Fundamentalbereiche von Gittern stets meßbar.

### Lemma 2.26

Seien  $P$  und  $Q$  zwei Fundamentalbereiche von  $\Lambda$ , so gilt

$$\int_P e_g(\xi) d\xi = \int_Q e_g(\xi) d\xi \quad \forall g \in \Gamma .$$

### Beweis:

Da  $P, Q$  Fundamentalbereiche zu  $\Lambda$  sind, ist

$$\sum_{h \in \Lambda} \chi_Q(\cdot - h) = 1 = \sum_{h \in \Lambda} \chi_P(\cdot - h) .$$

Somit folgt unter Anwendung des Satzes von Lebesgue

$$\begin{aligned} \int_P e_g(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_P(\xi) e_g(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{h \in \Lambda} \chi_Q(\xi - h) \chi_P(\xi) e_g(\xi) d\xi \\ &= \sum_{h \in \Lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Q(\xi - h) \chi_P(\xi) e_g(\xi) d\xi \\ &= \sum_{h \in \Lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Q(\xi) \chi_P(\xi + h) e_g(\xi + h) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Q(\xi) \sum_{h \in \Lambda} \chi_P(\xi + h) e_g(\xi + h) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Q(\xi) e_g(\xi) d\xi \\ &= \int_Q e_g(\xi) d\xi , \end{aligned}$$

denn  $e_g(h) = e^{2\pi i \langle g|h \rangle} = e^{2\pi i \langle Ak|B^{-1}l \rangle}$  mit  $k, l \in \mathbb{Z}^n$ , also  $e_g(h) = e_k(l) = 1$ .

□

**Lemma 2.27**

Sei  $P$  ein Fundamentalbereich zum Gitter  $\Lambda$  und

$$S(x) := \frac{1}{\lambda(P)} \int_P e_x(\xi) d\xi = \frac{1}{\lambda(P)} (\overline{\mathcal{F}}\chi_P)(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.33)$$

die **Sampling-Funktion** zu  $P$  und  $\Gamma$ . Dann gilt:

1.)  $S$  ist auf  $\Gamma$  interpolierend, d.h.

$$S(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \in \Gamma, x \neq 0 \end{cases} .$$

2.) Die Exponentiale  $\{\lambda(P)^{-\frac{1}{2}}e_g, g \in \Gamma\}$  bilden eine ONB von  $L^2(P)$ .

**Beweis:**

Zu 1.)  $S(0) = 1$  ist klar.

Ist  $P$  Fundamentalbereich von  $\Lambda$ , so ist auch  $P - \xi_0$ ,  $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$  Fundamentalbereich von  $\Lambda$ . Da nach Lemma 2.26

$$\int_P e_g(\xi) d\xi = \int_{P-\xi_0} e_g(\xi) d\xi \quad \forall g \in \Gamma ,$$

so folgt

$$\int_P e_g(\xi) d\xi = \int_P e_g(\xi + \xi_0) d\xi = e_g(\xi_0) \int_P e_g(\xi) d\xi$$

und damit

$$e_g(\xi_0) = 1 \quad \text{oder} \quad \int_P e_g(\xi) d\xi = 0 .$$

$e_g(\xi_0) = 1 \forall \xi_0 \in \mathbb{R}^n$  kann jedoch nur gelten, wenn  $g = 0$  ist, für  $g \neq 0$  muß folglich

$$\int_P e_g(\xi) d\xi = 0$$

sein.

Zu 2.) Siehe Higgins [Hig96, §14.3].

□

**Satz 2.28**

Sei  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  mit  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $\Gamma, \Lambda$  wie oben,  $S$  die Sampling-Funktion zum Gitter  $\Gamma$  und  $P$  ein Fundamentalbereich für  $\Lambda$ . Dann gilt:

- 1.) Ist  $f$  bandbeschränkt mit Bandregion  $P$ , so gilt das  $n$ -dimensionale Sampling-Theorem

$$f(x) = \sum_{g \in \Gamma} f(g)S(x - g) \quad (2.34)$$

und die Reihe konvergiert in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  sowie gleichmäßig auf  $\mathbb{R}^n$ .

- 2.) Ist  $f$  nicht bandbeschränkt mit Bandregion  $P$ , so gilt für den Aliasing-Fehler

$$|(R_P)(x)| = \left| f(x) - \sum_{g \in \Gamma} f(g)S(x - g) \right| \leq 2 \int_{\mathbb{R}^n \setminus P} |\hat{f}(\xi)| d\xi$$

und die Konstante 2 in dieser Abschätzung ist scharf.

### 2.2.3 Irreguläres Sampling

Für mehrdimensionale bandbeschränkte Funktionen, deren Bandregion die Gestalt eines  $n$ -dimensionalen Intervalls hat, läßt sich für den Fall irregulären Samplings ein Sampling-Theorem analog dem Satz 2.8 von Paley-Wiener durch Verallgemeinerung des Satzes 2.25 von Parzen gewinnen.

#### Satz 2.29 (Paley-Wiener-Parzen)

Sei  $\{t_k; k \in \mathbb{Z}^n\} \subset \mathbb{R}^n$  und es gelte für die Komponenten  $t_{k,j}$

$$\sup_{k_j \in \mathbb{Z}} |t_{k,j} - k_j| < \frac{1}{4}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Weiterhin seien  $G_j, j = 1, \dots, n$  die durch

$$G_j(z) = (z - t_{0,j}) \prod_{k_j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{t_{k,j}^2}\right)$$

gegebenen ganzen Funktionen. Hat  $f \in V_w$  die Form

$$f(x) = \prod_{j=1}^n f_j(x_j) \quad (x_1, \dots, x_n) = x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.35)$$

so gilt

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(t_k) \tilde{S}_k(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

mit

$$\tilde{S}_k(x) = \prod_{j=1}^n \frac{G_j(x_j)}{G_j'(t_{k,j})(x_j - t_{k,j})}$$

und die Reihe in (2.35) konvergiert lokal gleichmäßig.

Für den Fall allgemeinerer Bandregionen war lange Zeit kein Sampling-Theorem bekannt. Das folgende Resultat von Plancherel/Polya (z.B. bei Triebel [Tri83]) zeigt jedoch, daß auch in diesem Fall prinzipiell eine Rekonstruktion der Funktion möglich ist, es liefert jedoch keinerlei Hinweise, wie ein solches Rekonstruktionsverfahren auszusehen hat.

**Satz 2.30 (Plancherel/Polya)**

Sei  $f \in \mathcal{B}_\Omega^p := \{\eta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n); \text{supp } \hat{\eta} \subset \Omega\}$  und  $\{t_k; k \in \mathbb{Z}^n\}$  eine geeignete Menge von Sampling-Punkten, z.B. Gitter-Punkte eines Gitters mit hinreichend kleiner Schrittweite, so existieren positive Konstanten  $C_1 \leq C_2$  mit

$$C_1 \|\eta\|_p \leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f(t_k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_2 \|\eta\|_p .$$

Unter geeigneten Voraussetzungen an die Sampling-Punkte  $t_k$  (vgl. Satz 2.34) definiert also die  $\ell^p$ -Norm der Samples eine äquivalente Norm für bandbeschränkte Funktionen  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . Eine solche Funktion ist daher durch ihre Samples eindeutig bestimmt, wie sie aus diesen rekonstruiert werden kann ist jedoch unklar.

Ein neuer vielversprechender Ansatz zur Lösung dieses Problems ist die von Feichtinger und Gröchenig anfang der Neunziger Jahre entwickelte Theorie. Für eine Einführung in diese Thematik sei auf Zayed [Zay93, Kap. 9] verwiesen.

Mit der von Landau [Lan67a],[Lan67b] eingeführten Verallgemeinerung der Nyquist-Sampling-Rate, der *Nyquist-Landau Sampling-Dichte* beschließen wir die Ausführungen zur Sampling-Theorie.

**Definition 2.31**

Eine abzählbare Teilmenge  $M := \{t_k; k \in \mathbb{Z}^n\} \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **gleichmäßig diskret**, falls  $0 < \delta \leq |t_k - t_l|$  für alle  $t_k, t_l \in M, k \neq l$  gilt. Dann heißt  $\delta$  **Separation** von  $M$ .

Analog zu (2.28) sei

$$PW_B := \{f \in L^2(\mathbb{R}^n); \text{supp } \hat{f} \subseteq B\}$$

der Paley-Wiener-Raum der Funktionen  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  mit Bandregion  $B$ .

**Definition 2.32**

Eine gleichmäßig diskrete Menge  $M = \{t_k; k \in \mathbb{Z}^n\}$  heißt

- 1.) **Sampling-Menge** für  $PW_B$ , falls eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  existiert mit

$$\|f\|_2^2 \leq c \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f(t_k)|^2 \quad \forall f \in PW_B ;$$

2.) **Interpolations-Menge** für  $PW_B$ , falls gilt:

$$\forall (c_k) \in \ell^2(\mathbb{Z}^n) \exists f \in PW_B \quad \text{mit} \quad f(t_k) = c_k, \quad k \in \mathbb{Z}^n ;$$

3.) **Rekonstruktions-Menge** für  $PW_B$ , falls gilt:

$$\forall f \in PW_B \text{ mit } f(t_k) = 0 \quad \forall k \text{ ist } f \equiv 0 .$$

Sei  $M$  gleichmäßig diskret, so bezeichne  $N^+(rJ)$  und  $N^-(rJ)$  für  $J \subset \mathbb{R}^n$  kompakt mit  $\lambda(J) = 1$  und  $r \in \mathbb{R}_+^*$  die größte bzw. kleinste Anzahl von Punkten aus  $M$ , die allesamt Elemente einer translatierten Version von  $rJ$  sind. Im eindimensionalen Fall sind also  $N^+(rJ)$  und  $N^-(rJ)$  die größte bzw. kleinste Anzahl von Punkten aus  $M$  in einem beliebigen Intervall der Länge  $r$ . Weiterhin seien

$$D^+(J, M) := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{N^+(rJ)}{r^n} \quad , \quad D^-(J, M) := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{N^-(rJ)}{r^n}$$

die obere bzw. untere Dichte von  $M$ . Bereits unter schwachen Voraussetzungen hängen diese Werte nicht von der Gestalt des Kompaktums  $J$  ab. Landau beweist folgendes Lemma [Lan67a, Lem. 4].

**Lemma 2.33**

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  gleichmäßig diskret und  $I^n$  das  $n$ -dimensionale Einheitsintervall. Ist  $J$  kompakt mit  $\lambda(J) = 1$  und der Rand von  $J$  ist Nullmenge, so gilt

$$D^+(I^n, M) = D^+(J, M) \quad , \quad D^-(I^n, M) = D^-(J, M) .$$

Man schreibt daher kurz

$$D^+(M) := D^+(J, M) \quad , \quad D^-(M) := D^-(J, M) .$$

Im Falle des regulären Samplings sind obere und untere gleichmäßige Dichte identisch. Ist  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  ein Sampling-Gitter, so gilt für die Anzahl  $\rho$  der Gitterpunkte von  $\Gamma$  im  $n$ -dimensionalen halboffenen Einheitsintervall  $I^n$  nach Bemerkung 2.46 Punkt 3.)  $\rho = \frac{1}{d(\Gamma)}$ .

**Satz 2.34**

- 1.) Sei  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $M$  Sampling-Menge für  $PW_B$ . Dann ist  $D^-(M) \geq \lambda(B)$ .
- 2.) Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt,  $M$  Interpolationsmenge für  $PW_B$ . Dann ist  $D^+(M) \leq \lambda(B)$ .

Der Satz zeigt, daß die Dichte einer Sampling-Menge stets über einer positiven Schranke liegt, es existieren jedoch Interpolationsmengen mit beliebig kleiner Dichte [Lan67b, S. 1702].

**Definition 2.35**

Die für eine stabile Rekonstruktion kritische Sampling-Dichte  $\lambda(B)$  heißt **Nyquist-Landau Sampling-Dichte** (NL-Sampling-Dichte).

## 2.A Der Sinus Cardinalis

Die Bezeichnung  $\text{sinc}(x)$  (sinus cardinalis) für die Funktion  $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$  wurde bereits im Kontext des WSK-Theorems erwähnt. Sie geht, wie Higgins [Hig96, S. 4] vermutet, wahrscheinlich auf Woodward [Woo53] zurück und ist heute in der Literatur gebräuchlich. Es handelt sich bei ihr sozusagen um das Paradebeispiel einer bandbeschränkten Funktion.

Im eindimensionalen Fall ist

$$\begin{aligned} \text{sinc}(x) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e_x(\xi) d\xi \quad x \in \mathbb{R} \\ &= \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Mit  $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  ist

$$\int_I e_x(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \chi_I e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

und somit

$$\text{sinc} = \check{\chi}_I. \quad (2.36)$$

Die sinc-Funktion ist also die Inverse Fourier-Transformierte der charakteristischen Funktion des Intervalls  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  und damit bandbeschränkt mit Bandbreite  $\frac{1}{2}$ .

Für  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$  definiert man

$$\begin{aligned} \text{sinc}(x) &= \prod_{j=1}^n \text{sinc}(x_j) \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \\ &= \int_{I^n} e_x(\xi) d\xi \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

analog zu (2.36) ist also

$$\text{sinc} = \check{\chi}_{I^n}. \quad (2.37)$$

Die Abbildung 2.3 zeigt die Graphen des sinc und seiner Fourier-Transformierten im Falle  $n = 2$ .

**Eigenschaften der sinc-Funktion**

- 1.) Für
- $\omega \in (\mathbb{R}_+^*)^n$
- ist

$$2\omega \operatorname{sinc}(2\omega \cdot) = \check{\chi}_{I_\omega^n}$$

mit  $I_\omega^n$  wie in (2.32) definiert.

- 2.) Es gilt

$$\operatorname{sinc}(k) = \delta_{0,k} \quad k \in \mathbb{Z}^n .$$

Diese sog. *Interpolationseigenschaft* wurde im Kapitel 2 bereits mehrfach erwähnt, vgl. Definition 2.16 oder auch Lemma 2.27. Sie spielt im Zusammenhang mit Skalierungsfunktionen ebenfalls eine wichtige Rolle, vgl. dazu Kapitel 3.2.2.

- 3.) Wie man sofort sieht, ist

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \operatorname{sinc}(\cdot - k) = 1 .$$

Auch dies ist eine wichtige Eigenschaft von Skalierungsfunktionen. Es wird sich zeigen, daß sie unter bestimmten Bedingungen äquivalent zur Interpolationseigenschaft ist (vgl. Lemma 3.24).

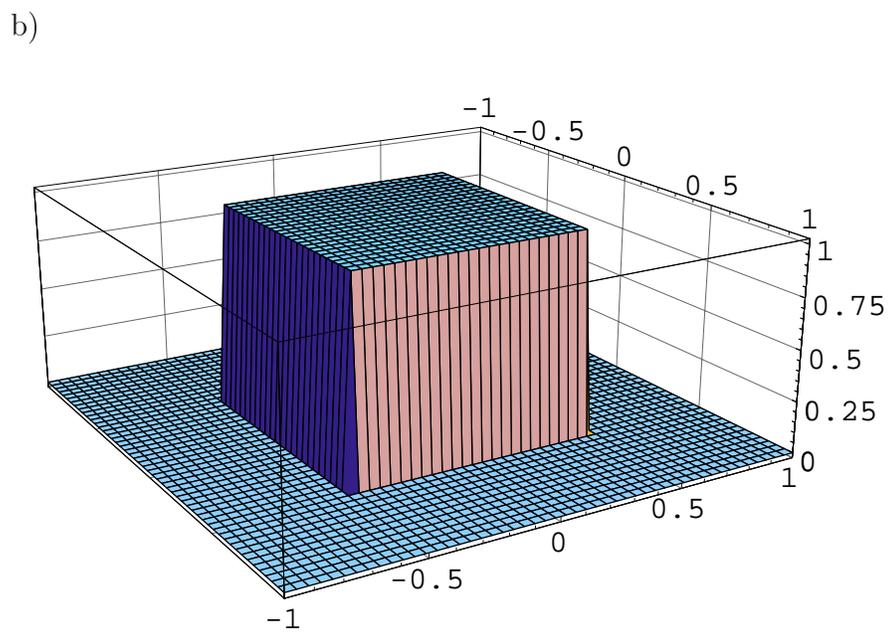
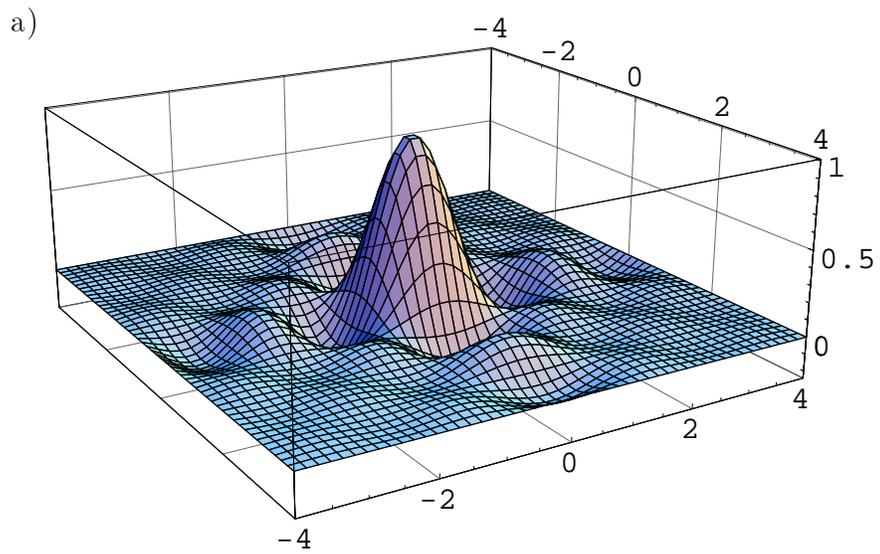
- 4.) Im Abschnitt zum Oversampling wurde bereits erwähnt, daß die sinc-Funktion im Unendlichen nur sehr langsam abklingt. In der Tat ist  $\operatorname{sinc} \notin L^1$ , wie man mittels der Fourier-Umkehrformel leicht erkennt, denn die charakteristische Funktion ist nicht stetig.
- 5.) Die sinc-Funktion ist idempotent bezüglich der Faltung in  $L^2$ . Nach Satz 1.45 ist nämlich

$$(\operatorname{sinc} * \operatorname{sinc})^\wedge = \chi_{I^n}^2 = \chi_{I^n}$$

und daher

$$\operatorname{sinc} * \operatorname{sinc} = \check{\chi}_{I^n} = \operatorname{sinc} .$$

- 6.) Die Translatierten der sinc-Funktion bilden eine ONB von  $V_{\frac{1}{2}}$ , vgl. Paragraph 3.4.1.
- 7.) Die Funktion  $K(\cdot, \xi) = 2\omega \operatorname{sinc} 2\omega(\cdot - \xi)$  ist der reproduzierende Kern des rk-Hilbert-Raums  $\mathcal{B}_\omega^2$ .



**Abbildung 2.3:** a) Der Sinus Cardinalis und b) seine Fourier-Transformierte.

## 2.B Grundbegriffe aus der Gittertheorie

Reguläres Sampling in höheren Dimensionen entspricht dem Sampling entlang eines Gitters. In diesem Abschnitt sollen daher die Grundbegriffe der Theorie  $n$ -dimensionaler Gitter dargestellt werden, soweit sie für die Ausführungen in den Kapiteln 2 und 3 gebraucht werden. Als Referenz dienten Cassels [Cas71], Ebeling [Ebe94] und Gruber/Lekkerkerker [GL87]. Eine Einführung in die Thematik bieten auch Dubois [Dub85] und Kovačević/Vetterli [KV92].

### Definition 2.36

Ein **Gitter** im  $\mathbb{R}^n$  ist eine Teilmenge  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  mit folgender Eigenschaft: Es existieren linear unabhängige Vektoren  $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}^n$ , für die gilt:

$$\Gamma = \mathbb{Z}b_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}b_m.$$

$\Gamma$  besteht also aus allen ganzzahligen Linearkombinationen der  $b_1, \dots, b_m$ . Ist  $m = n$ , so heißt  $\Gamma$  ein **vollständiges Gitter**. Sei  $B$  die aus den Spaltenvektoren  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  gebildete Matrix, so ist

$$\Gamma = \{Bk, k \in \mathbb{Z}^n\}. \quad (2.38)$$

$B$  heißt **Basis-Matrix** oder im Kontext der Sampling-Theorie **Sampling-Matrix** zum Gitter  $\Gamma$ .

Im folgenden sei unter einem Gitter stets ein vollständiges Gitter zu verstehen.

### Bemerkung 2.37

Gruppentheoretisch formuliert sind die Gitter im  $\mathbb{R}^n$  genau die diskreten Untergruppen der additiven Gruppe  $(\mathbb{R}^n, +)$ .

### Beispiel 2.38

Für die kanonische Basis  $(e_1, \dots, e_n)$  des  $\mathbb{R}^n$  ergibt sich das Gitter  $\Upsilon := \mathbb{Z}^n$ . Damit läßt sich (2.38) umschreiben zu

$$\Gamma = B\Upsilon := \{Bk, k \in \Upsilon\}. \quad (2.39)$$

### Definition 2.39

Sei  $\Gamma$  ein Gitter im  $\mathbb{R}^n$ . Eine Basis  $(b_1, \dots, b_n)$  des  $\mathbb{R}^n$  mit  $\Gamma = \mathbb{Z}b_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}b_n$  heißt **Basis** von  $\Gamma$ .

$\Gamma$  heißt **separabel**, falls eine Basis  $(b_1, \dots, b_n)$  von  $\Gamma$  existiert, so daß die daraus gebildete Basis-Matrix  $B$  Diagonalform hat.

Für ein gegebenes Gitter  $\Gamma$  in  $\mathbb{R}^n$  ist die Basis nicht eindeutig:

**Beispiel 2.40**

Sei  $\Gamma_Q$  das sog. *Quincunx-Gitter*:

$$\Gamma_Q := \{x \in \mathbb{Z}^2; x_1 + x_2 \in 2\mathbb{Z}\}.$$

Mit

$$R := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ist sowohl  $\Gamma_Q = R\Upsilon$  als auch  $\Gamma_Q = S\Upsilon$ . Das Quincunx-Gitter wird am Ende dieses Abschnitts noch näher diskutiert. Dort wird auch klar, daß es sich um ein nicht-separables Gitter handelt.

Im allgemeinen existieren sogar unendlich viele Basen für ein gegebenes Gitter  $\Gamma$ , diese unterscheiden sich jedoch nur durch eine unimodulare Transformation. Genauer gilt folgender Satz.

**Satz 2.41**

Es seien  $A$  und  $B$  zwei Basis-Matrizen zum Gitter  $\Gamma$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1.)  $\Gamma = A\Upsilon = B\Upsilon$ .
- 2.)  $A = EB$ ,  $E \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  unimodular (d.h.  $\det E = \pm 1$ ).

**Beweis:**

Sei zunächst  $\Gamma = A\Upsilon = B\Upsilon$ . Mit  $E := A^{-1}B$  folgt  $E\Upsilon = E^{-1}\Upsilon = \Upsilon$ , also ist  $E, E^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ . Somit sind  $\det E$  und  $\det E^{-1}$  ganzzahlig und wegen  $EE^{-1} = I$  folgt  $\det E = \pm 1$ .

Sei nun umgekehrt  $A = EB$  und  $E \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  mit  $\det E = \pm 1$ , so ist nach der Cramer-Regel auch  $E^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ . Damit gilt  $E\Upsilon \subset \Upsilon \subset E^{-1}\Upsilon \subset \Upsilon$ , d.h.  $E\Upsilon = \Upsilon$  und daher  $B\Upsilon = AA^{-1}B\Upsilon = AE\Upsilon = A\Upsilon = \Gamma$ , d.h.  $B$  ist ebenfalls Basismatrix zum Gitter  $\Gamma = A\Upsilon$ . □

Die Größe

$$d(\Gamma) := |\det B| \tag{2.40}$$

ist also unabhängig von der Wahl der Basis von  $\Gamma$ .  $d(\Gamma)$  heißt **Determinante** von  $\Gamma$ . Für ein vollständiges Gitter  $\Gamma$  ist stets  $d(\Gamma) > 0$ . Im Fall  $\Gamma = \Upsilon$  ist  $d(\Gamma) = d(\Upsilon) = 1$ .

**Definition 2.42**

Sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix mit reellen Einträgen.  $A$  heißt **expandierend**, falls alle (komplexen) Eigenwerte von  $A$  betragsmäßig größer als 1 sind. In diesem Fall ist  $A$  invertierbar.

Ist  $A$  expandierend und  $A\Gamma \subset \Gamma$  (i.e.  $A\Gamma$  ist Teilgitter von  $\Gamma$ , vgl. Definition 2.48), so heißt  $A$  **zulässige Dilatation für  $\Gamma$** .

**Bemerkung 2.43**

- 1.) Eine nicht-singuläre lineare Transformation  $A$  bildet ein Gitter  $\Gamma$  auf das Gitter  $A\Gamma$  ab und für dessen Determinante gilt

$$d(A\Gamma) = |\det A| d(\Gamma). \quad (2.41)$$

- 2.) Vereinfachung:

Nach (2.39) ist jedes Gitter  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  von der Form  $\Gamma = C\Upsilon$  mit einer invertierbaren Matrix  $C$ . Man kann sich daher o.B.d.A. auf den Fall  $\Gamma = \Upsilon = \mathbb{Z}^n$  zurückziehen. Ist  $A$  eine zulässige Dilatation für  $\mathbb{Z}^n$ , so gilt für die kanonischen Einheitsvektoren  $e_j \in \mathbb{R}^n$  in diesem Fall  $Ae_j = a_j \in \mathbb{Z}^n$ , eine für  $\mathbb{Z}^n$  zulässige Dilatationsmatrix  $A$  hat dann also lediglich ganzzahlige Einträge. Insbesondere ist dann  $a := |\det A| \in \mathbb{Z}$ ,  $a \geq 2$ .

**Definition 2.44**

Sei  $(b_1, \dots, b_n)$  eine Basis des Gitters  $\Gamma$ . Die Menge

$$\begin{aligned} P_b &:= \{\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n; \lambda_i \in [0, 1), i = 1, \dots, n\} \\ &= \{Bx; x \in [0, 1)^n\} \end{aligned} \quad (2.42)$$

heißt Grundmasche oder **Fundamental-Parallelotop** des Gitters  $\Gamma$  bezüglich der Gitter-Basis  $(b_1, \dots, b_n)$ .  $P_b$  ist ein zusammenhängendes Repräsentantensystem der Faktorgruppe  $\mathbb{R}^n / \Gamma$ . Allgemeiner bezeichnet man ein nicht notwendigerweise zusammenhängendes Repräsentantensystem als **Fundamentaltbereich**.

**Folgerung 2.45**

Ein Gitter  $\Gamma$  ist genau dann separabel, falls eine Basis  $(b_1, \dots, b_n)$  von  $\Gamma$  existiert, so daß das Fundamental-Parallelotop  $P_b$  von  $\Gamma$  bezüglich dieser Basis die Gestalt eines  $n$ -dimensionalen Intervalls hat.

**Bemerkung 2.46**

- 1.) Für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  ist bei festem  $b \in \mathbb{R}^n$  durch

$$x \sim y : \iff \exists g \in \Gamma \text{ mit } x, y \in P_b + g \quad (2.43)$$

eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{R}^n$  mit Äquivalenzklassen  $P_b + g$ ,  $g \in \Gamma$  gegeben. Damit ist klar, daß die Vereinigung aller Translatierten  $P_b + g$ ,  $g \in \Gamma$  des Fundamental-Parallelotops  $P_b$  den Raum  $\mathbb{R}^n$  überdeckt:

$$\begin{aligned} (P_b + g_1) \cap (P_b + g_2) &= \emptyset \quad \text{für } g_j \in \Gamma, g_1 \neq g_2 \\ \text{und } \mathbb{R}^n &= \bigcup_{g \in \Gamma} (P_b + g) . \end{aligned} \quad (2.44)$$

- 2.) Sei  $\lambda$  das Lebesgue-Maß und  $(e_1, \dots, e_n)$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^n$ .  $P_b$  ist L-meßbar und geht aus  $P_e = [0, 1)^n$  mittels der durch die Matrix  $B$  gegebenen linearen Transformation hervor. Somit liefert der Transformationssatz für das L-Maß

$$\lambda(P_b) = |\det B| \lambda(P_e) = |\det B| .$$

Für das Maß des Fundamental-Parallelotops  $P_b$  gilt daher nach (2.40)

$$\lambda(P_b) = |\det B| = d(\Gamma) . \quad (2.45)$$

Während  $P_b$  also von der speziellen Gitterbasis  $(b_1, \dots, b_n)$  abhängt, ist  $\lambda(P_b)$  davon unabhängig, da die Determinante eines Gitters ebenfalls unabhängig von der speziellen Basis ist.

- 3.) Gemäß der Definition enthält das Fundamental-Parallelotop  $P_b$  zum Gitter  $\Gamma = B\Upsilon$  genau einen Gitterpunkt, nämlich den Ursprung. Ebenso enthält natürlich auch  $P_b + g$ ,  $g \in \Gamma$  lediglich einen Gitterpunkt, nämlich  $g$ . Für die Dichte der Gitterpunkte im  $n$ -dimensionalen halboffenen Einheitsintervall  $[0, 1)^n$  gilt daher:

$$\rho = \frac{1}{d(\Gamma)} . \quad (2.46)$$

Für das Sampling mit Gitter  $\Gamma$  ist  $\rho$  gerade die Nyquist-Landau Sampling-Dichte, vgl. Definition 2.35.

- 4.) Ist  $\Gamma = B\Upsilon$  ein Gitter im  $\mathbb{R}^n$ , so induziert die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{T}^n := \{z \in \mathbb{C}^n; |z| = 1\} \\ Bk &\mapsto e^{2\pi i k} \end{aligned}$$

einen Gruppenisomorphismus der Faktorgruppe  $\mathbb{R}^n/\Gamma$  in die  $n$ -dimensionale Torusgruppe  $\mathbb{T}^n$ .



**Definition 2.47**

Die Menge

$$V_\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq |x - g| \quad \forall g \in \Gamma\} \quad (2.47)$$

aller Punkte  $x \in \mathbb{R}^n$ , deren Abstand zum Ursprung kleiner oder gleich ihrem Abstand zu irgendeinem Gitterpunkt  $g \in \Gamma$  ist, heißt **Voronoi-Zelle** des Gitters  $\Gamma$  (nach G. Voronoi) oder auch **Dirichlet-Region** (nach G.L. Dirichlet).

Die Voronoi-Zelle ist kein Fundamental-Parallelotop von  $\Gamma$  im Sinne der Definition 2.44, analog zu (2.44) gilt jedoch

$$(V_\Gamma + g_1) \cap (V_\Gamma + g_2) \simeq \emptyset \quad \text{für } g_1, g_2 \in \Gamma, g_1 \neq g_2 \quad \text{und} \quad \mathbb{R}^n = \bigcup_{g \in \Gamma} (V_\Gamma + g).$$

Zur Notation „ $\simeq$ “ vgl. Bezeichnung 2.54.

**Definition 2.48**

Seien  $\Gamma$  und  $\Lambda$  Gitter im  $\mathbb{R}^n$ . Ist  $\Lambda \subset \Gamma$ , so heißt  $\Lambda$  **Teilgitter** von  $\Gamma$ .

Dann ist  $d(\Lambda) = k d(\Gamma)$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ . Der Quotient  $\frac{d(\Lambda)}{d(\Gamma)}$  heißt **Index** von  $\Lambda$  in  $\Gamma$  und wird mit  $[\Gamma : \Lambda]$  bezeichnet.

Als Untergruppe von  $\Gamma$  operiert  $\Lambda$  auf  $\Gamma$  durch Translationen. Die Elemente der **Faktorgruppe**  $\Gamma/\Lambda$

$$g + \Lambda = \{g + h; h \in \Lambda\} \quad g \in \Gamma \quad (2.48)$$

heißen **Nebenklassen** von  $\Lambda$  in  $\Gamma$ , für ihre Anzahl gilt  $|\Gamma/\Lambda| = [\Gamma : \Lambda]$ . Sie sind die Äquivalenzklassen zur Äquivalenzrelation

$$g \sim h : \iff g - h \in \Lambda \quad g, h \in \Gamma. \quad (2.49)$$

**Bemerkung 2.49**

Ist  $A$  eine zulässige Dilatation für  $\Gamma$ , so ist einerseits nach (2.41)

$$d(A\Gamma) = |\det A| d(\Gamma),$$

andererseits gilt nach Definition 2.48

$$d(A\Gamma) = k d(\Gamma) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Somit ist  $\det A \in \mathbb{Z}$  und da  $A$  expandierend ist  $|\det A| \geq 2$ .

**Definition 2.50**

Ein Gitter  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  heißt **ganzzahlig**, falls gilt:

$$\langle g|h \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall g, h \in \Gamma.$$

**Definition 2.51**

Ist  $\Gamma = A\Upsilon$  ein Gitter im  $\mathbb{R}^n$ , so ist

$$\{x \in \mathbb{R}^n; \langle x|g \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall g \in \Gamma\}$$

wiederum ein Gitter im  $\mathbb{R}^n$ , und zwar das Gitter mit Basismatrix

$A^* = (A^{-1})^T$ .  $\Gamma^* := A^*\Upsilon$  heißt reziprokes oder **duales Gitter** zu  $\Gamma$  und  $(a_1^*, \dots, a_n^*)$  die zu  $(a_1, \dots, a_n)$  **duale (Gitter-)Basis**.

**Definition 2.52**

Ein Gitter  $\Gamma$  heißt **unimodular**, falls  $d(\Gamma) = 1$  ist. Dann ist  $\Gamma = \Gamma^*$ .

**Lemma 2.53 (Eigenschaften des dualen Gitters)**

1.) Wegen  $\det A^* = \frac{1}{\det A}$  ist  $d(\Gamma^*)d(\Gamma) = 1$ .

2.)  $\Gamma^{**} = \Gamma$

3.)  $\Upsilon^* = \Upsilon$ , d.h.  $\Upsilon$  ist ganzzahlig und unimodular.

4.) Ist  $\Lambda$  Teilgitter von  $\Gamma$ , so ist  $\Gamma^*$  Teilgitter von  $\Lambda^*$ .

**Beweis:**

Zu 4.)  $\Lambda$  ist Teilgitter von  $\Gamma$  genau dann, wenn aus  $g \in \Lambda$  stets  $g \in \Gamma$  folgt. Ist  $h \in \Gamma^*$  so ist p.d.  $\langle h|g \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall g \in \Gamma$ . Da  $\Lambda$  Teilgitter von  $\Gamma$  ist, gilt dies insbesondere für  $g \in \Lambda$ . Somit ist  $\langle h|g \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall g \in \Lambda$ , d.h.  $h \in \Lambda^*$ . □

**Das Quincunx-Gitter**

lat. **quinc-unx, -uncis**  $m$  (quinque, uncia)

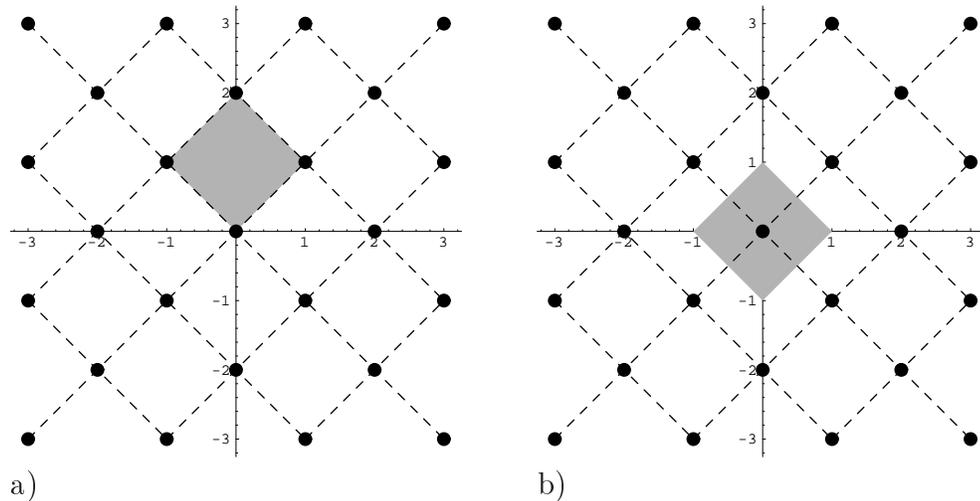
a) fünf Zwölftel

b) die fünf Augen auf dem Würfel; übertr. Figur eines Quincunx, Kreuzstellung

Das Quincunx-Gitter

$$\Gamma_Q := \{x \in \mathbb{Z}^2; x_1 + x_2 \in 2\mathbb{Z}\}$$

als einfachstes nicht-separables Gitter mit  $d(\Gamma_Q) = 2$  wird in der Literatur häufig verwendet, so z.B. bei Vetterli/Kovačević [VK95, S. 178,196,410,434], Cohen/Daubechies [CD93, S. 82ff] und Glassner [Gla95, S. 420].



**Abbildung 2.4:** Quincunx-Gitter a) mit dem zu  $R$  gehörenden Fundamental-Parallelotop und b) mit Voronoi-Zelle.

Repräsentationsmatrizen für dieses Gitter sind z.B.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung 2.4 zeigt das Quincunx-Gitter mit dem zur Matrix  $R$  gehörenden Fundamental-Parallelotop sowie mit der Voronoi-Zelle. Man erkennt sofort, daß für dieses Gitter kein Fundamentalbereich in der Gestalt eines zwei-dimensionalen Intervalls existiert, oder anders ausgedrückt: Es existiert keine Basis dieses Gitters aus zwei jeweils achsenparallelen Basisvektoren. Nach Definition 2.39 handelt es sich somit um ein nicht-separables Gitter.

Für die Darstellung des Gitters ist die verwendete Basismatrix natürlich unerheblich. Operationen auf dem Gitter (z.B. Sampling, Filterung) können jedoch für unterschiedliche Basismatrizen zu völlig unterschiedlichen Ergebnissen führen. Downsampling bezüglich dieses Gitters involviert z.B. die Basismatrix. Wird nun das Downsampling iteriert, wie das insbesondere bei der Wavelet-Transformation in mehreren Skalen geschieht, so läßt sich der gesamte Sampling-Prozeß durch eine Potenz der Basismatrix beschreiben. Während aber  $S^2 = 2I$  gilt, d.h. zu einem separablen Gitter führt, ist erst  $R^4 = -4I$  separabel und  $T^n$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}^*$  nicht-separabel.

## 2.C Selbstaffine Mengen

Eng verbunden mit den  $n$ -dimensionalen Gittern ist der Begriff der *selbstaffinen Menge*. Grob gesprochen handelt es sich um Mengen, die sich durch eine endliche Vereinigung skaliert und translatierter Kopien ihrer selbst darstellen lassen. Sie tauchen z.B. im Kontext der Verallgemeinerung der Haar-Basis auf höhere Dimensionen auf [GM92], [LW96a], siehe auch den Paragraphen 3.6.2 der vorliegenden Arbeit. Ihre Bedeutung im Zusammenhang mit sog. *Kachelungen* des  $\mathbb{R}^n$  wurde von Lagarias und Wang in einer Reihe von Artikeln untersucht [LW96c], [LW96b], [LW97]. Weitere Anwendungsgebiete sind Fraktale [Bar88], Radix-Darstellungen [Odl78], [Gil81] und Markov-Zerlegungen [Bow78].

Wie üblich sei  $\lambda$  das Lebesgue-Maß auf dem  $\mathbb{R}^n$ .

### Bezeichnung 2.54

Für zwei Mengen  $P, Q \subset \mathbb{R}^n$  schreibt man  $P \simeq Q$ , falls sie bis auf Nullmengen gleich sind, d.h. falls gilt:

$$\lambda(P \setminus Q) = \lambda(Q \setminus P) = 0 .$$

Ist  $P \cap Q \simeq \emptyset$ , so heißen  $P$  und  $Q$  **quasi-disjunkt**.

### Definition 2.55

Eine kompakte  $L$ -meßbare Menge  $Q \subset \mathbb{R}^n$  mit positivem Maß heißt **selbstaffin**, falls gilt: Es existiert eine expandierende Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $|\det A| = a \in \mathbb{Z}$  sowie eine Menge  $\mathcal{R} = \{\kappa_0, \dots, \kappa_{a-1}\} \subset \mathbb{R}^n$  mit folgenden Eigenschaften:

1.) Für  $Q$  gilt die Funktionalgleichung

$$AQ = \bigcup_{i=0}^{a-1} (Q + \kappa_i) . \quad (2.50)$$

2.) Für  $\kappa_i, \kappa_j \in \mathcal{R}$ ,  $i \neq j$  sind  $(Q + \kappa_i)$  und  $(Q + \kappa_j)$  quasi-disjunkt.

Ist  $A$  eine Ähnlichkeitsmatrix, d.h.  $A = \sigma B$ ,  $B$  Orthogonalmatrix,  $\sigma > 1$ , so heißt  $Q$  **selbstähnlich**. Dieser Fall wird in der Literatur zum Teil gesondert betrachtet, entsprechende Hinweise finden sich bei Lagarias/Wang [LW96c].

### Bemerkung 2.56

1.)  $Q$  ist durch die **Radix-Darstellung**

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ; x = \sum_{j=1}^{\infty} A^{-j} \kappa_{i_j}, \kappa_{i_j} \in \mathcal{R} \right\} \quad (2.51)$$

explizit gegeben [GM92, Lem. 3]. Für  $n = 1$  sind Darstellungen der Form (2.51) wohlbekannt, man denke z.B. an  $p$ -adische Brüche. Die Elemente der Menge  $\mathcal{R} = \{\kappa_0, \dots, \kappa_{a-1}\} \subset \mathbb{R}^n$  werden daher auch als **Ziffern** (engl. *digits*) bezeichnet.

Die Gleichung (2.51) zeigt, daß  $Q$  durch  $A$  und  $\mathcal{R}$  eindeutig bestimmt ist, die Umkehrung ist jedoch i.a. falsch. In der Literatur wird dafür als Beispiel der **Twin-Dragon** angegeben. Wie die Abbildung 2.5 zeigt, ergeben sich allerdings für

$$Q(A_1, \mathcal{R}) \quad , \quad \mathcal{R} = \{\kappa_0, \kappa_1\}$$

wobei

$$A_1 = R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \kappa_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \kappa_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$Q(A_2, \mathcal{R})$$

mit

$$A_2 = 2A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und  $\mathcal{R}$  wie oben unterschiedliche Mengen. Die Matrix  $A_1$  auf einen Vektor angewendet bewirkt dessen Drehung um  $45^\circ$  (gegen den Uhrzeigersinn) verbunden mit einer Streckung um den Faktor  $\sqrt{2}$ . Dieser Fall wird bei Gröchenig/Madych diskutiert [GM92, Kap. V-C, Bsp. 2], Abbildung 2.5 a) zeigt die Menge  $Q(A_1, \mathcal{R})$ . Entsprechend bewirkt die Matrix  $A_2$  eine Drehung um  $45^\circ$  mit dem Uhrzeigersinn verbunden mit einer Streckung um den Faktor  $\sqrt{2}$ . Cohen/Daubechies [CD93, Anh. B] behandeln diesen Fall, die sich ergebende Menge  $Q(A_2, \mathcal{R})$  zeigt die Abbildung 2.5 b).

2.) Die Funktionalgleichung (2.50) läßt sich äquivalent umformen zu

$$Q(A, \mathcal{R}) = \bigcup_{i=0}^{a-1} A^{-1}(Q + \kappa_i) . \quad (2.52)$$

Auch unter schwächeren Bedingungen an  $A$  und  $\mathcal{R}$  existiert eine eindeutig bestimmte Menge  $Q$ , die der Gleichung (2.52) genügt. Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  expandierend,  $\mathcal{R} = \{\kappa_0, \dots, \kappa_{l-1}\}$  eine endliche Menge von Ziffern und  $1 < \lambda < \min_{i=1}^n |\lambda_i|$  für ein  $\lambda > 1$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  die Eigenwerte von  $A$ . Dann definiert

$$\|x\|' := \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j |A^{-j}x|$$

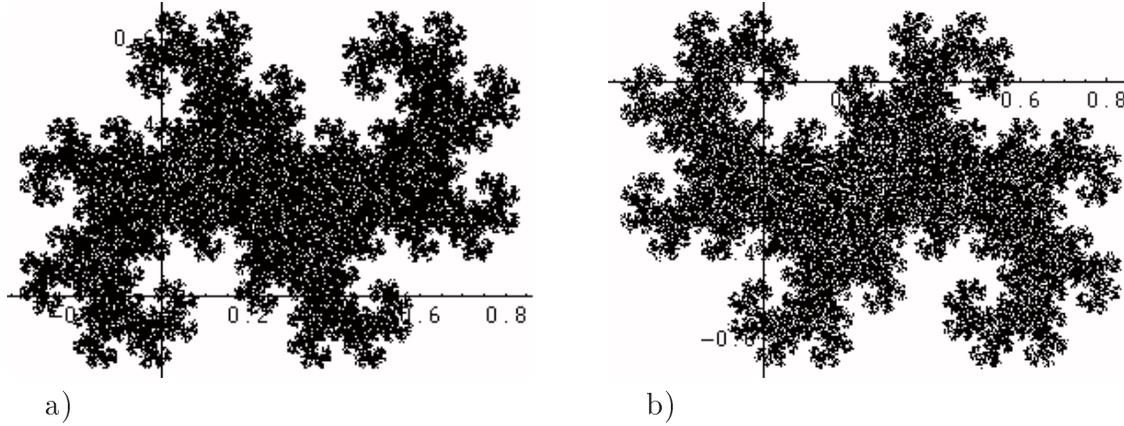


Abbildung 2.5: Der *Twin-Dragon*.

eine äquivalente Norm auf  $\mathbb{R}^n$  (vgl. Anhang 3.A) und die Abbildungen

$$\phi_i := A^{-1}(\cdot + \kappa_i) \quad 0 \leq i \leq l-1$$

sind in der durch diese Norm erzeugten Metrik kontrahierend [LW96c, S. 30]. Gleichung (2.52) schreibt sich dann in der Form

$$Q = \bigcup_{i=0}^{l-1} \phi_i(Q). \quad (2.53)$$

Nach Barnsley [Bar88] heißt  $\mathcal{I} := \{\phi_i, 0 \leq i \leq l-1\}$  *Iterated Function System*, kurz **IFS**, und  $Q$  heißt **Attraktor** des IFS, dieser hat jedoch nur in speziellen Fällen positives Maß. Insbesondere ist für eine selbstaffine Menge  $Q$  die Voraussetzung  $|\det A| = |\mathcal{R}| = a$  notwendig dafür, daß  $Q$  positives Maß hat [LW96c, S. 21].

Lagarias und Wang (op. cit.) geben Bedingungen für die Existenz selbstaffiner Mengen an. Weiterhin wird gezeigt, daß jede selbstaffine Menge  $Q$  zugleich eine *Kachelung* des  $\mathbb{R}^n$  liefert (op. cit., Theorem 1.2).

### Definition 2.57

Sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$   $L$ -meßbar mit positivem Maß,  $S \subset \mathbb{R}^n$ .  $Q$  heißt **S-Kachel** des  $\mathbb{R}^n$  (die  $S$ -Translatierten von  $Q$  bilden eine *Kachelung*, engl. *tiling* oder *tessellation*, des  $\mathbb{R}^n$ ), falls gilt:

$$1.) \quad \bigcup_{\tau \in S} (Q + \tau) \simeq \mathbb{R}^n.$$

2.) Für  $\tau_i, \tau_j \in S, i \neq j$  sind  $(Q + \tau_i)$  und  $(Q + \tau_j)$  quasi-disjunkt.

**Bemerkung 2.58**

Man kann o.B.d.A.  $0 = \kappa_0 \in \mathcal{R}$  annehmen:

Seien  $Q_1 = Q_1(A, \mathcal{R}_1)$  mit  $\mathcal{R}_1 = \{\kappa_0, \dots, \kappa_{l-1}\}$  und  $\mathcal{R}_2 = x_0 + \mathcal{R}_1, x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Dann ist

$$\begin{aligned}
 Q_2 &:= Q_1 + (A - I)^{-1}x_0 \\
 &= \bigcup_{i=0}^{l-1} (A^{-1}Q_1 + A^{-1}\kappa_i) + A^{-1}(A - I)^{-1}(x_0 + (A - I)x_0) \\
 &= \bigcup_{i=0}^{l-1} A^{-1}Q_1 + A^{-1}\kappa_i + A^{-1}(A - I)^{-1}x_0 + A^{-1}x_0 \\
 &= \bigcup_{i=0}^{l-1} A^{-1}(Q_1 + (A - I)^{-1}x_0) + A^{-1}(\kappa_i + x_0) \\
 &= \bigcup_{i=0}^{l-1} A^{-1}(Q_2 + \tau_i) \quad \tau_i = \kappa_i + x_0
 \end{aligned}$$

Die Translation aller  $\kappa_i \in \mathcal{R}$  um  $x_0$  bewirkt also eine Translation von  $Q$  um  $(A - I)^{-1}x_0$ , die sich weder auf das Maß von  $Q$  noch auf die Kachelungseigenschaften auswirkt.

In der vorliegenden Arbeit sind **ganzzählig selbstaffine** Mengen von besonderer Bedeutung, vgl. Paragraph 3.6.2. Hierbei handelt es sich um den Spezialfall selbstaffiner Mengen  $Q(A, \mathcal{R})$  mit  $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  und  $\mathcal{R} \subset \mathbb{Z}^n$ . Auch dieser Fall wurde von Lagarias und Wang in zwei Artikeln [LW96b],[LW97] eingehend untersucht. Der nachfolgende Satz faßt die wichtigsten Ergebnisse zusammen.

**Satz 2.59**

- 1.) Sei  $A$  expandierend mit ganzzahligen Einträgen,  $|\det A| = a$  und  $\mathcal{R} = \{\kappa_0, \dots, \kappa_{a-1}\} \subseteq \mathbb{Z}^n$  ein Repräsentantensystem für  $\mathbb{Z}^n / a\mathbb{Z}^n$ , so hat  $Q(A, \mathcal{R})$  positives Maß [LW96c, Kor. 1.1].
- 2.) Ist  $Q$  ganzzählig selbstaffin, so existiert eine Menge  $S \subset \mathbb{Z}^n$ , für die  $Q$  eine  $S$ -Kachel ist (op. cit., Th. 1.2).
- 3.) Für das Lebesgue-Maß einer ganzzählig selbstaffinen Menge  $Q$  gilt  $\lambda(Q) \in \mathbb{N}$  [LW96b, Th. 1.1].

- 4.) Ist  $Q$  ganzzahlig selbstaffin mit  $\lambda(Q) = 1$ , so ist  $\mathcal{R}$  ein Repräsentantensystem von  $\mathbb{Z}^n / A\mathbb{Z}^n$  (op. cit., Kor. 1.1a) und  $Q$  ist  $\mathbb{Z}^n$ -Kachel (op. cit., Kor. 1.1b).

## KAPITEL 3

---

# Interpolierende Skalierungsfunktionen

Die Idee, Funktionen in verschiedenen Auflösungsstufen, i.e. Skalen, zu betrachten, ist nicht erst seit Formulierung der Theorie der *Mehrfachauflösungen* durch Mallat und Meyer im Jahr 1986 bekannt. Bereits Burt und Adelson [BA83] verfolgten mit ihrem Pyramiden-Schema zur Bildanalyse diesen Gedanken und die von Dubuc [Dub86] vorgestellte und später in Zusammenarbeit mit Deslaurier und Dubois [DDD91] verallgemeinerte *Iterative Interpolation* kennt schon *Zwei-Skalen-Relationen*, wie sie bei *Skalierungsfunktionen* und *Wavelets* auftreten.

Durch die bahnbrechende Arbeit von Daubechies [Dau88] 1988 wurde deutlich, daß jeder Mehrfachauflösung ein aus der Signalverarbeitung bekanntes Zerlegungsschema mit exakter Rekonstruktion entspricht. Mit Hilfe der Mehrfachauflösungen hat sich jedoch die Sicht der Dinge entscheidend verändert. Die zuvor schwierige und oft erst durch lange praktische Erfahrung inspirierte Konstruktion neuer Filterschemata ist nicht länger Kunst sondern Handwerk. Zudem liefert die Untersuchung der analytischen Eigenschaften einer Mehrfachauflösung Aussagen über die Qualität der assoziierten Filter – Erfahrungswerte aus der Anwendung bekannter Filter lassen sich nunmehr theoretisch begründen und theoretische Überlegungen liefern neue, an spezielle Probleme angepaßte, Filter.

Zu jeder Mehrfachauflösung gehört eine Skalierungsfunktion. Diese legt jene eindeutig fest und die Probleme der Konstruktion und Analyse der Eigenschaften einer Mehrfachauflösung lassen sich zurückführen auf die Konstruktion und Analyse der Eigenschaften der zugehörigen Skalierungsfunktion. Ein weiteres wichtiges Anwendungsfeld für Skalierungsfunktionen ergibt sich bei den Verfeinerungsalgorithmen (*stationary subdivision schemes*), wie sie im



CAD-Bereich zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen verwendet werden.

Die wichtigste Eigenschaft der Skalierungsfunktionen, der sie auch ihren Namen verdanken, ist die Skalierbarkeit. Sie haben jedoch noch eine andere Eigenschaft, die zunächst von der Skalierbarkeit völlig unabhängig ist: Sie sind Erzeuger *translationsinvarianter Räume* (SI-Räume, *shift invariante Räume*). Entscheidend hierbei ist, daß die Translatierten der Skalierungsfunktion eine Basis des von ihnen aufgespannten SI-Raums bilden. Über die translationsinvarianten Räume ergeben sich Verbindungen zur Spline-Interpolation sowie zur Approximation mittels Radialer Basis-Funktionen. Hierbei treten allerdings die Approximationseigenschaften dieser Räume in den Vordergrund, also z.B. die Fragestellung, bis zu welchem Grad sich Polynome durch die Elemente eines translationsinvarianten Raumes reproduzieren lassen.

Das vorliegende Kapitel untersucht die Eigenschaften der Skalierungsfunktionen und im speziellen die der interpolierenden Skalierungsfunktionen. Die bereits angesprochene Translationsinvarianz und Skalierbarkeit bilden die Schwerpunkte der beiden ersten Abschnitte. Besonderes Augenmerk gilt hierbei im Paragraphen 3.2.2 den interpolierenden Skalierungsfunktionen. Sie sind das Bindeglied zur Sampling-Theorie aus Kapitel 2 und diese Verbindungen werden in Sektion 3.4 eingehend untersucht. Dafür wird jedoch der Begriff der Mehrfachauflösung benötigt, der daher zuvor im Abschnitt 3.3 eingeführt wird. Von besonderer Bedeutung ist hier die im Paragraphen 3.3.3 diskutierte Konstruktion zweier biorthogonaler Mehrfachauflösungen. Dem Begriff der Regularität ist der Abschnitt 3.5 gewidmet. Der Definition der in diesem Zusammenhang wichtigen Hölder- und Sobolev-Räume in Paragraph 3.5.1 folgt die Betrachtung eines ersten Verfahrens zur Regularitätsabschätzung, der sog. *Brute-Force Methode*, im Unterabschnitt 3.5.2. Paragraph 3.5.3 führt den *Übergangoperator* ein und stellt mit der *Littlewood-Paley Methode* ein weiteres Verfahren zur Bestimmung der Regularität einer Skalierungsfunktion vor. Den Abschluß der Ausführungen zur Regularitätsanalyse bildet der Paragraph 3.5.4 über *Strang-Fix und Moment-Bedingungen*. Der letzte Abschnitt 3.6 in diesem Kapitel diskutiert spezielle Konstruktionsverfahren für interpolierende Skalierungsfunktionen. Diese sind im einzelnen das Verfahren der Iterativen Interpolation in 3.6.1, die verallgemeinerten Haar-Basen im Unterabschnitt 3.6.2, Autokorrelationsfunktionen in Paragraph 3.6.3 und die Iteration von Symbolen in 3.6.4. Der Anhang 3.A schließlich stellt einige häufig verwendete Resultate zum Spektralradius zusammen.

### 3.1 Translationsinvarianz

Unter einem translationsinvarianten Distributionen- oder Funktionenraum  $\mathcal{S}$  versteht man einen Raum, dessen Elemente die Eigenschaft

$$f \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad T_k f \in \mathcal{S} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n$$

besitzen. Allgemeiner betrachtet man auch Translationen entlang eines Gitters  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  (vgl. Definition 2.36), wir beschränken uns hier jedoch auf den Fall  $\Gamma = \Upsilon = \mathbb{Z}^n$ .

Translationsinvariante Räume sind nicht nur im Kontext der Wavelet-Theorie von Bedeutung, sondern bilden in unterschiedlichen Ausprägungen die Grundlage für die Beschäftigung z.B. mit Splines, der Approximation mittels Radialer Basis-Funktionen (Buhmann [Buh00]) oder auch der Sampling-Theorie. Die Räume  $V_\omega$  bandbeschränkter Funktionen aus Definition 2.24 zählen ebenso dazu, wie die Räume  $\mathcal{V}_j$  einer Mehrfachauflösung (vgl. Abschnitt 3.3).

Die zwei Zentren des Interesses an Translationsinvarianten Räumen sind zum einen deren Approximationseigenschaften und zum anderen die Eigenschaften der sie erzeugenden Funktion(en). Während z.B. bei der Spline-Approximation typischerweise Erzeuger mit kompaktem Träger auftreten, werden die Sampling-Räume  $V_\omega$  von dilatierten sinc-Funktionen erzeugt, also Funktionen, deren Fourier-Transformierte kompakten Träger haben. Im Kontext der Radialen Basis-Funktionen schließlich treten üblicherweise Funktionen mit unbeschränktem Träger auf, wenngleich es auch hier neuere Ansätze gibt, bei denen Erzeuger mit kompaktem Träger eine Rolle spielen (Buhmann [Buh98]). Eine Einführung in die Theorie der Translationsinvarianten Räume mit Schwerpunkt auf Erzeugendensystemen bietet Ron [Ron99]. Für einen Überblick über neuere Resultate zu den  $L^2$ -Approximationseigenschaften kann Jetter/Plonka [JP99] herangezogen werden. Beide Arbeiten enthalten auch ein umfassendes Literaturverzeichnis.

#### Definition 3.1

1.) Für eine Distribution  $\phi$  mit kompaktem Träger bezeichne

$$\mathcal{S}(\phi) := \left\{ f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \phi(\cdot - k); (c_k) \in \ell(\mathbb{Z}^n) \right\} \quad (3.1)$$

den von  $\phi$  aufgespannten **Translationsinvarianten Raum**. In der Literatur wird  $\mathcal{S}(\phi)$  auch als **PSI-Raum** bezeichnet (*principal shift-invariant space*).  $\phi$  heißt **Erzeuger** von  $\mathcal{S}(\phi)$ .

2.) Allgemeiner betrachtet man für eine endliche Folge

$$\Phi := \{ \phi^\ell \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n), \ell = 1, \dots, j \}$$

den Raum

$$\mathcal{S}(\Phi) := \left\{ f = \sum_{\ell=1}^j \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k^\ell \phi^\ell(\cdot - k); (c_k^\ell) \in \ell(\mathbb{Z}^n) \right\}. \quad (3.2)$$

$\mathcal{S}(\Phi)$  heißt **FSI-Raum** (*finite shift-invariant space*).  $\Phi$  heißt (endliches) **Erzeugendensystem** von  $\mathcal{S}(\Phi)$ .

Aufgrund des kompakten Trägers der  $\phi^\ell$  ist die Summe in (3.2) lokal endlich und daher ist  $\mathcal{S}(\Phi) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , also wohldefiniert.

Im Rahmen dieser Arbeit werden hauptsächlich PSI-Räume betrachtet. Die Komplementäräume  $\mathcal{W}_j$  einer Mehrfachauflösung, deren Dilatationsmatrix Determinante größer zwei hat, können z.B. als FSI-Räume aufgefaßt werden (vgl. Abschnitt 3.3).

Die im folgenden untersuchten Eigenschaften des PSI-Raums  $\mathcal{S}(\phi)$  sind durch solche des Erzeugers  $\phi$  gegeben. Man unterscheidet *Stabilität*, *Lineare Unabhängigkeit* und *Orthogonalität* der Translatierten von  $\phi$ . Die folgenden drei Paragraphen diskutieren diese Eigenschaften im einzelnen.

### 3.1.1 Lineare Unabhängigkeit

#### Definition 3.2

Sei  $\phi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ . Die Translatierten von  $\phi$  heißen (algebraisch) **linear unabhängig**, falls die Abbildung

$$\begin{aligned} T_\phi : \ell(\mathbb{Z}^n) &\rightarrow \mathcal{S}(\phi) \\ (c_k) &\mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \phi(\cdot - k) \end{aligned} \quad (3.3)$$

injektiv ist.

Die Abbildung  $T_\phi$  ist nach Definition 3.2 auf  $\ell(\mathbb{Z}^n)$  definiert. Läßt man für  $\phi$  beliebigen Träger zu, so muß der Definitionsbereich von  $T_\phi$  geeignet eingeschränkt werden. Im Paragraphen 3.1.2 z.B. wird die Einschränkung von  $T_\phi$  auf den Raum  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$  untersucht.

Da  $\text{supp } \phi$  kompakt ist, läßt sich nach dem Satz von Paley-Wiener-Schwartz 1.49 die Fourier-Transformierte von  $\phi$  zu einer auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorphen Funktion fortsetzen. Ron [Ron89] hat 1989 die lineare Unabhängigkeit der Translatierten einer Distribution  $\phi$  mit kompaktem Träger durch die Nullstellen dieser Fortsetzung charakterisiert.

**Satz 3.3 (Ron)**

Die Translatierten einer Distribution  $\phi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  sind genau dann (algebraisch) linear unabhängig, wenn die Fourier-Laplace-Transformierte  $\hat{\phi}$  von  $\phi$  keine  $\mathbb{Z}^n$ -periodischen Nullstellen besitzt:

$$\forall z \in \mathbb{C}^n \quad \exists k \in \mathbb{Z}^n \quad \text{mit} \quad \hat{\phi}(z - k) \neq 0 .$$

Jia/Micchelli [JM92] haben dieses Ergebnis auf den Fall eines Erzeugenden-systems eines FSI-Raumes verallgemeinert.

**Satz 3.4 (Jia/Micchelli)**

Seien  $\phi^\ell \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\ell = 1, \dots, j$ . Die Translatierten von  $\phi^1, \dots, \phi^j$  sind genau dann (algebraisch) linear unabhängig, wenn für alle  $z \in \mathbb{C}^n$  die Folgen

$$(\hat{\phi}^\ell(z - k))_{k \in \mathbb{Z}^n} \quad \ell = 1, \dots, j$$

linear unabhängig sind.

Das folgende Resultat zur linearen Unabhängigkeit von Ben-Artzi/Ron [BAR90] findet Anwendung im Paragraphen 3.2.1 (vgl. Bemerkung 3.22).

**Satz 3.5 (Ben-Artzi/Ron)**

Seien  $\phi^\ell \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\ell = 1, \dots, j$  mit linear unabhängigen Translatierten. Hat

$$f = \sum_{\ell=1}^j \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k^\ell \phi^\ell(\cdot - k)$$

kompakten Träger, so sind die Folgen  $(c_k^\ell) \in \ell(\mathbb{Z}^n)$  allesamt endlich.

**3.1.2 Stabilität**

Der PSI-Raum  $\mathcal{S}(\phi)$  aus (3.1) ist lediglich für Erzeuger  $\phi$  mit kompaktem Träger wohldefiniert. Von Interesse sind jedoch auch Erzeuger mit schlechterem Fallverhalten, so z.B. die sinc-Funktion. Wir betrachten im folgenden den Fall  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . In Adaption von (3.1) sei

$$\mathcal{S}_2(\phi) := \overline{\text{span}} \{ \phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}^n \} \quad (3.4)$$

der Abschluß in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  des Raums aller endlichen Linearkombinationen von Translatierten von  $\phi$ . Man kann zeigen (vgl. de Boor *et al.* [dBDR94, Th. 2.16]), daß für  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  mit kompaktem Träger

$$\mathcal{S}_2(\phi) = \overline{\mathcal{S}(\phi) \cap L^2(\mathbb{R}^n)}$$

ist. Der Definitionsbereich des Operators  $T_\phi$  aus (3.3) muß für  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  geeignet eingeschränkt werden: Sei

$$T_{\phi,2} := T_\phi|_{\ell^2(\mathbb{Z}^n)} .$$

Wegen

$$\left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \phi(\cdot - k) \right|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_k|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\phi(\cdot - k)|^2$$

ist  $T_{\phi,2}$  definiert und es gilt nach Satz 1.64:  $\text{Bild}(T_{\phi,2}) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . Von Interesse ist jedoch der Fall  $\text{Bild}(T_{\phi,2}) \subset \mathcal{S}_2(\phi)$ . Dies gilt z.B. für

$$\sup_{x \in \mathbb{T}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\phi(x - k)|^2 < \infty ,$$

denn dann ist

$$T_{\phi,2} : \ell^2(\mathbb{Z}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

stetig und da  $T_{\phi,2}(c) \in \mathcal{S}_2(\phi)$  für alle endlichen Folgen  $c$  gilt dies auch für den Abschluß, also für  $c \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ .

### Definition 3.6

- 1.) Sei  $\mathcal{H}$  ein separabler Hilbertraum und  $I$  eine abzählbare Indexmenge. Die Folge  $(\varphi_i)_{i \in I} \subset \mathcal{H}$  heißt ein **Frame** in  $\mathcal{H}$ , falls Konstanten  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\alpha \leq \beta$  existieren, so daß

$$\alpha \|f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle f | \varphi_i \rangle|^2 \leq \beta \|f\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (3.5)$$

für alle  $f \in \mathcal{H}$  gilt.  $\alpha$  und  $\beta$  heißen untere bzw. obere **Frame-Schranke**. Ist  $\alpha = \beta$  so heißt  $(\varphi_i)_{i \in I}$  **Tight Frame**.

- 2.) Ist  $(\varphi_i)_{i \in I} \subset \mathcal{H}$  ein Frame, so ist die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathcal{H} &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^n) \\ f &\mapsto (\langle f | \varphi_i \rangle)_{i \in I} \end{aligned}$$

stetig und injektiv.  $F$  heißt **Frame-Operator**.

### Bemerkung 3.7

- 1.) Ist  $(\phi(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$  ein Frame in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , so ist  $T_{\phi,2}$  die Adjungierte des Frame-Operators, denn nach (3.5) ist  $F$  stetig und es gilt

$$\begin{aligned} \langle F^* c | f \rangle &= \langle c | F f \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \overline{\langle f | \phi(\cdot - k) \rangle} . \end{aligned}$$

Da  $g := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \phi(\cdot - k) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  und

$$|\langle \varphi, g \rangle| \leq \|c\|_2 \beta \|\varphi\|_2 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

ist nach dem Darstellungssatz von Riesz  $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  und somit

$$F^*c = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \phi(\cdot - k) = T_{\phi,2}c .$$

- 2.) Eine Folge  $(\varphi_i)_{i \in I}$  in einem separablen Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  heißt vollständig, falls gilt:

$$f \perp \varphi_i \quad \forall i \in I \quad \Rightarrow \quad f = 0 .$$

Ein Frame  $(\varphi_i)_{i \in I}$  ist also stets vollständig, denn ist  $\langle f | \varphi_i \rangle = 0 \quad \forall i \in I$ , so ist  $f$  nach (3.5) die Nullfunktion.

### Definition 3.8

Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $I$  eine abzählbare Indexmenge. Die Folge  $(\varphi_i)_{i \in I} \subset \mathcal{H}$  heißt **Riesz-Folge**, falls Konstanten  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\alpha \leq \beta$  existieren, so daß

$$\alpha \|(c_i)\|_{\ell^2(I)} \leq \left\| \sum_{i \in I} c_i \varphi_i \right\|_{\mathcal{H}} \leq \beta \|(c_i)\|_{\ell^2(I)} \quad (3.6)$$

für alle Folgen  $(c_i) \in \ell^2(I)$  gilt. Liegt  $\text{span} \{\varphi_i; i \in I\}$  zusätzlich dicht in  $\mathcal{H}$ , so heißt  $(\varphi_i)_{i \in I}$  **Riesz-Basis** von  $\mathcal{H}$ .

### Bemerkung 3.9

- 1.) Da die endlichen Folgen  $(c_i) \in \ell^2(I)$  in  $\ell^2(I)$  dicht liegen, reicht es aus, (3.6) für endliche Folgen zu fordern.
- 2.) Ist  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , so bilden die Translatierten  $\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}^n\}$  von  $\phi$  genau dann eine Riesz-Basis des von ihnen aufgespannten Raumes, wenn  $T_{\phi,2} : \ell^2(\mathbb{Z}^n) \rightarrow \mathcal{S}_2(\phi)$  ein Isomorphismus ist, denn nach Definition 3.8 ist  $(\phi(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$  Riesz-Basis genau dann, wenn  $T_{\phi,2} : \ell^2(\mathbb{Z}^n) \rightarrow \text{Bild}(T_{\phi,2})$  ein Isomorphismus ist, und  $\text{span} \{\phi(\cdot - k)\}$  ist dicht sowohl in  $\text{Bild}(T_{\phi,2})$  als auch in  $\mathcal{S}_2(\phi)$ .

### Definition 3.10

Ist  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  und

$$T_{\phi,2} : \ell^2(\mathbb{Z}^n) \rightarrow \mathcal{S}_2(\phi)$$

ein Isomorphismus, so heißt  $\phi$  **stabil**.

**Satz 3.11**

Ist  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , so sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1.)  $\phi$  ist stabil.
- 2.) Es existieren Konstanten  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \alpha \leq \beta < \infty$ , so daß gilt:

$$\alpha \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\phi}(\cdot - k)|^2 \leq \beta \quad \text{fast überall.} \quad (3.7)$$

Der Beweis dieses Satzes orientiert sich an der Darstellung bei Wojtaszczyk [Woj97, S. 20ff].

**Beweis:**

Für endliche Folgen  $(c_k) \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$  und  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  ist  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \phi(\cdot - k) \in L^2$  und daher

$$\mathcal{F} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \phi(\cdot - k) \right) = \hat{\phi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e_{-k}.$$

Mit Satz 1.41 (Plancherel) folgt

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \phi(\cdot - k) \right\|_2^2 = \left\| \hat{\phi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e_{-k} \right\|_2^2.$$

Mit dem Satz von B. Levi gilt

$$\begin{aligned} \left\| \hat{\phi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e_{-k} \right\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\phi}(\omega)|^2 \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e_{-k}(\omega) \right|^2 d\omega \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \int_{I^n} |\hat{\phi}(\omega - l)|^2 \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e_{-k}(\omega - l) \right|^2 d\omega \end{aligned}$$

und da  $e_k \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$ , also  $\mathbb{Z}^n$ -periodisch, folgt wiederum mit dem Satz von B. Levi

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \phi(\cdot - k) \right\|_2^2 = \int_{I^n} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\phi}(\omega - l)|^2 \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e_{-k}(\omega) \right|^2 d\omega. \quad (3.8)$$

Nach Satz 1.59 gilt für  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e_{-k}(\omega) \in L^2(\mathbb{T}^n)$  die Parseval-Identität, d.h. es ist

$$\int_{I^n} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e_{-k}(\omega) \right|^2 d\omega = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_k|^2 = \|(c_k)\|_2^2. \quad (3.9)$$

Gilt nun einerseits (3.7) mit positiven Konstanten  $\alpha \leq \beta < \infty$ , so folgt mit (3.8)

$$\alpha \int_{\mathbb{T}^n} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e_{-k}(\omega) \right|^2 d\omega \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \phi(\cdot - k) \right\|_2^2 \leq \beta \int_{\mathbb{T}^n} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e_{-k}(\omega) \right|^2 d\omega,$$

d.h. nach (3.9) ist

$$\alpha \|(c_k)\|_2^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \phi(\cdot - k) \right\|_2^2 \leq \beta \|(c_k)\|_2^2 \quad (3.10)$$

für alle endlichen Folgen  $(c_k) \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$  und nach den Definitionen 3.8 und 3.10 ist  $\phi$  somit stabil.

Ist andererseits  $\phi$  stabil, so gilt (3.10) für beliebige Folgen  $(c_k) \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$  und es folgt mit derselben Rechnung wie oben, daß auch (3.8) für beliebige  $\ell^2$ -Folgen gilt.

Betrachte

$$M_{\tilde{\beta}} := \left\{ \omega \in \mathbb{T}^n; \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\phi}(\omega - k)|^2 > \tilde{\beta} \right\},$$

so folgt mit (3.8) aus der Stabilität von  $\phi$ :  $\exists \tilde{\beta} \in \mathbb{R}_+^*$  mit  $\lambda(M_{\tilde{\beta}}) > 0$ . Da  $\chi_{M_{\tilde{\beta}}} \in L^2(\mathbb{T}^n)$  existiert  $(c_k) \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$  mit  $\chi_{M_{\tilde{\beta}}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e_{-k}$ . Dann folgt aus (3.8)

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \phi(\cdot - k) \right\|_2^2 = \int_{M_{\tilde{\beta}}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\phi}(\omega - k)|^2 d\omega \geq \tilde{\beta} \lambda(M_{\tilde{\beta}}).$$

Da  $\|(c_k)\|_2^2 = \|\chi_{M_{\tilde{\beta}}}\|_2^2 = \lambda(M_{\tilde{\beta}})$  ist

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \phi(\cdot - k) \right\|_2^2 \geq \tilde{\beta} \|(c_k)\|_2^2.$$

Somit gilt nach (3.10)  $\tilde{\beta} \leq \beta$ ,  $M_{\tilde{\beta}}$  ist also Nullmenge für  $\tilde{\beta} > \beta$  und dies bedeutet

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\phi}(\cdot - k)|^2 \leq \beta.$$

Eine analoge Betrachtung der Menge

$$M_{\tilde{\alpha}} := \left\{ \omega \in \mathbb{T}^n; \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\phi}(\omega - k)|^2 < \tilde{\alpha} \right\}$$

liefert die untere Abschätzung in (3.7). □

Das folgende Resultat findet sich bei Jia/Micchelli [JM91].

**Lemma 3.12**

Hat  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  kompakten Träger und linear unabhängige Translatierte, so ist  $\phi$  stabil.

**Definition 3.13**

Gilt für  $\phi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  statt (3.7) lediglich

$$0 < \alpha \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\phi}(\cdot - k)|^2,$$

so heißt  $\phi$  **prä-stabil**.

**3.1.3 Orthonormalität****Lemma 3.14**

Für  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  sind folgende Aussagen äquivalent.

- 1.)  $\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}^n\}$  ist ein Orthonormalsystem.
- 2.)  $\varpi(|\hat{\phi}|^2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\phi}(\cdot - k)|^2 = 1$  fast überall.

**Beweis:**

Mit  $\phi$  ist auch  $\hat{\phi} \in L^2$ , also ist  $|\hat{\phi}|^2 \in L^1$  und nach Satz 1.64 ist  $\varpi(|\hat{\phi}|^2) \in L^1(\mathbb{T}^n)$ . Weiterhin gilt für den  $k$ -ten Fourier-Koeffizienten von  $\varpi(|\hat{\phi}|^2)$

$$c_k = \int_{\mathbb{T}^n} \varpi(|\hat{\phi}|^2) e_{-k}.$$

Da  $e_k \in L^1(\mathbb{T}^n)$  folgt mit der Parseval-Identität

$$\begin{aligned} \langle \phi(\cdot - k) | \phi(\cdot - l) \rangle &= \langle \hat{\phi} e_{-k} | \hat{\phi} e_{-l} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\phi}|^2 e_{l-k} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} \int_{j+I^n} |\hat{\phi}|^2 e_{l-k} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} \int_{I^n} |\hat{\phi}(\cdot - j)|^2 e_{l-k} \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \varpi(|\hat{\phi}|^2) e_{l-k} = c_{k-l}. \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Identifikation von  $\mathbb{T}^n$  mit  $I^n$  (siehe Abschnitt 1.2.6) sowie der Satz von Lebesgue mit Majorante  $\varpi(|\hat{\phi}|^2)$  verwendet.

Somit ist  $\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}^n\}$  genau dann ein Orthonormalsystem, wenn die Fourier-Koeffizienten von  $\varpi(|\hat{\phi}|^2)$  die Bedingung  $c_k = \delta_{0,k}$  erfüllen. Da die Fourier-Koeffizienten die Funktion  $\varpi(|\hat{\phi}|^2)$  in  $L^1$  bereits eindeutig festlegen, ist dies äquivalent zur Aussage 2.)

□

**Bemerkung 3.15**

- 1.) Gemäß Lemma 3.14 erfüllt jede Orthonormalbasis  $\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}^n\}$  das Kriterium (3.7) mit den Konstanten  $\alpha = \beta = 1$ . Riesz-Basen sind somit in gewissem Sinne das nächstbeste nach Orthonormalbasen und beide sind insoweit äquivalent als daß man aus einer Riesz-Basis sofort eine ONB konstruieren kann: Ist  $\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}^n\}$  Riesz-Basis des Raums  $\mathcal{S}_2(\phi)$  aus (3.4), so definiere

$$\hat{\varphi}(\omega) := \hat{\phi}(\omega) \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\phi}(\omega - k)|^2 \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.11)$$

Dann ist nach Lemma 3.14  $\{\varphi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}^n\}$  Orthonormalbasis von  $\mathcal{S}_2(\phi)$ . Hat  $\phi$  kompakten Träger, so geht dieser jedoch i.d.R. durch die Orthonormalisierung verloren. Wäre nämlich  $\text{supp } \varphi$  kompakt, so wäre  $\hat{\varphi}$  bandbeschränkt und daher nach dem Satz von Paley-Wiener 1.47 eine ganze Funktion. Dies ist jedoch im allgemeinen nicht der Fall.

- 2.) Um eine Darstellung für die Funktion  $\varphi$  zu erhalten, entwickelt man den zweiten Faktor der rechten Seite in (3.11) in eine Fourier-Reihe. Mit

$$\left( \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\phi}(\cdot - k)|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e_{-k}$$

ist dann  $(c_k) \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$  und

$$\hat{\varphi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e_{-k} \hat{\phi}.$$

Somit gilt

$$\varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \phi(\cdot - k)$$

und es folgt  $\mathcal{S}_2(\varphi) \subset \mathcal{S}_2(\phi)$ . Ebenso folgt  $\mathcal{S}_2(\phi) \subset \mathcal{S}_2(\varphi)$ .

Als Beispiel betrachte man die durch Orthonormalisierung der B-Splines entstehenden *Skalierungsfunktionen* (vgl. Abschnitt 3.2). Sie sind Erzeuger von *Mehrfachauflösungen* (vgl. Abschnitt 3.3), deren Räume  $\mathcal{V}_j$  aus Splines bestehen und haben, wie auch die zu diesen Mehrfachauflösungen gehörenden *Wavelets*, den nach ihren Entdeckern benannten Battle-Lemarié Wavelets, exponentielles Fallverhalten, jedoch keinen kompakten Träger (Daubechies [Dau92, Kor. 5.4.2], vgl. Abschnitt 3.3).

**Beispiel 3.16 (B-Splines)**

Eine Diskussion der eindimensionalen B-Splines findet sich bei vielen Autoren, so z.B. bei Vetterli/Kovačević [VK95, §4.3.2], Daubechies [Dau92, Kap.

5.4], Chui [Chu92a, §4.2], Wojtaszczyk [Woj97, §§3.3.2-3.3.4] und Blatter [Bla98].

Die B-Splines sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} B_0(x) &:= \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \\ B_j &:= B_{j-1} * B_0 \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

Mit  $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  ist  $\check{\chi}_I = \text{sinc}$  und somit gilt

$$\begin{aligned} B_0 &= \chi_{I+\frac{1}{2}} = \chi_I \left( \cdot - \frac{1}{2} \right) \\ &= \mathcal{F} \left( e_{\frac{1}{2}} \text{sinc} \right). \end{aligned}$$

Die Abbildungen 3.1 und 3.2 zeigen die Graphen der tensoriellen B-Splines bis zur Ordnung 3.

Zum Nachweis der Stabilität und der Orthonormalisierung von  $B_j$  muß zunächst

$$\left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{B}_j(\omega - k)|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

bestimmt werden. Gemäß (3.11) bilden dann die Translatierten der Fourier-Inversen von

$$\hat{\phi} := \hat{B}_j \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{B}_j(\omega - k)|^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

eine ONB. Um eine explizite Darstellung für  $\phi$  zu erhalten, entwickelt man den zweiten Faktor in eine Fourier-Reihe. Mit

$$\left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{B}_j(\omega - k)|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-k}$$

ist dann

$$\phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k B_j(\cdot - k).$$

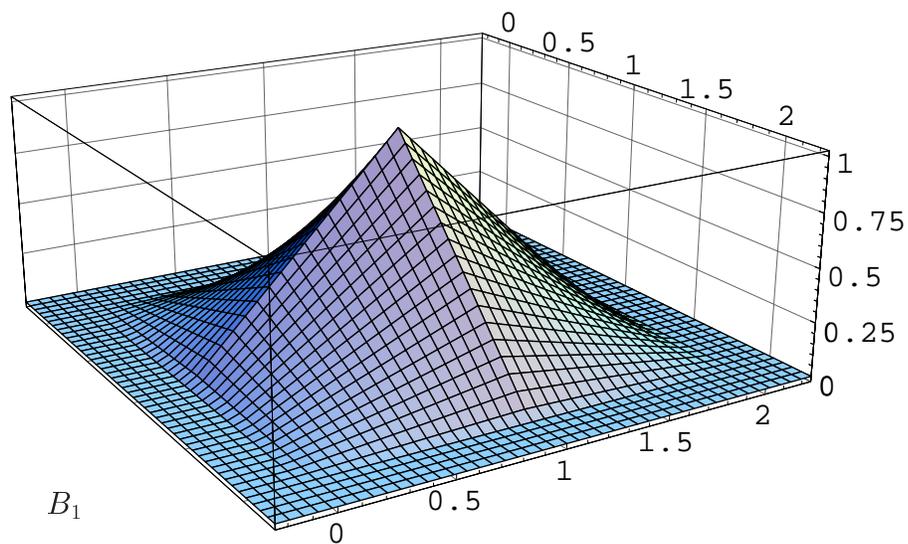
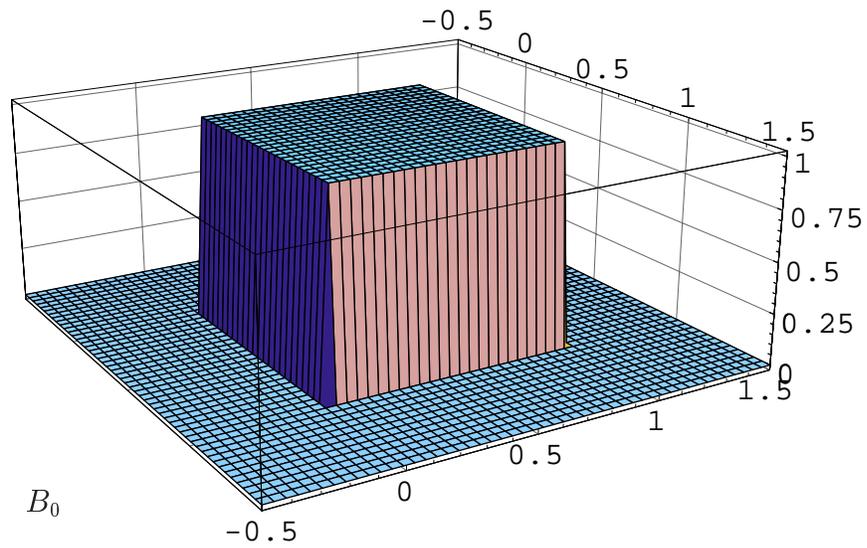
Doch zunächst zur Berechnung von (3.12). Da

$$\hat{B}_j = (\hat{B}_0)^{j+1} = (e_{-\frac{1}{2}} \text{sinc})^{j+1}$$

ist

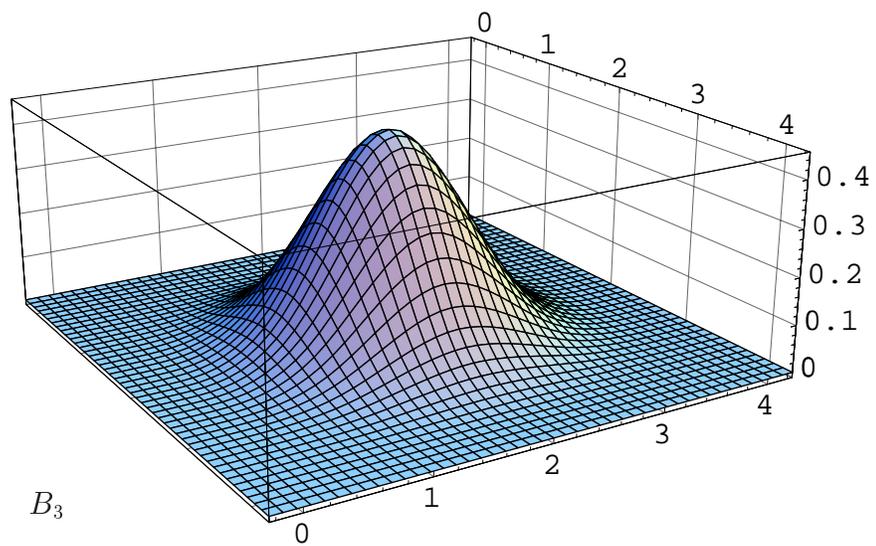
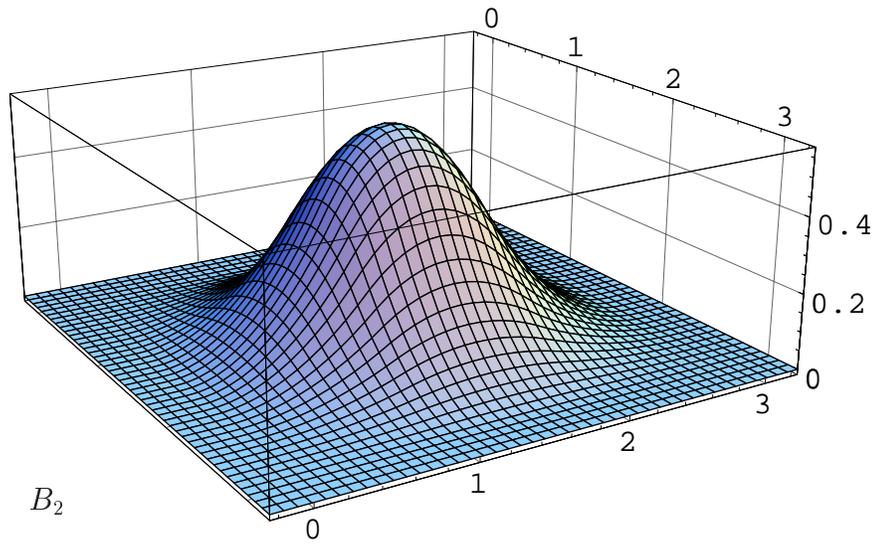
$$|\hat{B}_j|^2 = |\text{sinc}|^{2(j+1)}$$

und es folgt



---

**Abbildung 3.1:** Tensorielle B-Splines  $B_0$  (stückweise konstant) und  $B_1$  (stückweise linear).



---

**Abbildung 3.2:** Tensorielle B-Splines  $B_2$  (stückweise quadratisch) und  $B_3$  (stückweise kubisch).

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{B}_j(\omega - k)|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\sin(\pi\omega - \pi k)}{\pi\omega - \pi k} \right|^{2(j+1)} \\
&= \sin^{2(j+1)}(\pi\omega) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\pi\omega - \pi k)^{2(j+1)}}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Mit der Reihendarstellung des Cotangens

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\pi\omega + \pi k} &= \cot(\pi\omega) \\
\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\pi\omega + \pi k)^{2(j+1)}} &= \frac{-1}{(2j+1)!} \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \right)^{2j+1} \cot(\pi\omega)
\end{aligned}$$

läßt sich (3.13) umschreiben in

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{B}_j(\omega - k)|^2 = \sin^{2(j+1)}(\pi\omega) \frac{-1}{(2j+1)!} \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \right)^{2j+1} \cot(\pi\omega). \tag{3.14}$$

**$j = 0$**

Nach (3.14) ist

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{B}_0(\omega - k)|^2 = 1,$$

d.h. die Translatierten von  $B_0$  sind orthonormal.

**$j = 1$**

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{B}_1(\omega - k)|^2 = \sin^4(\pi\omega) \left( \frac{-1}{6} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \right)^3 \cot(\pi\omega).$$

Es ist

$$\left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^3 \cot(\xi) = \frac{-1}{\sin^4(\xi)} \left( 2 + 4 \cos^2(\xi) \right)$$

und somit

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{B}_1(\omega - k)|^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos^2(\pi\omega).$$

Daher gilt

$$\frac{1}{3} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{B}_1(\omega - k)|^2 \leq 1,$$

d.h. die Translatierten von  $B_1$  sind stabil.

$j = 2$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{B}_2(\omega - k)|^2 = \sin^6(\pi\omega) \left( \frac{-1}{120} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \right)^5 \cot(\pi\omega) .$$

Es ist

$$\left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^5 \cot(\xi) = \frac{-2}{\sin^6(\xi)} \left( 26 \cos(2\xi) + \cos(4\xi) + 33 \right)$$

und somit

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{B}_2(\omega - k)|^2 = \frac{1}{60} \left( 26 \cos(2\pi\omega) + \cos(4\pi\omega) + 33 \right) .$$

Daher gilt

$$\frac{1}{10} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{B}_2(\omega - k)|^2 \leq 1 ,$$

d.h. die Translatierten von  $B_2$  sind ebenfalls stabil.

Die für  $j = 0, 1, 2$  exemplarisch überprüfte Stabilität der  $B_j$  läßt sich allgemein nachweisen (siehe Chui [Chu92a, §4.2]). Weiterhin gilt  $\hat{B}_j(0) = 1$  und  $\hat{B}_j(\xi) = O(\frac{1}{|\xi|^{j+1}})$ .

Nachfolgend werden häufig die Periodisierungen von  $\hat{\phi}$  bzw. von  $|\hat{\phi}|^2$  benötigt. Nach Satz 1.64 ist für  $f \in L^1$  die Periodisierung  $\varpi f \in L^1(\mathbb{T}^n)$  und für den  $k$ -ten Fourier-Koeffizienten von  $\varpi f$  gilt  $c_k = \hat{f}(k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^n$ . Für  $\hat{\phi} \in L^1$  ist also  $\varpi \hat{\phi} \in L^1(\mathbb{T}^n)$  und für  $\phi \in L^2$  ist  $|\hat{\phi}|^2 \in L^1$  und somit  $\varpi(|\hat{\phi}|^2) \in L^1(\mathbb{T}^n)$ . Die Fourier-Koeffizienten von  $\varpi \hat{\phi}$  sind  $c_k := (\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} \varpi \hat{\phi})(k) = \phi(-k)$  und die von  $\varpi(|\hat{\phi}|^2)$  sind  $c_k := (\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} \varpi(|\hat{\phi}|^2))(k) = \langle \phi(\cdot - k) | \phi \rangle$  (siehe den Beweis von Lemma 3.14). Hat  $\phi$  kompakten Träger, so sind für die Fourier-Reihen beider Periodisierungen nur jeweils endlich viele Fourier-Koeffizienten von Null verschieden. Es gilt also folgendes Lemma.

### Lemma 3.17

Sei  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ .

- 1.) Ist  $\hat{\phi} \in L^1$ , so ist  $c_k = \phi(-k)$  der  $k$ -te Fourier-Koeffizient der Periodisierung  $\varpi \hat{\phi}$  von  $\hat{\phi}$ , insbesondere ist  $\varpi \hat{\phi}$  ein trigonometrisches Polynom, falls außerdem  $\phi$  kompakten Träger hat.
- 2.) Ist  $\phi \in L^2$ , so ist  $|\hat{\phi}|^2 \in L^1$  und  $c_k = \langle \phi(\cdot - k) | \phi \rangle$  ist der  $k$ -te Fourier-Koeffizient der Periodisierung  $\varpi(|\hat{\phi}|^2)$  von  $|\hat{\phi}|^2$ , insbesondere ist  $\varpi(|\hat{\phi}|^2)$  ein trigonometrisches Polynom, falls außerdem  $\phi$  kompakten Träger hat.

In der Literatur gebräuchlich ist das sog. *Bracket-Produkt*  $[f, g]$ ,  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  als Schreibweise für die Periodisierung von  $f\bar{g}$ . In diesem Sinne wurde es zuerst von de Boor *et al.* [dBDR94] verwendet. In unserer Terminologie ist also  $[f, g] = \varpi(f\bar{g})$ .

## 3.2 Skalierbarkeit

Mit der Skalierbarkeit soll nun die zweite wichtige, den Skalierungsfunktionen ihren Namen gebende, Eigenschaft untersucht werden. Hier ist zunächst die Frage der Existenz und Eindeutigkeit zu klären, dies geschieht im Paragraphen 3.2.1. Der sich anschließende Paragraph 3.2.2 geht ausführlich auf den speziellen Fall der interpolierenden Skalierungsfunktionen ein. Zur Übersicht und schnellen Referenz stellt der abschließende Teil 3.2.3 die wichtigen Eigenschaften der Skalierungsfunktionen – insbesondere der interpolierenden – noch einmal zusammen.

### 3.2.1 Existenz und Eindeutigkeit von Skalierungsfunktionen

Im folgenden sei  $A$  eine zulässige Dilatation zum vollständigen Gitter  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  (vgl. die Definitionen 2.36 und 2.42). Gemäß der Vereinfachung in Bemerkung 2.43 2.) beschränken wir uns auf den Fall  $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ . Bis auf wenige Fälle, zu denen z.B. die Arbeiten von Strichartz [Str93] und Cohen/Schlenker [CS93] gehören, wird auch in der Literatur lediglich das Gitter  $\mathbb{Z}^n$  betrachtet.

#### Bemerkung 3.18

Ist  $A$  eine für  $\mathbb{Z}^n$  zulässige Dilatation, so ist  $A$  bezüglich der euklidischen Norm i.a. keine Streckung in jede Richtung. Ist z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

so besitzt  $A$  den doppelten Eigenwert  $\lambda = 2$ , aber es ist

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und somit  $|Ax| = |x|$ .

Es gibt jedoch stets eine äquivalente Norm, so daß

$$\|Ax\| \geq \left( \frac{1}{\rho_{A^{-1}}} - \delta \right) \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (3.15)$$

gilt, denn für die Norm von  $A^{-1}$  aus Lemma 3.102 4.) gilt

$$\|A^{-1}\| \leq \rho_{A^{-1}} + \varepsilon ,$$

also ist

$$\|A^{-1}x\| \leq (\rho_{A^{-1}} + \varepsilon)\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

und damit folgt (3.15).

### Definition 3.19

Sei  $A$  eine für  $\mathbb{Z}^n$  zulässige Dilatation.  $\phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  heißt **skalierbar**, falls  $\phi$  in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  einer **Zwei-Skalen-Relation** der Form

$$\phi = a \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k \phi(A \cdot -k) \quad (3.16)$$

mit  $a = |\det A|$  genügt. Die Koeffizienten  $(h_k)$  bezeichnet man auch als **Skalierungsmaske** (refinement mask),  $\phi$  mit Maske  $h = (h_k)$  und Dilatation  $A$  heißt präziser  **$(h, A)$ -skalierbar**.

Von Interesse sind im folgenden reguläre, also insbesondere stetige  $\phi$  (zum Begriff Regularität siehe Abschnitt 3.5). Man bezeichnet daher skalierbare  $\phi$  trotz ihrer unter Umständen distributiven Natur allgemein als **Skalierungsfunktionen**. Für Distributionen sind Translation, Dilatation und Konvergenz der Reihe in (3.16) im Sinne der Definitionen aus Abschnitt 1.2 zu verstehen.

Nachfolgend sei für eine zulässige Dilatationsmatrix  $A$  stets  $B = A^T$ . Fourier-Transformation der Zwei-Skalen-Relation (3.16) liefert die äquivalente Darstellung

$$\hat{\phi} = m(B^{-1} \cdot) \hat{\phi}(B^{-1} \cdot) \quad (3.17)$$

mit

$$m := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k e_{-k} . \quad (3.18)$$

Gemäß Definition 1.57 heißt  $m$  das **Symbol der  $(h_k)$** . Ist  $(h_k) \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ , so ist nach Satz 1.62  $m \in \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$ . Die interessanten Fälle sind jedoch die einer  $\ell^1$ -,  $\ell^2$ - oder einer endlichen Skalierungsmaske. Für endliche Folgen  $(h_k)$  ist  $m$  ein trigonometrisches Polynom. Den Raum der trigonometrischen Polynome auf  $\mathbb{R}^n$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ . Für  $(h_k) \in \ell^1(\mathbb{Z}^n)$  ist  $m$  stetig und für  $(h_k) \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$  ist das Symbol in  $L^2(\mathbb{T}^n)$  (vgl. Abschnitt 1.4).

Durch Iteration der Gleichung (3.17) erhält man eine (zunächst formale) Produktdarstellung für  $\hat{\phi}$ :

$$\hat{\phi} = \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j} \cdot) . \quad (3.19)$$

Da  $m \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$  ist jede Nullstelle von  $m$  in  $B^{-1}I^n$  eine  $\mathbb{Z}^n$ -periodische Nullstelle von  $\hat{\phi}$ . Der Abschnitt 3.1 hat gezeigt, daß diese für die lineare Unabhängigkeit und Stabilität der Translatierten von  $\phi$  von entscheidender Bedeutung sind. Ein wichtiger Punkt bei der Konstruktion geeigneter Skalierungsfunktionen wird daher sein, Symbole zu finden, die auf bestimmten Bereichen keine Nullstellen besitzen, vgl. das Cohen-Kriterium 3.33.

**Satz 3.20 (Existenz und Eindeutigkeit)**

- 1.) Ist  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k = 1$  und  $m \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^n)$ , so konvergiert das Produkt in (3.19) gleichmäßig auf Kompakta sowie in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  und es existiert ein Polynom  $P$  mit  $|\hat{\phi}| \leq P$ . Gilt ferner  $(c_k) \in \ell^1(\mathbb{Z}^n)$ , so ist  $\phi := \overline{\mathcal{F}}(\hat{\phi})$  Lösung der Zwei-Skalen-Relation (3.16).
- 2.) Ist  $(h_k)$  eine endliche Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k = 1$ , so ist  $\phi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ .

Daubechies [Dau92, §6.2] gibt einen Beweis für das eindimensionale Analogon zu Satz 3.20 2.) an. Zwei mehrdimensionale Spezialfälle finden sich bei Deslaurier *et al.* [DDD91] bzw. Daubechies/Lagarias [DL91]. Für den nachstehenden Beweis wird folgendes Lemma benötigt, das z.B. bei Rudin [Rud66] bewiesen wird.

**Lemma 3.21**

Ist  $(u_j)_{j=1}^\infty$  eine Folge beschränkter Funktionen auf einer Menge  $\Omega$ , so daß  $\sum_{j=1}^\infty |u_j|$  gleichmäßig auf  $\Omega$  konvergiert, und sei  $m_j = 1 + u_j$ , so konvergiert das Produkt  $\prod_{j=1}^\infty m_j$  ebenfalls gleichmäßig auf  $\Omega$ .

**Beweis des Satzes:**

Zu 1.) Sei

$$\begin{aligned} u_j &:= m(B^{-j}\cdot) - 1, \\ m_j &:= \prod_{i=1}^j m(B^{-i}\cdot). \end{aligned}$$

Die Voraussetzung  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k = 1$  ist äquivalent zu  $m(0) = 1$ , da  $\partial m$  beschränkt folgt somit aus dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} |u_j(\omega)| &\leq |B^{-j}\omega| \sup_{\omega \in \mathbb{T}^n} |\partial m(\omega)| \\ &\leq C_1 \|B^{-j}\| |\omega|. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Nach der Formel (3.99) für den Spektralradius ist

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|B^{-j}\|^{1/j} = \varrho(B^{-1}) < 1,$$

daher existieren  $r < 1$  und  $j_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\|B^{-j}\| \leq r^j \quad \forall j > j_0 . \quad (3.21)$$

Somit folgt die gleichmäßige Konvergenz auf Kompakta mit dem Lemma 3.21.

Da  $1 + x \leq e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$  folgt aus (3.20),(3.21) für  $|\omega| < r^{-j_0}$

$$\begin{aligned} |m_j(\omega)| &\leq \prod_{i=1}^j (1 + |u_i(\omega)|) \\ &\leq \prod_{i=1}^j \exp(C_1 \|B^{-i}\| |\omega|) \\ &\leq \exp\left(\sum_{i=1}^j C_1 \|B^{-i}\| r^{-j_0}\right) \\ &\leq C_2 . \end{aligned}$$

Sei nun  $|\omega| \geq r^{-j_0}$  und

$$r^{-j_1} \leq |\omega| < r^{-(j_1+1)} .$$

Gilt o.B.d.A.  $j \geq j_1$ , so folgt

$$\begin{aligned} |m_j(\omega)| &\leq \prod_{i=1}^{j_1} \|m\|_\infty \prod_{i=j_1+1}^j (1 + |u_i(\omega)|) \\ &\leq \|m\|_\infty^{j_1} \cdot \exp\left(\sum_{i=j_1+1}^{\infty} C_1 r^i r^{-(j_1+1)}\right) \\ &= \|m\|_\infty^{j_1} \cdot \exp\left(\frac{C_1}{1-r}\right) . \end{aligned}$$

Da nach Definition  $j_1 \leq -\frac{\ln|\omega|}{\ln r}$  und  $x^{\ln y} = y^{\ln x}$  für  $x, y > 0$ , folgt

$$|m_j(\omega)| \leq C_3 |\omega|^{\ln \|m\|_\infty} ,$$

also existiert ein Polynom  $P$  mit

$$|m_j| \leq P \quad \forall j \in \mathbb{N} . \quad (3.22)$$

Damit gilt auch  $|\hat{\phi}| \leq P$ .

Da  $\mathcal{S}'$  schwach folgenvollständig ist, genügt es für die letzte Behauptung zu zeigen, daß  $\langle \varphi, m_j \rangle$  für  $\varphi \in \mathcal{S}$  eine Cauchy-Folge ist. Da

$$\langle \varphi, m_j \rangle = \int_{|\omega| \leq R} m_j \varphi + \int_{|\omega| > R} m_j \varphi,$$

folgt dies unmittelbar aus der gleichmäßigen Konvergenz und (3.22). Mit

$$\hat{\phi}(B \cdot) = m \cdot \prod_{i=1}^{\infty} m(B^{-i} \cdot) = m \hat{\phi}$$

und

$$g_j := \sum_{|k| \leq j} h_k e_{-k} \rightarrow m$$

gleichmäßig auf  $\mathbb{R}^n$ , gilt

$$g_j \hat{\phi} \rightarrow m \hat{\phi} \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

denn

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (g_j - m) \hat{\phi} \varphi \right| \leq \|g_j - m\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} P \varphi \rightarrow 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \phi(A^{-1} \cdot) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{F}}(g_j \hat{\phi}) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{F}} \left( \sum_{|k| \leq j} h_k e_{-k} \hat{\phi} \right) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq j} h_k \phi(\cdot - k). \end{aligned}$$

Zu 2.) Da  $(h_k)$  endlich ist  $m$  eine ganze Funktion. Mit den Bezeichnungen aus 1.) ist ferner

$$|u_j(z)| \leq |B^{-j} z| \sup_{|\zeta| \leq \|B^{-j}\| \|z\|} |\partial m(\zeta)|. \quad (3.23)$$

Damit folgt wiederum die gleichmäßige Konvergenz auf Kompakta, also ist auch  $\hat{\phi}$  eine ganze Funktion. Mit 1.) ist nach dem Satz 1.49 von Paley-Wiener-Schwartz noch zu zeigen, daß  $\hat{\phi}$  von exponentiellem Typ ist.

Sei  $B_R$  eine Kugel vom Radius  $R$  um den Nullpunkt mit  $\text{supp}(h_k) \subset B_R$ . Da

$$\begin{aligned} |\partial m(\zeta)| &= \left| \sum_{|k| \leq R} h_k 2\pi i k e_{-k}(\zeta) \right| \\ &\leq C e^{R|\zeta|} \end{aligned}$$

gilt

$$|u_j(z)| \leq \|B^{-j}\| |z| C e^{R\|B^{-j}\||z|}.$$

Ist  $\|B^{-j}\| \leq r^j \quad \forall j \geq j_0$  (vgl. Teil 1.) und

$$r^{-j_1} \leq |z| < r^{-(j_1+1)}$$

mit  $j_1 \geq j_0$ , so gilt wegen

$$|m(z)| \leq C_1 e^{R|z|}$$

$$\begin{aligned} |\hat{\phi}(z)| &\leq \prod_{i=1}^{j_1} |m(B^{-i}z)| \prod_{i=j_1+1}^{\infty} \exp\left(r^i |z| C e^{Rr^i |z|}\right) \\ &\leq \prod_{i=1}^{j_1} C_1 e^{R\|B^{-i}\||z|} \exp\left(\sum_{i=j_1+1}^{\infty} C e^{Rr^i} r^{-(j_1+1)}\right) \\ &= C_1^{j_1} \exp\left(\sum_{i=1}^{j_1} R\|B^{-i}\||z|\right) C_2 \\ &\leq C_2 Q(z) \exp\left(R \sum_{i=1}^{\infty} \|B^{-i}\||z|\right) \end{aligned}$$

mit einem Polynom  $Q$ , vgl. Teil 1.) des Beweises. □

Etwas bessere Abschätzungen für den Träger von  $\phi$  erhält man für interpolierende Symbole, vgl. Paragraph 3.6.1.

### Bemerkung 3.22

Eine Skalierungsfunktion mit endlicher Skalierungsmaske hat gemäß Satz 3.20 kompakten Träger, die Umkehrung ist jedoch i.a. falsch, wie folgendes Beispiel von Jia/Micchelli [JM91, Bsp. 5.1] zeigt. Sei

$$\phi(x) := \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

so ist  $\phi$  skalierbar mit  $A = 2$ , für das zugehörige Symbol gilt jedoch

$$m(\omega) = \frac{(e^{2\pi i\omega} + 1)(e^{2\pi i\omega} + 2)}{e^{2\pi i\omega} + 2},$$

die Skalierungsmaske ist also nicht endlich.

Eine hinreichende Bedingung für die Endlichkeit der Skalierungsmaske ist die lineare Unabhängigkeit der Translatierten von  $\phi$ , vgl. Satz 3.5. Bilden die Translatierten von  $\phi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  ein Orthonormalsystem, so sind sie insbesondere linear unabhängig. Daher ist die Skalierungsmaske einer Skalierungsfunktion  $\phi$  mit kompaktem Träger und orthogonalen Translatierten endlich. Dieser Spezialfall war auch Daubechies [Dau88] bereits bekannt.

In Verallgemeinerung zu (3.16) betrachtet man auch Zwei-Skalen-Relationen mit matrixwertiger Skalierungsmaske.

$$\phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} H_k \phi(A \cdot -k) \quad (H_k) \in \ell(\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}^{n \times n}).$$

Für Einzelheiten sei auf Jiang [Jia99b] sowie Cohen *et al.* [CDL98] verwiesen.

### 3.2.2 Interpolierende Skalierungsfunktionen

Anfang der Neunziger Jahre zeigten sich zunehmend Verbindungen zwischen der Theorie der Wavelets und den z.B. in der Computer-Graphik zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen verwendeten *Verfeinerungsschemata*. Zu nennen sind hier vor allem die Arbeiten von Dubuc *et al.* aus den Jahren 1986-1991 über *Iterative Interpolation*, die im Abschnitt 3.6.1 noch näher beleuchtet werden, und die 1991 erschienene Monographie *Stationary Subdivision* von Cavaretta *et al.* [CDM91]. Wie im Falle der Skalierungsfunktionen und Wavelets sind auch hier Zwei-Skalen-Relationen von entscheidender Bedeutung. *Stationary Subdivision* bezeichnet dabei den speziellen Fall, daß auf beiden Seiten der Skalierungsgleichung die gleiche Funktion steht. Für die graphischen Konstruktionsalgorithmen sind *Interpolierende Funktionen* von besonderem Interesse, da sie bei Verfeinerung bereits berechnete Daten interpolieren und daher mit schnellen Verfahren berechnet werden können. Die Forderung der Interpolationseigenschaft für die erzeugende Funktion einer *Mehrfachauflösung* (vgl. Abschnitt 3.3) hat sich in mehrfacher Hinsicht als fruchtbar erwiesen. Zum einen können auf diese Weise Darstellungen von Funktionen in einer Wavelet-Basis als Sampling-Reihen berechnet werden (vgl. Donoho [Don92]), zum anderen ergeben sich bei der Konstruktion interpolierender Skalierungsfunktionen neue Möglichkeiten, wie die Sektion

3.6 zeigen wird. Der verbleibende Teil dieses Abschnitts widmet sich daher ganz den interpolierenden Skalierungsfunktionen und ihren Eigenschaften. Als Einstieg in die Thematik können die Arbeiten von Ji *et al.* [JS97], [JRS99] sowie Dahlke *et al.* [DM97], [DGM98] herangezogen werden.

Im folgenden sei – falls nicht ausdrücklich anders vorausgesetzt – die Skalierungsmaske  $(h_k)$  gemäß Satz 3.20 stets endlich mit  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k = 1$ , d.h. die zugehörige Skalierungsfunktion  $\phi$  hat kompakten Träger.

### Definition 3.23

Eine Funktion  $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$  heißt **interpolierend**, falls gilt:

$$\phi(k) = \delta_{0,k} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \end{cases} . \quad (3.24)$$

Ist  $\hat{\phi} \in L^1$ , so ist  $\phi$  stetig und nach Satz 1.64 gilt für den  $k$ -ten Fourier-Koeffizienten  $c_k$  von  $\varpi\hat{\phi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\phi}(\cdot - k)$ :

$$c_k = \hat{\phi}(k) = \phi(-k) .$$

Ist  $\phi$  interpolierend, so gilt daher für die Fourier-Transformierte der  $c_k$  (i.e. die Fourier-Reihe von  $\varpi\hat{\phi}$ )

$$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n}(c_k) = 1$$

und es ist

$$\begin{aligned} \phi \text{ interpolierend} &\Leftrightarrow c_k = \delta_{0,k} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n}(c_k) = 1 . \end{aligned}$$

Da eine Distribution  $\eta \in \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$  durch ihre Fourier-Koeffizienten bereits eindeutig bestimmt ist (vgl. Satz 1.62), folgt schließlich

$$\phi \text{ interpolierend} \Leftrightarrow \varpi\hat{\phi} = 1 \text{ fast überall.}$$

Damit gilt folgendes Lemma.

### Lemma 3.24

Ist  $\hat{\phi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , so ist  $\phi$  genau dann interpolierend, wenn gilt:

$$\varpi\hat{\phi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\phi}(\cdot - k) = 1 \text{ fast überall.} \quad (3.25)$$

**Bemerkung 3.25**

An einigen Stellen (z.B. Ji/Shen [JS97, S. 3], Ji *et al.* [JRS99, S. 3]) wird behauptet, daß bereits eine stetige Funktion  $\phi$  mit kompaktem Träger genau dann interpolierend sei, wenn (3.25) gilt. Von entscheidender Bedeutung sind in diesem Zusammenhang Aussagen über die Periodisierung einer Funktion bzw. Distribution. Nach Satz 1.64 ist für  $\phi \in L^1$  die Periodisierung  $\varpi\phi \in L^1(\mathbb{T}^n)$ . Eine stetige Funktion mit kompaktem Träger hat aber nicht notwendigerweise eine integrierbare Fourier-Transformierte. Dieudonné [Die75, Aufg. 2, S. 130] gibt folgendes Beispiel: Ist  $\phi$  stetig mit  $\text{supp } \phi \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  und divergiert die Fourier-Reihe von  $\phi$  im Nullpunkt, so ist  $\hat{\phi} \notin L^1$ .

Das folgende Lemma liefert eine hinreichende Bedingung für  $\hat{\phi} \in L^1$  (vgl. Taylor [Tay96, S. 274, Aufg. 2]).

**Lemma 3.26**

Ist  $\hat{\phi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\hat{\phi} \geq 0$  und  $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , so ist  $\hat{\phi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und es gilt  $\|\phi\|_\infty = \|\hat{\phi}\|_1$ .

**Beweis:**

Sei  $f \in \mathcal{S}'$  mit  $\hat{f} \in L^1$ , so ist nach der Fourier-Umkehrformel  $f = \check{\hat{f}}$  stetig und beschränkt mit  $\|f\|_\infty \leq \|\hat{f}\|_1$ . Ist ferner  $\hat{f} \geq 0$ , so gilt

$$\|\hat{f}\|_1 = \int \hat{f} = \check{\hat{f}}(0) = f(0) \leq \|f\|_\infty .$$

In diesem Fall ist also

$$\|f\|_\infty = \|\hat{f}\|_1 . \quad (3.26)$$

Sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  symmetrisch mit  $\varphi \geq 0$  und  $\int \varphi^2 = 1$ . Mit  $\chi := \varphi * \varphi$  sind  $\chi$  und  $\hat{\chi} = \hat{\varphi}^2 \geq 0$  und es ist

$$\chi(0) = \int \varphi(x)\varphi(-x)dx = 1 ,$$

da  $\varphi$  symmetrisch. Sei  $\hat{\phi}_j := \chi(\frac{\cdot}{j})\hat{\phi}$ , so ist  $\hat{\phi}_j \in L^1$ , denn  $\chi \in \mathcal{D}$ . Weiterhin ist  $\hat{\phi}_j \geq 0$  und die  $\hat{\phi}_j$ ,  $j \geq 1$  konvergieren punktweise gegen  $\hat{\phi}$ . Mit (3.26) und der Hölder-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \|\hat{\phi}_j\|_1 &= \|\phi_j\|_\infty = \|\overline{\mathcal{F}}(\chi(\frac{\cdot}{j})) * \phi\|_\infty \\ &\leq \|\phi\|_\infty \cdot \int \overline{\mathcal{F}}(\chi(\frac{\cdot}{j})) \\ &= \|\phi\|_\infty (\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}})(\chi(\frac{\cdot}{j}))(0) \\ &= \|\phi\|_\infty \chi(0) . \end{aligned}$$

Mit dem Fatou-Lemma folgt  $\hat{\phi} \in L^1$ . □

Ein weiteres hinreichendes Kriterium für die Integrierbarkeit von  $\hat{\phi}$  ist die Nicht-Negativität des Symbols  $m$  der Skalierungsmaske von  $\phi$  zusammen mit einer algebraischen Bedingung an  $m$ , der *Interpolationsbedingung* (3.30). Dieses Kriterium wird in Lemma 3.66 formuliert, es benutzt ebenfalls das Fatou-Lemma.

Das folgende Resultat wurde zuerst von Cavaretta *et al.* [CDM91] unter der zusätzlichen Annahme  $\phi$  stetig mit kompaktem Träger bewiesen. Die hier zitierte Form geht auf Jia/Micchelli [JM91, Th. 2.4] zurück.

**Lemma 3.27**

Sei  $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$   $(h, A)$ -skalierbar mit  $(h_k) \in \ell^1(\mathbb{Z}^n)$ . Dann gilt:

- 1.)  $\hat{\phi}(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n, k \neq 0$ .
- 2.)  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \phi(\cdot - k) = \hat{\phi}(0)$  fast überall.

**Beweis:**

Zu 1.) Da  $\phi$  skalierbar ist

$$\hat{\phi} = m(B^{-1}\cdot)\hat{\phi}(B^{-1}\cdot) \quad (3.27)$$

und mit  $\phi \in L^1$  und  $(h_k) \in \ell^1$  sind  $\hat{\phi}$  und  $m$  stetig. Also gilt insbesondere  $\hat{\phi}(0) = m(0)\hat{\phi}(0)$ . Iteration von (3.27) liefert

$$\hat{\phi} = \prod_{i=1}^j m(B^{-i}\cdot)\hat{\phi}(B^{-j}\cdot) \quad j \in \mathbb{N}^* . \quad (3.28)$$

Sei  $|m(0)| < 1$ . Dann ist  $\hat{\phi}(0) = 0$  und da  $A$  expandierend ist

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|B^{-j}\omega\| = 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^n .$$

Somit existiert für jedes  $\omega \in \mathbb{R}^n$  ein  $j_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|m(B^{-j}\omega)| < 1 \quad \forall j > j_0$ , denn  $m$  ist stetig. Aus (3.28) folgt daher für  $j \rightarrow \infty$ , daß  $\hat{\phi} \equiv 0$  ist, denn das Produkt ist beschränkt und  $\hat{\phi}(B^{-j}\cdot) \rightarrow \hat{\phi}(0) = 0$ .

Sei nun  $|m(0)| \geq 1$ . Aus (3.28) folgt für  $k \in \mathbb{Z}^n, k \neq 0$

$$\hat{\phi}(B^j k) = \prod_{i=1}^j m(B^{j-i}k)\hat{\phi}(k) \quad j \in \mathbb{N}^* .$$

Da  $m$   $\mathbb{Z}^n$ -periodisch, ist  $m(B^{j-i}k) = m(0)$  für  $1 \leq i \leq j$ ,  $j \in \mathbb{N}^*$ ,  $k \in \mathbb{Z}^n$  und somit

$$|\hat{\phi}(k)| \leq |\hat{\phi}(B^j k)| \quad j \in \mathbb{N}^* .$$

Da  $\lim_{j \rightarrow \infty} B^j k = \infty$  folgt die Behauptung somit aus  $\hat{\phi} \in \mathcal{C}_0$ .

Zu 2.) Ist  $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , so ist nach Satz 1.64  $\varpi\phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(\cdot - k) \in L^1(\mathbb{T}^n)$  und für den  $k$ -ten Fourier-Koeffizienten der Fourier-Reihe von  $\varpi\phi$  gilt  $c_k = \hat{\phi}(k)$ . Nach 1.) ist jedoch  $\hat{\phi}(k) = 0 \quad \forall k \neq 0$ , d.h. von der Fourier-Reihe bleibt nur der Summand für  $k = 0$  stehen. □

Mit Lemma 3.27 ergibt sich eine interessante Verbindung zwischen der Skalierbarkeit einer Funktion  $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und der Interpolationseigenschaft ihrer Fourier-Transformierten.

### Folgerung 3.28

Ist  $\phi \in L^1(h, A)$ -skalierbar mit  $(h_k) \in \ell^1$  und  $\hat{\phi}(0) = 1$ , so ist  $\hat{\phi}$  interpolierend.

Für geeignete interpolierende Symbole sind also  $\phi$  und  $\hat{\phi}$  interpolierend, i.a. ist jedoch  $\hat{\phi}$  nicht skalierbar.

Für Skalierungsfunktionen folgt aus der Interpolationseigenschaft sofort eine notwendige Bedingung an die Skalierungsmaske: Betrachtet man die Zwei-Skalen-Relation (3.16) für Werte  $x = k \in \mathbb{Z}^n$  ( $\phi$  ist stetig),

$$\phi(k) = a \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} h_l \phi(Ak - l) ,$$

so ist nach (3.24)  $\phi(k) = \delta_{0,k}$  und  $\phi(Ak - l) = \delta_{Ak,l}$ , d.h. es gilt

$$h_{Ak} = \frac{\delta_{0,k}}{a} . \tag{3.29}$$

(3.29) heißt **Interpolationsbedingung an die Skalierungsmaske**. Äquivalent dazu läßt sich auch eine Interpolationsbedingung an das Symbol angeben:

### Lemma 3.29

Sei  $\phi(h, A)$ -skalierbar mit endlicher Skalierungsmaske  $h$  und Symbol  $m$ ,  $a = |\det A|$  und  $\mathcal{R} = \{\rho_0, \dots, \rho_{a-1}\}$  sei ein Repräsentantensystem von  $\mathbb{Z}^n / B\mathbb{Z}^n$ . Dann ist die Bedingung

$$\sum_{i=0}^{a-1} m(\cdot + B^{-1}\rho_i) = 1 \tag{3.30}$$

äquivalent zu (3.29). Gleichung (3.30) heißt **Interpolationsbedingung an das Symbol**.

Zum Beweis wird folgendes Korollar zum Satz 1.70 über Charaktersummen benötigt.

### Korollar 3.30

Sei  $A$  eine für  $\mathbb{Z}^n$  zulässige Dilatation mit  $a = |\det A|$ ,  $B = A^T$  und  $\mathcal{R} = \{\rho_0, \dots, \rho_{a-1}\}$  ein Repräsentantensystem von  $\mathbb{Z}^n/B\mathbb{Z}^n$ . Dann gilt:

$$\sum_{i=0}^{a-1} e_k(B^{-1}\rho_i) = \begin{cases} a, & k \in A\mathbb{Z}^n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

### Beweis des Korollars:

Sei

$$\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$$

und

$$\begin{aligned} \chi_k : \mathbb{Z}^n &\rightarrow \mathbb{U} \\ l &\mapsto e_k(B^{-1}l) \quad \text{für festes } k \in \mathbb{Z}^n . \end{aligned}$$

$\chi_k$  ist ein Charakter von  $\mathbb{Z}^n$  und da  $e_k$   $\mathbb{Z}^n$ -periodisch gilt

$$e_k(B^{-1}l) = e_k(B^{-1}(l + Bl')) \quad \text{für } l' \in \mathbb{Z}^n .$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_k : \mathbb{Z}^n/B\mathbb{Z}^n &\rightarrow \mathbb{U} \\ l + B\mathbb{Z}^n &\mapsto \chi_k(l) \end{aligned}$$

definiert und  $\tilde{\chi}_k$  ist ein Charakter von  $\mathbb{Z}^n/B\mathbb{Z}^n$ . Nach Satz 1.70 gilt daher

$$\sum_{i=0}^{a-1} \tilde{\chi}_k(\rho_i + B\mathbb{Z}^n) = \sum_{i=0}^{a-1} \chi_k(\rho_i) = \begin{cases} a, & \chi_k(\rho_i) = 1 \quad \forall \rho_i \in \mathcal{R} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \chi_k(\rho_i) = 1 \quad \forall \rho_i \in \mathcal{R} &\Leftrightarrow \chi_k(l) = 1 \quad \forall l \in \mathbb{Z}^n/B\mathbb{Z}^n \\ &\Leftrightarrow e_k(B^{-1}l) = 1 \quad \forall l \in \mathbb{Z}^n + B\mathbb{Z}^n \\ &\Leftrightarrow \langle k|B^{-1}l \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall l \in \mathbb{Z}^n + B\mathbb{Z}^n \\ &\Leftrightarrow \langle k|B^{-1}l' \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall l' \in \mathbb{Z}^n \\ &\Leftrightarrow \langle A^{-1}k|l' \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall l' \in \mathbb{Z}^n \\ &\Leftrightarrow k \in A\mathbb{Z}^n . \end{aligned}$$

□

**Beweis des Lemmas 3.29:**

Einsetzen der Definition für das Symbol in (3.30) liefert

$$\sum_{i=0}^{a-1} m(\cdot + B^{-1}\rho_i) = \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k e_{-k}(\cdot + B^{-1}\rho_i) .$$

Beide Summen sind endlich, also folgt

$$\sum_{i=0}^{a-1} m(\cdot + B^{-1}\rho_i) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k e_{-k} \sum_{i=0}^{a-1} e_{-k}(B^{-1}\rho_i) .$$

Anwendung des Korollars 3.30 liefert schließlich

$$\sum_{i=0}^{a-1} m(\cdot + B^{-1}\rho_i) = a \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_{Ak} e_{-Ak}$$

und da die  $e_k$  linear unabhängig sind, ist die rechte Seite dieser Gleichung genau dann gleich 1, wenn (3.29) gilt.

□

Die äquivalenten Bedingungen (3.29) und (3.30) sind also notwendige Bedingungen dafür, daß die zugehörige Skalierungsfunktion  $\phi$  interpolierend ist. Sie sind jedoch nicht hinreichend, wie die folgenden Beispiele von Ji *et al.* [JRS99] zeigen.

**Beispiel 3.31**

1.) Sei

$$m(\omega) := \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2\pi i \omega} ,$$

also  $A = a = 2$ ,  $h_0 = h_1 = \frac{1}{2}$ . Es ist  $\sum h_k = 1$  und offensichtlich gilt

$$h_{Ak} = h_{2k} = \frac{1}{2} \delta_{0,k} ,$$

die Skalierungsmaske erfüllt also die Interpolationsbedingung (3.29). Die zur Zwei-Skalen-Relation

$$\phi = \phi(2\cdot) + \phi(2\cdot - 1)$$

gehörende Skalierungsfunktion  $\phi$  ist jedoch die charakteristische Funktion des Intervalls  $[0, 1]$  und somit nicht stetig! Abbildung 3.3 zeigt das Symbol in parametrischer Darstellung.

2.) Sei

$$\begin{aligned} m(\omega) &:= \cos^2(3\pi\omega) \\ &= \frac{1}{4}(2 + e^{-6\pi i\omega} + e^{6\pi i\omega}), \end{aligned}$$

also  $A = a = 2$ ,  $h_0 = \frac{1}{2}$ ,  $h_{-3} = h_3 = \frac{1}{4}$ . Es ist  $\sum h_k = 1$  und offensichtlich gilt

$$h_{Ak} = h_{2k} = \frac{1}{2}\delta_{0,k},$$

die Skalierungsmaske erfüllt also die Interpolationsbedingung (3.29).

Es ist aber  $m(\omega) = 0 \forall \omega$  mit

$$\omega = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Annahme:  $m$  erfüllt das Cohen-Kriterium 3.33.

Dann existiert ein Kompaktum  $K \subset \mathbb{R}$  mit

$$m(2^{-j}\omega) \neq 0 \quad \forall \omega \in K, j \in \mathbb{N}^*$$

und somit ist  $2^{-j}(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}k) \notin K$  für  $j \in \mathbb{N}^*$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Dies steht im Widerspruch zur Bedingung 1.) des Cohen-Kriteriums 3.33, da  $\lim_{j \rightarrow \infty} 2^{-j} = 0$ , d.h. das Cohen-Kriterium ist nicht erfüllt und somit die zum Symbol  $m$  gehörige Skalierungsfunktion nicht stabil.

Es stellt sich also die Frage nach einer hinreichenden Bedingung dafür, daß eine  $(h, A)$ -skalierbare Funktion  $\phi$  interpolierend ist. Von entscheidender Bedeutung ist hierbei die Stabilität von  $\phi$ . Lawton *et al.* [LLS97] bewiesen folgenden Zusammenhang.

### Satz 3.32

*Eine stetige Skalierungsfunktion  $\phi$  ist genau dann interpolierend, wenn  $\phi$  stabil ist und das zugehörige Symbol  $m$  die Interpolationsbedingung (3.30) erfüllt.*

Zum Beweis dieses Satzes verwenden Lawton *et al.* den Übergangoperator (vgl. Paragraph 3.5.3). Siehe hierzu auch das Theorem 3.1 bei Cohen *et al.* [CGV99].

Für die Stabilität einer skalierbaren Funktion  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  hat Cohen [Coh90] ein notwendiges und hinreichendes Kriterium an das Symbol formuliert.

### Definition 3.33 (Cohen-Kriterium)

Das Symbol  $m$  erfüllt das **Cohen-Kriterium**, falls gilt: Es existiert ein Kompaktum  $K \subset \mathbb{R}^n$  mit:

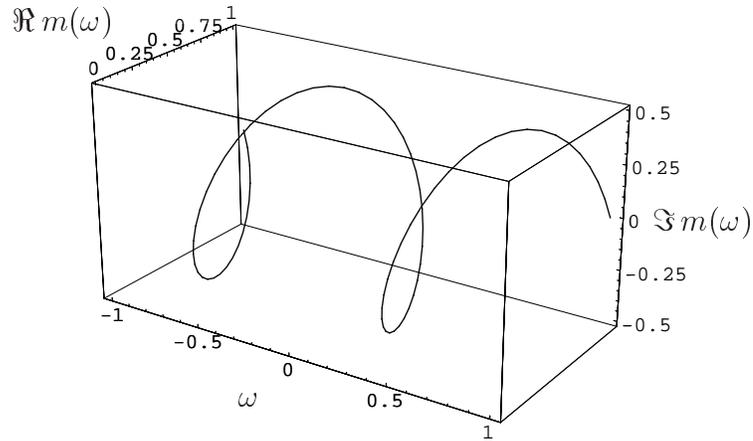


Abbildung 3.3: Das Symbol aus Beispiel 3.31.

- 1.)  $K$  enthält eine Umgebung des Ursprungs.
- 2.)  $K$  ist  $\mathbb{Z}^n$ -Kachel.
- 3.)  $m(\omega) \neq 0 \quad \forall \omega \in \bigcup_{j=1}^{\infty} B^{-j}K$ .

3.) ist äquivalent zu

$$3'.) \quad m(B^{-j}\omega) \neq 0 \quad \forall \omega \in K, \quad j \in \mathbb{N}^*.$$

**Satz 3.34 (Cohen)**

Sei  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  skalierbar mit Symbol  $m$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- 1.)  $\phi$  ist stabil.
- 2.)  $m$  erfüllt das Cohen-Kriterium 3.33.

Damit läßt sich zeigen (vgl. Villemoes [Vil94, Beh. 2.4]):

**Lemma 3.35**

Sei  $\phi$   $(h, A)$ -skalierbar (mit endlicher Skalierungsmaske) und  $m$  das zugehörige Symbol, so sind folgende Aussagen äquivalent.

- 1.) Das Symbol  $m$  erfüllt das Cohen-Kriterium 3.33.
- 2.)  $\phi$  ist Erzeuger einer Riesz-Mehrfachauflösung (vgl. Definition 3.37).

3.)  $\hat{\phi}$  besitzt keine  $\mathbb{Z}^n$ -periodischen Nullstellen in  $\mathbb{R}^n$ .

### Folgerung 3.36

Eine interpolierende Skalierungsfunktion  $\phi$  (mit endlicher Skalierungsmaske) ist Erzeuger einer Riesz-Mehrfachauflösung.

### 3.2.3 Übersicht

Im folgenden sollen die im Zusammenhang mit interpolierenden Skalierungsfunktionen wichtigen Bedingungen in einer Übersicht dargestellt werden. Die Endlichkeit der Skalierungsmaske wird vorausgesetzt.

#### Algebraische Bedingungen:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k = 1 \quad (\text{M1})$$

$$m(0) = 1 \quad (\text{M1}')$$

$$m \geq 0 \quad (\text{M2})$$

$$\sum_{i=0}^{a-1} m(\cdot + B^{-1}\rho_i) = 1 \quad (\text{M3})$$

$$h_{Ak} = \frac{\delta_{0,k}}{a} \quad k \in \mathbb{Z}^n \quad (\text{M4})$$

#### Analytische Bedingungen:

$$\phi \text{ stetig und } \phi(k) = \delta_{0,k} \quad (\text{M5})$$

$$\hat{\phi} \in L^1 \quad (\text{M6})$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\phi}(\cdot - k) = 1 \quad (\text{M7})$$

$$\text{Stabilität von } \phi \quad (\text{M8})$$

$$\text{Cohen-Kriterium} \quad (\text{M9})$$

Die Bedingung (M1) bzw. die dazu äquivalente Bedingung (M1') ist unerlässlich für die Konvergenz des Produkts in (3.19). Sie wird daher im folgenden stets vorausgesetzt.

Die Bedingungen (M3) und (M4) sind notwendige algebraische Bedingungen an das Symbol bzw. die Skalierungsmaske einer Skalierungsfunktion  $\phi$ , so daß  $\phi$  die Interpolationsbedingung (M5) erfüllt. Die Äquivalenz von (M3) und (M4) wurde in Lemma 3.29 gezeigt, die Implikation (M5)  $\Rightarrow$  (M4) wurde in (3.29) hergeleitet.

Mit Lemma 3.24 wurde die Äquivalenz von (M5) und (M7) unter Voraussetzung von (M6) gezeigt. Interessanterweise läßt sich die analytische Bedingung (M6) auf algebraische Bedingungen zurückführen. Mit Lemma 3.66 wird gezeigt werden, daß (M6) bereits aus den Bedingungen (M2) und (M3) gefolgert werden kann. Insbesondere gilt also bereits unter den Voraussetzungen (M2) und (M3), daß  $\phi$  stetig ist, aufgrund der stets endlichen Skalierungsmaske kompakten Träger hat und somit  $\phi, \hat{\phi} \in L^1 \cap L^2$  ist. (M7) kann nicht aus (M3) gefolgert werden, auch nicht unter Voraussetzung von (M2), vgl. Beispiel 3.31 2.). (M8) und (M9) schließlich sind nach Satz 3.32 und Satz 3.34 hinreichende Kriterien dafür, daß eine stetige Skalierungsfunktion  $\phi$ , die (M3) oder (M4) erfüllt, interpolierend ist, d.h. die Bedingung (M5) erfüllt. Eine Sonderrolle kommt dem Lemma 3.27 zu. Es zeigt, daß die Fourier-Transformierte einer skalierbaren Funktion mit  $\ell^1$ -Maske im wesentlichen interpolierend ist.

### 3.3 Skalierungsfunktionen als Erzeuger einer Mehrfachauflösung

Die von Mallat und Meyer 1986 formulierte Theorie der Mehrfachauflösung lieferte die Grundlage für die Konstruktion orthonormaler Wavelets mit kompaktem Träger durch Daubechies [Dau88]. In dieser Arbeit zeigt Sie auch, daß der von Mallat entwickelte diskrete Algorithmus zur Bildzerlegung und -rekonstruktion im wesentlichen äquivalent zum Konzept der Mehrfachauflösung ist, vgl. auch Paragraph 3.3.3.

Das zu einer orthonormalen Mehrfachauflösung gehörende Zerlegungsschema mit exakter Rekonstruktion besitzt jedoch einige Nachteile. Zu nennen sind hier vor allem die Einschränkung auf gleiche Filter für Zerlegung und Rekonstruktion sowie die fehlende Symmetrie [Dau92, Th. 8.1.4]. Die von Cohen *et al.* [CDF92] präsentierte Konstruktion zweier biorthogonaler Mehrfachauflösungen entspricht einem Zerlegungsschema mit exakter Rekonstruktion unter Verwendung unterschiedlicher Analyse- und Rekonstruktionsfilter. In diesem Fall sind symmetrische Filter möglich, die insbesondere in der Bildverarbeitung gerne verwendet werden. In der Literatur werden symmetrische Filter gelegentlich auch als *linear phase* Filter bezeichnet [KV92, S. 552].

Ziel dieses Abschnitts ist es, die Verallgemeinerung der biorthogonalen Konstruktion von Cohen *et al.* auf den mehrdimensionalen Fall vorzustellen. Der mehrdimensionale orthogonale Falle wurde 1992 von Kovačević/Vetterli [KV92] analysiert. Eine eingehende Darstellung des mehrdimensionalen biorthogonalen Falles lieferten Chui/Li [CL94].

Der Abschnitt gliedert sich in drei Teile. Nach einer Einführung des Begriffes der Mehrfachauflösung sowie ersten Eigenschaften im Paragraph 3.3.1 wird in 3.3.2 zunächst der eindimensionale orthogonale Fall kurz beleuchtet. Daran anschließend stellt der Unterabschnitt 3.3.3 den allgemeinen biorthogonalen Fall vor.

### 3.3.1 Mehrfachauflösungen und Wavelet-Basen

#### Definition 3.37

Eine Folge  $(\mathcal{V}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  abgeschlossener Unterräume des  $L^2(\mathbb{R}^n)$  heißt **Mehrfachauflösung**, genauer Mehrfachauflösung bezüglich  $A$  (*Multiresolution Analysis, MRA*), falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

$$1.) \quad \dots \subset \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_{-1} \subset \mathcal{V}_{-2} \subset \dots^1$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}_j = \{0\} \quad , \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}_j} = L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$2.) \quad f \in \mathcal{V}_j \Leftrightarrow f(A \cdot) \in \mathcal{V}_{j-1} \quad (\Leftrightarrow f(A^j \cdot) \in \mathcal{V}_0)$$

$$3.) \quad \exists \phi \in \mathcal{V}_0 \text{ , so daß } \{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}^n\} \text{ ONB von } \mathcal{V}_0 \text{ ist.}$$

Dabei ist die Matrix  $A$  eine für das Gitter  $\mathbb{Z}^n$  zulässige Dilatation mit  $a := |\det A|$ . Ist das Gitter  $A\mathbb{Z}^n$  separabel (vgl. Definition 2.39), so heißt auch die Mehrfachauflösung **separabel**.

Gilt statt 3.) lediglich die Bedingung

$$3'.) \quad \exists \phi \in \mathcal{V}_0 \text{ , so daß } \{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}^n\} \text{ Riesz-Basis von } \mathcal{V}_0 \text{ ist,}$$

so spricht man von einer **Riesz-Mehrfachauflösung**. Die Funktion  $\phi$  heißt **Erzeuger** oder nach Meyer auch **Father-Wavelet** der Mehrfachauflösung.

#### Folgerung 3.38

1.) Setzt man

$$\phi_{j,k} := a^{-\frac{j}{2}} \phi(A^{-j} \cdot -k) \text{ ,} \quad (3.31)$$

so ist  $\{\phi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}^n\}$  eine ON-Basis (Riesz-Basis) von  $\mathcal{V}_j$ . Nach Definition ist also  $\mathcal{V}_j = \mathcal{S}_2(\phi(A^{-j} \cdot))$ .

<sup>1</sup>Numerierung der Räume  $\mathcal{V}_j$  nach Daubechies. Andere Autoren (z.B. Meyer) verwenden die umgekehrte Ordnung (vgl. [Dau92, Kap. 5, Anm. 1]).

- 2.) Für den Erzeuger  $\phi$  einer Mehrfachauflösung gilt eine Zwei-Skalen-Relation der Form (3.16): Da  $\phi_{1,0} \in \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0$  und  $\{\phi_{0,k}; k \in \mathbb{Z}^n\}$  ON-Basis (Riesz-Basis) von  $\mathcal{V}_0$  ist, existiert eine Folge  $(c_k) \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ , so daß gilt:

$$\phi_{1,0} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \phi_{0,k} .$$

Setzt man  $h_k := a^{-\frac{1}{2}} c_k$ , so ist also

$$\phi_{1,0} = a^{-\frac{1}{2}} \phi(A^{-1} \cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \phi(\cdot - k)$$

und damit

$$\phi = a \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k \phi(A \cdot - k) .$$

Ist  $\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}^n\}$  eine Orthonormalbasis, so ist

$$h_k = a^{-\frac{1}{2}} \langle \phi_{1,0} | \phi_{0,k} \rangle, k \in \mathbb{Z}^n$$

und man definiert für  $j \in \mathbb{Z}$  abgeschlossene Unterräume  $\mathcal{W}_{j+1}$  in  $\mathcal{V}_j$  durch

$$\mathcal{V}_j = \mathcal{V}_{j+1} \oplus \mathcal{W}_{j+1} . \quad (3.32)$$

Für die Räume  $\mathcal{W}_j$  ergeben sich folgende Eigenschaften:

- 1.)  $\mathcal{W}_j \perp \mathcal{W}_{j'}$   $j \neq j'$ .
- 2.)  $L^2(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{W}_j$ .
- 3.)  $f \in \mathcal{W}_j \Leftrightarrow f(A \cdot) \in \mathcal{W}_{j-1}$ .

Ziel ist es dann, für die Komplementär-Räume  $\mathcal{W}_j$  Orthonormalbasen zu konstruieren, die sich durch Translation und Dilatation einer Funktion (oder einer endlichen Menge von Funktionen) ergeben.

Ist  $\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}^n\}$  jedoch nur Riesz-Basis von  $\mathcal{V}_0$ , so ergibt sich daraus keine kanonische Definition der Komplementär-Räume, insbesondere nicht durch (3.32). Hier behilft man sich mit der Konstruktion zweier Mehrfachauflösungen

$$\begin{aligned} \dots &\subset \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_{-1} \subset \mathcal{V}_{-2} \subset \dots & (3.33) \\ \dots &\subset \tilde{\mathcal{V}}_2 \subset \tilde{\mathcal{V}}_1 \subset \tilde{\mathcal{V}}_0 \subset \tilde{\mathcal{V}}_{-1} \subset \tilde{\mathcal{V}}_{-2} \subset \dots , \end{aligned}$$

vgl. Paragraph 3.3.3.

**Definition 3.39**

Sei  $I$  eine endliche Indexmenge.

- 1.)  $\{\psi^\ell; \ell \in I\} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$  heißt Familie von **(Mother-)Wavelets**, falls die Funktionen

$$\psi_{j,k}^\ell = a^{-\frac{j}{2}} \psi^\ell(A^{-j} \cdot -k) \quad \ell \in I, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n \quad (3.34)$$

eine Riesz-Basis des  $L^2(\mathbb{R}^n)$  bilden. Dann heißt

$$\Psi := \{\psi_{j,k}^\ell; \ell \in I, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n\} \quad (3.35)$$

**Wavelet-Basis.**

- 2.)  $\Psi$  heißt **orthonormale Wavelet-Basis**, falls gilt:

$$\langle \psi_{j,k}^\ell | \psi_{j',k'}^{\ell'} \rangle = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{j,j'} \delta_{k,k'} . \quad (3.36)$$

- 3.) Zwei Wavelet-Basen  $\Psi, \tilde{\Psi}$  heißen **biorthonormale Wavelet-Basen**, falls gilt:

$$\langle \psi_{j,k}^\ell | \tilde{\psi}_{j',k'}^{\ell'} \rangle = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{j,j'} \delta_{k,k'} . \quad (3.37)$$

- 4.) Gilt statt (3.37) lediglich die schwächere Bedingung

$$\langle \psi_{j,k}^\ell | \psi_{j',k'}^{\ell'} \rangle = 0 \quad j \neq j' , \quad (3.38)$$

so heißt  $\Psi$  **Pre-Wavelet-Basis**.

Jeder Erzeuger  $\phi$  einer Mehrfachauflösung ist nach Folgerung 3.38 eine Skalierungsfunktion im Sinne der Definition 3.19. Für die Konstruktion von Mehrfachauflösungen von entscheidender Bedeutung ist jedoch die umgekehrte Fragestellung: Unter welchen (notwendigen und hinreichenden) Bedingungen ist eine Skalierungsfunktion  $\phi$  Erzeuger einer Mehrfachauflösung? Für den eindimensionalen Fall gibt Daubechies [Dau92, Kap. 5.3.2] folgende hinreichenden Bedingungen an.

**Satz 3.40**

Sei  $\phi(h, A)$ -skalierbar mit folgenden Eigenschaften:

- 1.)  $(h_k) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ .
- 2.)  $\phi$  ist stabil.
- 3.)  $\hat{\phi}$  ist beschränkt und es existiert eine Umgebung des Nullpunkts, in der  $\hat{\phi}$  stetig mit  $\hat{\phi}(0) \neq 0$  ist.

Dann ist  $\phi$  Erzeuger einer Riesz-Mehrfachauflösung.

Die Stabilität und Skalierbarkeit von  $\phi$  mit Skalierungsmaske  $(h_k) \in \ell^2$  ist notwendig und hinreichend dafür, daß die  $\phi_{j,k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  eine Riesz-Basis des Raums

$$\mathcal{V}_j = \overline{\text{span}} \{ \phi_{j,k}; k \in \mathbb{Z} \}$$

bilden und die  $\mathcal{V}_j$  für wachsendes  $j$  eine absteigende Kette bilden (vgl. Punkt 1.) in Definition 3.37). Mit der Stabilität folgert Daubechies weiterhin, daß

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}_j = \{0\}$$

ist (ibid., Beh. 5.3.1). Die dritte Voraussetzung schließlich wird benötigt, um zu zeigen, daß  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}_j$  in  $L^2(\mathbb{R})$  dicht liegt. Im orthonormalen Fall ist dies äquivalent zu  $\hat{\phi}(0) = 1$ , vgl. Mallat [Mal89, Lem. 1] oder Meyer [Mey90, §2.7].

Mit den Definitionen 3.19 und 3.10 für Skalierbarkeit und Stabilität in höheren Dimensionen läßt sich Daubechies' Argumentation unverändert auf den mehrdimensionalen Fall übertragen, Satz 3.40 gilt also unverändert auch für mehrdimensionale Skalierungsfunktionen (vgl. Jia/Micchelli [JM91, Th. 2.2]).

Es bleibt aber die Frage nach der Konstruktion der Skalierungsfunktionen und Wavelets. Diese beginnt meist nicht mit der Skalierungsfunktion, sondern mit der zugehörigen Skalierungsmaske bzw. deren Symbol. Das Konstruktionsverfahren von Daubechies [Dau88] erlaubt im eindimensionalen Fall die Konstruktion von orthogonalen Wavelet-Basen mit kompaktem Träger und beliebigem Regularitätsgrad (zum Begriff *Regularität* siehe Abschnitt 3.5). Das Verfahren benutzt jedoch an entscheidender Stelle die Faktorisierung eines Polynoms mittels des Bezout-Theorems 3.97 und des Lemmas von Fejer-Riesz. Während ersteres auch noch allgemein in graduierten Ringen gültig ist (Daubechies [Dau92, S. 170]), steht das Riesz-Lemma in höheren Dimensionen nicht mehr zur Verfügung. Es ist daher bislang kein allgemeines Konstruktionsverfahren bekannt, das – analog zur Daubechies'schen Konstruktion in einer Dimension – für höhere Dimensionen die Konstruktion orthogonaler Wavelets mit kompaktem Träger und beliebiger Regularität erlaubt.

Der folgende Abschnitt liefert einen kurzen Abriss dieses Konstruktionsverfahrens. Im Anschluß daran wird der allgemeinere Fall einer biorthogonalen Konstruktion in höheren Dimensionen diskutiert.

### 3.3.2 Der eindimensionale orthogonale Fall

Daubechies gelang es 1988, auf der Theorie der Mehrfachauflösungen aufbauend, orthonormale Wavelets mit kompaktem Träger und beliebigem Regularitätsgrad zu konstruieren. Der nachfolgende kurze Überblick über dieses Konstruktionsverfahren dient insbesondere zum Vergleich mit der im nächsten Abschnitt diskutierten allgemeinen biorthogonalen Konstruktion.

Nach Lemma 3.14 ist

$$\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}\} \text{ Orthonormalsystem} \Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\cdot - k)|^2 = 1 \quad \text{fast überall.}$$

Da

$$\hat{\phi} = m\left(\frac{\cdot}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\cdot}{2}\right)$$

folgt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| m\left(\cdot - \frac{k}{2}\right) \right|^2 \left| \hat{\phi}\left(\cdot - \frac{k}{2}\right) \right|^2 = 1 \quad \text{fast überall.}$$

Aufspaltung der Summe für gerade und ungerade  $k$  liefert

$$\sum_{k \in 2\mathbb{Z}} |m(\cdot - k)|^2 |\hat{\phi}(\cdot - k)|^2 + \sum_{k \in 1+2\mathbb{Z}} \left| m\left(\cdot - k - \frac{1}{2}\right) \right|^2 \left| \hat{\phi}\left(\cdot - k - \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1$$

fast überall und mit der  $\mathbb{Z}$ -Periodizität von  $m$  sowie erneuter Anwendung des Lemmas 3.14 folgt

$$|m|^2 + |m(\cdot - \frac{1}{2})|^2 = 1 \quad \text{fast überall auf } \mathbb{T}.$$

In der Praxis beginnt die Konstruktion einer orthonormalen Mehrfachauflösung i.d.R. mit der Skalierungsmaske bzw. dem zugehörigen Symbol  $m$ , insbesondere, wenn man an der Konstruktion von Wavelets mit kompaktem Träger interessiert ist. Notwendige Voraussetzungen an das Symbol sind in diesem Fall

$$|m|^2 + |m(\cdot - \frac{1}{2})|^2 = 1, \quad (3.39)$$

$$m(0) = 1 \quad (\text{und demnach } m(\frac{1}{2}) = 0). \quad (3.40)$$

(3.39) ist notwendig, damit die Translatierten von  $\phi$  ein Orthonormalsystem bilden und  $m(0) = 1$  ist notwendig für die Konvergenz des Produktes (3.19). Im dem von Daubechies betrachteten Fall einer endlichen Skalierungsmaske muß daher  $m$  von der Form

$$m(\omega) = \left( \frac{1 + e^{-2\pi i \omega}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\omega) \quad (3.41)$$

mit  $\mathcal{L} \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$  und  $N \geq 1$  sein. Meist fordert man (3.41) für ein  $N > 1$ , denn eine  $N$ -fache Nullstelle von  $m$  im Punkt  $\frac{1}{2}$  ist notwendige Voraussetzung für  $\phi \in \mathcal{C}^N$ , vgl. Paragraph 3.5.4. Mit  $u(\omega) := |m(\omega)|^2$  schreiben sich die Voraussetzungen nun in der Form

$$u(\omega) + u(\omega - \frac{1}{2}) = 1 \quad (3.42)$$

und

$$u(\omega) = (\cos^2(\pi\omega))^N L(\omega)$$

mit

$$L(\omega) = |\mathcal{L}(\omega)|^2 .$$

(3.42) läßt sich auch interpretieren als Interpolationsbedingung für das nicht-negative Symbol  $u$ .

$L(\omega)$  ist ebenfalls ein Polynom in  $\cos^2 \omega$ , mit  $\cos^2 \omega = 1 - \sin^2 \omega$  folgt

$$u(\omega) = (\cos^2(\pi\omega))^N P(\sin^2(\pi\omega)) ,$$

wobei  $P$  wiederum ein Polynom ist. Mit  $y := \sin^2(\pi\omega)$  hat (3.42) nun die Form 

$$(1 - y)^N P_N(y) + y^N P_N(1 - y) = 1 ,$$

und das Bezout-Theorem 3.97 liefert die Lösung von kleinstem Grad:

$$P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} y^k . \quad (3.43)$$

Ein trigonometrisches Polynom  $m$  der Form (3.41) genügt genau dann der Bedingung (3.39), falls sich  $L(\omega) = |\mathcal{L}(\omega)|^2$  in der Form

$$L(\omega) = P(\sin^2 \pi\omega)$$

mit

$$P(y) = P_N(y) + y^N R(\frac{1}{2} - y)$$

schreiben läßt. Hierbei ist  $P_N$  die Bezout-Lösung (3.43) und  $R$  ein Polynom ungerader Ordnung, so daß  $P(y) \geq 0$  für  $\omega \in \mathbb{T}$  ist. Zur Konstruktion der Skalierungsfunktion benötigt man jedoch nicht  $|m|^2$ , sondern  $m$  selbst, so daß nunmehr ein Polynom zu bestimmen ist, dessen Quadrat wiederum  $L(\omega)$  ist. Dazu verwendet Daubechies das Lemma von Riesz [Dau92, Lem. 6.1.3]. 

Das auf diese Weise bestimmte Polynom  $m$  liefert jedoch nicht in jedem Fall eine Skalierungsfunktion einer Mehrfachauflösung, da im allgemeinen das Cohen-Kriterium nicht erfüllt ist (für ein Gegenbeispiel siehe Daubechies

[Dau92, S. 177], vgl. auch Bsp 3.31 2.). Hierfür sind weitere Bedingungen notwendig. Hinreichend ist die Orthogonalität der Translatierten von  $\phi$ , die sich z.B. mit dem Cohen-Kriterium 3.33 direkt an  $m$  überprüfen läßt.

Ist  $\phi$  tatsächlich Erzeuger einer Mehrfachauflösung, so ist ein zugehöriges Wavelet durch

$$\psi := \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \bar{h}_{-k+1} \phi(2 \cdot -k)$$

gegeben. Hat  $\phi$  endliche Skalierungsmaske und damit kompakten Träger, so ist auch der Träger von  $\psi$  kompakt und als endliche Linearkombination von Translatierten von  $\phi$  besitzt das Wavelet auch die gleichen Regularitätseigenschaften wie die Skalierungsfunktion.

### 3.3.3 Der biorthogonale Fall

Die Konstruktion „echter“, i.e. nicht mittels Tensorprodukten gebildeter, mehrdimensionaler Wavelets gestaltet sich wesentlich schwieriger als im eindimensionalen Fall, da das entscheidende Hilfsmittel – die Faktorisierung von Polynomen – nicht mehr greift. Bis auf wenige Spezialfälle setzen die mehrdimensionalen Verfahren daher auf der biorthogonalen Konstruktion von Cohen *et al.* [CDF92] auf. An der Stelle, wo im orthogonalen Fall das Quadrat des Symbols  $m$  auftaucht, steht nunmehr ein Produkt aus zwei Symbolen – entsprechend der Tatsache, daß es zwei Erzeuger voneinander verschiedener Mehrfachauflösungen gibt, vgl. (3.33).

Die biorthogonale Konstruktion im eindimensionalen Fall findet sich in ähnlichen Darstellungen bei Cohen *et al.* (op. cit.), Cohen [Coh92] und Daubechies [Dau92]. Die Diskussion des mehrdimensionalen Falles bei Chui/Li [CL94] diene als Grundlage für die nachfolgenden Ausführungen. Die Struktur der Zerlegung wird in diesem Fall auch dadurch komplizierter, daß i.a.  $|\det A| > 2$  ist und dann die Räume  $\mathcal{W}_j$  nur noch FSI-Räume im Sinne der Definition 3.1 2.) sind, vgl. die Lemmata 3.48 und 3.49. Auf neuere Arbeiten, die den mehrdimensionalen biorthogonalen Fall für weitere Ausführungen zugrunde legen, wird in Paragraph 3.6.4 hingewiesen.

#### Voraussetzungen

Sei  $A$  eine für  $\mathbb{Z}^n$  zulässige Dilatation mit  $|\det A| = a$  und  $\mathcal{R} = \{\rho_0, \dots, \rho_{a-1}\}$  ein Repräsentantensystem von  $\mathbb{Z}^n / B\mathbb{Z}^n$  mit  $\rho_0 = 0$ . Weiterhin seien Folgen

$$(h_k^\ell) \in \ell^1(\mathbb{Z}^n), \ell = 0, \dots, a-1$$

gegeben, so daß die aus den zugehörigen Symbolen

$$m_\ell \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^n), \ell = 0, \dots, a-1$$

gebildete Matrix

$$M(\omega) := \left( m_\ell(\omega - B^{-1}\rho_i) \right)_{i,\ell=0,\dots,a-1}$$

für alle  $\omega \in \mathbb{T}^n$  invertierbar ist.

Definiert man

$$\tilde{m}_\ell \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^n), \ell = 0, \dots, a-1$$

als eindeutige Lösung von

$$\sum_{\ell=0}^{a-1} \tilde{m}_\ell(\omega - B^{-1}\rho_i) \tilde{m}_\ell(\omega) = \delta_{i,0} \quad 0 \leq i \leq a-1 \quad \forall \omega \in \mathbb{T}^n, \quad (3.44)$$

so folgt aus der Cramer-Regel und dem Satz von Wiener (z.B. bei Rudin [Rud66, Th. 18.21]), daß die  $\tilde{m}_\ell$  Symbole zu Masken

$$(\tilde{h}_k^\ell) \in \ell^1(\mathbb{Z}^n), \ell = 0, \dots, a-1$$

sind.

Sei  $\omega_0 := \omega - B^{-1}\rho_i$ , so ist

$$\sum_{\ell=0}^{a-1} \tilde{m}_\ell(\omega - B^{-1}\rho_i) \tilde{m}_\ell(\omega - B^{-1}\rho_{i'}) = \sum_{\ell=0}^{a-1} \tilde{m}_\ell(\omega_0 - B^{-1}(\rho_i - \rho_{i'})) \tilde{m}_\ell(\omega_0).$$

Da  $\rho_0, \dots, \rho_{a-1}$  ein Repräsentantensystem von  $\mathbb{Z}^n/B\mathbb{Z}^n$ , ist  $\rho_{i'} - \rho_{i''} = \rho_i + Bk$  für ein  $i$ ,  $0 \leq i \leq a-1$  und ein  $k \in \mathbb{Z}^n$  und es gilt

$$\begin{aligned} i = 0 &\Leftrightarrow \rho_i = 0 \\ &\Leftrightarrow \rho_{i'} = \rho_{i''} \\ &\Leftrightarrow i' = i'' . \end{aligned}$$

Daher ist (3.44) äquivalent zu

$$\sum_{\ell=0}^{a-1} \tilde{m}_\ell(\omega - B^{-1}\rho_i) \tilde{m}_\ell(\omega - B^{-1}\rho_{i'}) = \delta_{i,i'} \quad \forall \omega \in \mathbb{T}^n. \quad (3.45)$$

Sei

$$\tilde{M}(\omega) := \left( \tilde{m}_\ell(\omega - B^{-1}\rho_i) \right)_{i,\ell=0,\dots,a-1},$$

so läßt sich (3.45) in der Form

$$\bar{M}(\omega) \tilde{M}(\omega)^T = E_a \quad (3.46)$$

schreiben ( $E_a$  die  $a \times a$  Einheitsmatrix). Dies ist äquivalent zu

$$\bar{M}(\omega)^T \tilde{M}(\omega) = E_a$$

und somit ist (3.44) äquivalent zu

$$\sum_{i=0}^{a-1} (\bar{m}_i \tilde{m}_i)(\omega - B^{-1} \rho_i) = \delta_{\ell, \ell'} \quad \forall \omega \in \mathbb{T}^n. \quad (3.47)$$

$\{\tilde{m}_0, \dots, \tilde{m}_{a-1}\}$  heißt **duale Symbolfamilie** zu  $\{m_0, \dots, m_{a-1}\}$ .

Nach Satz 3.20 existieren zwei eindeutig bestimmte Distributionen  $\phi, \tilde{\phi}$  mit  $\hat{\phi}(0) = \hat{\tilde{\phi}}(0) = 1$ , die  $(h^0, A)$ -skalierbar bzw.  $(\tilde{h}^0, A)$ -skalierbar sind und durch die Produktdarstellungen

$$\hat{\phi} = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(B^{-j} \cdot) \quad , \quad \hat{\tilde{\phi}} = \prod_{j=1}^{\infty} \tilde{m}_0(B^{-j} \cdot)$$

gegeben sind. Es gilt

$$\begin{aligned} \phi &= a \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k^0 \phi(A \cdot -k) \\ \tilde{\phi} &= a \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tilde{h}_k^0 \tilde{\phi}(A \cdot -k) \end{aligned} \quad (3.48)$$

bzw. dazu äquivalent

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= m_0(B^{-1} \cdot) \hat{\phi}(B^{-1} \cdot) \\ \hat{\tilde{\phi}} &= \tilde{m}_0(B^{-1} \cdot) \hat{\tilde{\phi}}(B^{-1} \cdot). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Weiterhin seien  $\phi, \tilde{\phi} \in L^2(\mathbb{R}^n)$  und stabil vorausgesetzt. Im orthogonalen Fall folgt  $\phi, \tilde{\phi} \in L^2$  unmittelbar aus dem Lemma von Fatou, vgl. Daubechies [Dau92, Lem. 6.2.1]. Im biorthogonalen Fall sind weitere Voraussetzungen notwendig, z.B.  $(h^0)$  und  $(\tilde{h}^0)$  endlich und  $\hat{\phi}, \hat{\tilde{\phi}} \in L^1$ . Im Falle endlicher Skalierungsmasken kann mit Hilfe des Übergangsoperators die Stabilität und quadratische Integrierbarkeit von  $\phi$  und  $\tilde{\phi}$  überprüft werden, vgl. Satz 3.70.

Schließlich gelte

$$\langle \phi(\cdot - k) | \tilde{\phi}(\cdot - l) \rangle = \delta_{k,l}, \quad (3.50)$$

d.h. die Translatierten von  $\phi$  und  $\tilde{\phi}$  seien zueinander biorthogonal. Das folgende Lemma liefert analog dem Lemma 3.14 eine hierzu äquivalente Bedingung.

**Lemma 3.41**

Sind  $\phi, \tilde{\phi} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , so sind folgende Aussagen äquivalent.

- 1.)  $\langle \phi(\cdot - k) | \tilde{\phi}(\cdot - l) \rangle = \delta_{k,l} .$
- 2.)  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (\tilde{\phi} \hat{\phi})(\cdot - k) = 1 \quad \text{fast überall.} \quad (3.51)$

Den Beweis dieses Lemmas findet man bei Ron/Shen [RS95].

**Bemerkung 3.42**

Die Prä-Stabilität von  $\phi$  und  $\tilde{\phi}$  folgt bereits aus (3.51), es genügt daher, statt der Stabilität lediglich

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\phi}(\cdot - k)|^2 &\leq C < \infty \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\tilde{\phi}}(\cdot - k)|^2 &\leq \tilde{C} < \infty \end{aligned}$$

zu fordern. Gilt nämlich (3.51), so ist fast überall

$$1 \leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\phi}(\cdot - k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\tilde{\phi}}(\cdot - k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

und daher

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{\tilde{C}} &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\phi}(\cdot - k)|^2 \leq C \\ 0 < \frac{1}{C} &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\tilde{\phi}}(\cdot - k)|^2 \leq \tilde{C} . \end{aligned} \quad (3.52)$$

Die nachstehende Folgerung ergibt sich aus Lemma 3.41 durch Einsetzen der Formeln (3.49) für  $\hat{\phi}$  und  $\hat{\tilde{\phi}}$  in (3.51).

**Folgerung 3.43**

Ist  $\langle \phi(\cdot - k) | \tilde{\phi}(\cdot - l) \rangle = \delta_{k,l}$ , so gilt

$$\sum_{i=0}^{a-1} (\bar{m}\tilde{m})(\cdot - B^{-1}\rho_i) = 1 ,$$

das Symbol  $(\bar{m}\tilde{m})$  erfüllt also die Interpolationsbedingung (3.30).

### Filterschema mit exakter Rekonstruktion

Seien

$$\begin{aligned} H : \ell^2(\mathbb{Z}^n) &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^n) \\ c &\mapsto h * c =: \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_{\cdot-k} c_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{H} : \ell^2(\mathbb{Z}^n) &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^n) \\ c &\mapsto \tilde{h} * c =: \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tilde{h}_{\cdot-k} c_k \end{aligned}$$

die zu den Masken  $(h_k), (\tilde{h}_k) \in \ell^1(\mathbb{Z}^n)$  gehörenden **Filter-Operatoren** (für  $h \in \ell^1(\mathbb{Z}^n), c \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$  ist  $h * c \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ , vgl. Abschnitt 1.1).

Ferner sei

$$\begin{aligned} D_A : \ell^2(\mathbb{Z}^n) &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^n) \\ (c_k) &\mapsto (c_{Ak}) \end{aligned}$$

der **Down-Sampling-Operator** zur Matrix  $A$ .

Für  $(c_k) \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$  sei  $\hat{c} = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n}(c) \in L^2(\mathbb{T}^n)$  die Fourier-Transformierte der Folge  $(c_k)$ . Da  $H(c) = h * c$  ist  $(H(c))^\wedge = (h * c)^\wedge = \hat{h} \hat{c} = m \hat{c}$ .

Sei daher

$$\begin{aligned} \hat{H} : L^2(\mathbb{T}^n) &\rightarrow L^2(\mathbb{T}^n) \\ \hat{c} &\mapsto (H(c))^\wedge = (h * c)^\wedge = m \hat{c}. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Die Hilbertraum-Adjungierte  $T^*$  eines Multiplikationsoperators  $T = M_f$  auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  ist der Multiplikationsoperator  $T^* = M_{\bar{f}}$ , also ist der zu  $\hat{H}$  adjungierte Operator  $\hat{H}^*$  durch

$$\begin{aligned} \hat{H}^* : L^2(\mathbb{T}^n) &\rightarrow L^2(\mathbb{T}^n) \\ \hat{c} &\mapsto \bar{m} \hat{c} = (\check{h} * c)^\wedge \end{aligned} \tag{3.54}$$

gegeben. Da

$$\begin{aligned} \langle Hc | d \rangle &= \langle \hat{H} \hat{c} | \hat{d} \rangle \\ &= \langle \hat{c} | \hat{H}^* \hat{d} \rangle \\ &= \langle c | \check{h} * d \rangle \end{aligned}$$

folgt für die Adjungierte von  $H$

$$\begin{aligned} H^* : \ell^2(\mathbb{Z}^n) &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^n) \\ c &\mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \bar{h}_{k-} c_k . \end{aligned}$$

Analog gilt für die Adjungierte von  $\tilde{H}$

$$\begin{aligned} \tilde{H}^* : \ell^2(\mathbb{Z}^n) &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^n) \\ c &\mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tilde{h}_{k-} c_k . \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \langle D_A c | d \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_{Ak} \bar{d}_k \\ &= \sum_{l \in A\mathbb{Z}^n} c_l \bar{d}_{A^{-1}l} , \end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned} D_A^* : \ell^2(\mathbb{Z}^n) &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^n) \\ (c_k) &\mapsto \begin{cases} c_{A^{-1}k}, & k \in A\mathbb{Z}^n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} . \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \hat{D}_A^* : L^2(\mathbb{T}^n) &\rightarrow L^2(\mathbb{T}^n) \\ \hat{c} &\mapsto (D_A^*(c))^\wedge = \sum_{k \in A\mathbb{Z}^n} c_{A^{-1}k} e_{-k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} c_l e_{-Al} \end{aligned}$$

und mit Korollar 3.30 gilt weiter

$$\begin{aligned} (D_A^* \circ D_A(c))^\wedge &= \sum_{k \in A\mathbb{Z}^n} c_k e_{-k} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e_{-k} \frac{1}{a} \sum_{i=0}^{a-1} e_k(B^{-1}\rho_i) \\ &= \frac{1}{a} \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e_{-k}(\cdot - B^{-1}\rho_i) \\ &= \frac{1}{a} \sum_{i=0}^{a-1} \hat{c}(\cdot - B^{-1}\rho_i) , \end{aligned} \tag{3.55}$$

wobei  $\mathcal{R} = \{\rho_0, \dots, \rho_{a-1}\}$  ein Repräsentantensystem von  $\mathbb{Z}^n/B\mathbb{Z}^n$  ist.

**Definition 3.44**

Seien  $m_\ell, \tilde{m}_\ell, \ell = 0, \dots, a-1$  die Symbole zu  $\ell^1$ -Folgen  $(h^\ell), (\tilde{h}^\ell)$ , so heißt  $\{H_\ell, \tilde{H}_\ell; \ell = 0, \dots, a-1\}$  eine **Filterbank mit exakter Rekonstruktion**, falls gilt:

$$\sum_{\ell=0}^{a-1} H_\ell^* \circ D_A^* \circ D_A \circ \tilde{H}_\ell = id_{\ell^2} . \quad (3.56)$$

**Lemma 3.45**

Die Bedingung (3.56) ist äquivalent zur Bedingung (3.44) an die Symbole.

**Beweis:**

Es ist

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=0}^{a-1} H_\ell^* \circ D_A^* \circ D_A \circ \tilde{H}_\ell = id_{\ell^2} \\ \Leftrightarrow & \sum_{\ell=0}^{a-1} (H_\ell^* \circ D_A^* \circ D_A \circ \tilde{H}_\ell(c))^\wedge = \hat{c} \quad \forall \hat{c} \in L^2(\mathbb{T}^n) . \end{aligned}$$

Da nach (3.54)  $(H_\ell^*(d))^\wedge = \hat{H}_\ell^*(\hat{d}) = \tilde{m}\hat{d}$  ist

$$(H_\ell^* \circ D_A^* \circ D_A \circ \tilde{H}_\ell(c))^\wedge = \tilde{m}(D_A^* \circ D_A \circ \tilde{H}_\ell(c))^\wedge .$$

Mit (3.53) und (3.55) folgt schließlich

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=0}^{a-1} H_\ell^* \circ D_A^* \circ D_A \circ \tilde{H}_\ell = id_{\ell^2} \\ \Leftrightarrow & \sum_{\ell=0}^{a-1} \tilde{m}_\ell \frac{1}{a} \sum_{i=0}^{a-1} \tilde{m}_\ell(\cdot - B^{-1}\rho_i) \hat{c}(\cdot - B^{-1}\rho_i) = \hat{c} \quad \forall \hat{c} \in L^2(\mathbb{T}^n) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{a} \sum_{i=0}^{a-1} \hat{c}(\cdot - B^{-1}\rho_i) \sum_{\ell=0}^{a-1} \tilde{m}_\ell \tilde{m}_\ell(\cdot - B^{-1}\rho_i) = \hat{c} \quad \forall \hat{c} \in L^2(\mathbb{T}^n) \\ \Leftrightarrow & \sum_{\ell=0}^{a-1} \tilde{m}_\ell \tilde{m}_\ell(\cdot - B^{-1}\rho_i) = a\delta_{i,0} , \end{aligned}$$

letzteres, indem man z.B. für  $\hat{c}$  charakteristische Funktionen einsetzt.

□

**Bemerkung 3.46**

- 1.) Nach (??) sind die Rollen der Filter  $H_\ell$  und  $\tilde{H}_\ell$  in (3.56) vertauschbar, d.h. (3.56) ist äquivalent zu

$$\sum_{\ell=0}^{a-1} \tilde{H}_\ell \circ D_A^* \circ D_A \circ H_\ell^* = id_{\ell^2} . \quad (3.57)$$

- 2.) Seien  $a = 2$  und  $m_0, \tilde{m}_0$  zwei zueinander duale Symbole. Für ein interpolierendes Symbol  $m_0$  kann ein zugehöriges duales Symbol  $\tilde{m}_0$  z.B. mit dem in Paragraph 3.6.4 vorgestellten Verfahren konstruiert werden. Nach Folgerung ?? ist dann

$$\bar{m}_0 \tilde{m}_0 + (\bar{m}_0 \tilde{m}_0)(\cdot - B^{-1} \rho_1) = 1 . \quad (3.58)$$

Sei weiterhin

$$\begin{aligned} m_1 &:= \varphi \tilde{m}_0(\cdot - B^{-1} \rho_1) \\ \tilde{m}_1 &:= \varphi \bar{m}_0(\cdot - B^{-1} \rho_1) , \end{aligned}$$

so folgt aus (3.58)

$$\bar{m}_0 \tilde{m}_0 + \bar{m}_1 \tilde{m}_1 = \bar{m}_0 \tilde{m}_0 + |\varphi|^2 (\bar{m}_0 \tilde{m}_0)(\cdot - B^{-1} \rho_1) ,$$

falls  $|\varphi|^2 = 1$ , also  $\varphi(\omega) = e^{if(\omega)}$ ,  $f$  reellwertig, und

**Direkte Zerlegung**

Seien die  $\phi_{j,k}$  wie in (3.31) definiert und

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_j &:= \overline{\text{span}}\{\phi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}^n\} \\ \tilde{\mathcal{V}}_j &:= \overline{\text{span}}\{\tilde{\phi}_{j,k}; k \in \mathbb{Z}^n\} . \end{aligned} \quad (3.59)$$

Mit der Stabilität der  $\phi^\ell, \tilde{\phi}^\ell$ ,  $\ell = 0, \dots, a-1$  und den Zwei-Skalen-Relationen (3.48) folgt

$$\begin{aligned} \dots &\subset \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_{-1} \subset \mathcal{V}_{-2} \subset \dots \\ \dots &\subset \tilde{\mathcal{V}}_2 \subset \tilde{\mathcal{V}}_1 \subset \tilde{\mathcal{V}}_0 \subset \tilde{\mathcal{V}}_{-1} \subset \tilde{\mathcal{V}}_{-2} \subset \dots \end{aligned}$$

und es ist

$$\begin{aligned} \{\phi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}^n\} &\text{ Riesz-Basis von } \mathcal{V}_j \text{ sowie} \\ \{\tilde{\phi}_{j,k}; k \in \mathbb{Z}^n\} &\text{ Riesz-Basis von } \tilde{\mathcal{V}}_j . \end{aligned}$$

Weiterhin seien für  $\ell = 1, \dots, a - 1$

$$\begin{aligned}\hat{\psi}^\ell &:= m_\ell(B^{-1}\cdot)\hat{\phi}(B^{-1}\cdot) \\ \hat{\tilde{\psi}}^\ell &:= \tilde{m}_\ell(B^{-1}\cdot)\hat{\phi}(B^{-1}\cdot)\end{aligned}\tag{3.60}$$

bzw. dazu äquivalent

$$\begin{aligned}\psi^\ell &= a \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k^\ell \phi(A \cdot -k) \\ \tilde{\psi}^\ell &= a \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tilde{h}_k^\ell \tilde{\phi}(A \cdot -k).\end{aligned}\tag{3.61}$$

Die  $\psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,k}$  seien analog zu (3.31) definiert und es sei

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_j^\ell &:= \overline{\text{span}}\{\psi_{j,k}^\ell; k \in \mathbb{Z}^n\} \quad \ell = 1, \dots, a - 1 \\ \tilde{\mathcal{W}}_j^\ell &:= \overline{\text{span}}\{\tilde{\psi}_{j,k}^\ell; k \in \mathbb{Z}^n\} \quad \ell = 1, \dots, a - 1.\end{aligned}\tag{3.62}$$

**Satz 3.47**

Sind  $\phi, \tilde{\phi} \in L^2(\mathbb{R}^n)$  und gilt (3.50), so ist

$$\langle \tilde{\psi}^\ell | \psi^{\ell'}(\cdot - k) \rangle = a \delta_{\ell, \ell'} \delta_{k, 0}\tag{3.63}$$

für  $0 \leq \ell, \ell' \leq a - 1$  und  $k \in \mathbb{Z}^n$ .

**Beweis:**

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\psi}^\ell | \psi^{\ell'}(\cdot - k) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\psi}^\ell(x) \bar{\psi}^{\ell'}(x - k) dx \\ &\stackrel{\text{Parseval}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\tilde{\psi}}^\ell(\omega) \hat{\psi}^{\ell'}(\omega) e_{-k}(\omega) d\omega \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \int_{I^{n+l}} \hat{\tilde{\psi}}^\ell(\omega) \hat{\psi}^{\ell'}(\omega) e_{-k}(\omega) d\omega \\ &= \int_{I^n} e_{-k}(\omega) \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} (\hat{\tilde{\psi}}^\ell \hat{\psi}^{\ell'}) (\omega - l) d\omega.\end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, daß  $\hat{\tilde{\psi}}^\ell \hat{\psi}^{\ell'} \in L^1$  ist und die Periodisierung eine  $L^1$ -Majorante besitzt, vgl. Satz 1.64.

Betrachte

$$\Psi := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (\hat{\tilde{\psi}}^\ell \hat{\psi}^{\ell'}) (\cdot - k).$$

Ist  $\mathcal{R} := \{\rho_0, \dots, \rho_{a-1}\}$  ein Repräsentantensystem von  $\mathbb{Z}^n/B\mathbb{Z}^n$ , so läßt sich jedes  $l \in \mathbb{Z}^n$  eindeutig darstellen als  $l = \rho_i + Bk$  mit  $\rho_i \in \mathcal{R}$  und  $k \in \mathbb{Z}^n$ . Somit ist

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (\hat{\psi}^\ell \bar{\psi}^{\ell'}) (\cdot - \rho_i - Bk) \\ &\stackrel{(3.60)}{=} \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tilde{m}_\ell(B^{-1}(\cdot - \rho_i - Bk)) \hat{\phi}(B^{-1}(\cdot - \rho_i - Bk)) \\ &\quad \cdot \bar{m}_{\ell'}(B^{-1}(\cdot - \rho_i - Bk)) \bar{\phi}(B^{-1}(\cdot - \rho_i - Bk)). \end{aligned}$$

Da  $m_{\ell'}, \tilde{m}_\ell \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^n)$  folgt weiter

$$\Psi = \sum_{i=0}^{a-1} (\bar{m}_{\ell'} \tilde{m}_\ell)(B^{-1}(\cdot - \rho_i)) \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (\bar{\phi} \hat{\phi})(B^{-1}(\cdot - \rho_i) - k).$$

Nach (3.47) ist

$$\sum_{i=0}^{a-1} (\bar{m}_{\ell'} \tilde{m}_\ell)(B^{-1}(\cdot - \rho_i)) = a\delta_{\ell, \ell'}$$

und nach (3.51) gilt fast überall

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (\bar{\phi} \hat{\phi})(B^{-1}(\cdot - \rho_i) - k) = 1.$$

Somit folgt schließlich

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\psi}^\ell | \psi^{\ell'}(\cdot - k) \rangle &= \int_{I^n} a\delta_{\ell, \ell'} e_{-k}(\omega) d\omega \\ &= a\delta_{\ell, \ell'} \delta_{k, 0}. \end{aligned}$$

□

### Lemma 3.48

Es gilt:

- 1.)  $\{\psi_{j,k}^\ell; k \in \mathbb{Z}^n\}$  ist Riesz-Basis von  $\mathcal{W}_j^\ell$  für  $\ell = 1, \dots, a-1$  und  $j \in \mathbb{Z}$ .
- 2.)  $\{\tilde{\psi}_{j,k}^\ell; k \in \mathbb{Z}^n\}$  ist Riesz-Basis von  $\tilde{\mathcal{W}}_j^\ell$  für  $\ell = 1, \dots, a-1$  und  $j \in \mathbb{Z}$ .

**Beweis:**

Nach (3.60) ist

$$\hat{\psi}^\ell = m_\ell(B^{-1}\cdot)\hat{\phi}(B^{-1}\cdot), \quad \ell = 1, \dots, a-1$$

so daß gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\psi}^\ell(\cdot - k)|^2 &= \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\psi}^\ell(\cdot - (\rho_i + Bk))|^2 \\ &= \sum_{i=0}^{a-1} |m_\ell(B^{-1}(\cdot - \rho_i))|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\phi}^\ell(B^{-1}(\cdot - \rho_i) - k)|^2. \end{aligned}$$

Sei

$$P_\ell := \sum_{i=0}^{a-1} |m_\ell(B^{-1}(\cdot - \rho_i))|^2$$

und

$$\begin{aligned} \alpha_\ell &:= \inf_{\omega \in \mathbb{T}^n} P_\ell(\omega) \\ \beta_\ell &:= \sup_{\omega \in \mathbb{T}^n} P_\ell(\omega), \end{aligned}$$

so folgt aus (3.52)

$$\frac{\alpha_\ell}{\tilde{C}} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\psi}^\ell(\cdot - k)|^2 \leq C\beta_\ell.$$

Es bleibt also

$$0 < \alpha_\ell \leq \beta_\ell < \infty \quad \ell = 1, \dots, a-1$$

zu zeigen. Dies folgt jedoch aus der Bedingung für exakte Rekonstruktion an die Symbole (3.47), denn für alle  $\omega$  existiert ein  $i$ ,  $0 \leq i \leq a-1$  mit  $m_\ell(\omega - B^{-1}\rho_i) \neq 0$ . □

### Lemma 3.49

Seien  $\mathcal{V}_j, \tilde{\mathcal{V}}_j$  sowie  $\mathcal{W}_j^\ell, \tilde{\mathcal{W}}_j^\ell$  wie in (3.59) und (3.62) definiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_j &= \mathcal{V}_{j+1} \oplus \mathcal{W}_{j+1}^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{W}_{j+1}^{a-1}, \\ \tilde{\mathcal{V}}_j &= \tilde{\mathcal{V}}_{j+1} \oplus \tilde{\mathcal{W}}_{j+1}^1 \oplus \dots \oplus \tilde{\mathcal{W}}_{j+1}^{a-1}. \end{aligned}$$

**Beweis:**

Beweis für  $j = -1$ , der allgemeine Fall folgt dann mit den Zwei-Skalen-Relationen (3.48) und (3.61).

Sei  $f \in \tilde{\mathcal{V}}_{-1}$ . Da  $\{\tilde{\phi}_{-1,k} \mid k \in \mathbb{Z}^n\}$  Riesz-Basis von  $\tilde{\mathcal{V}}_{-1}$  ist

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \tilde{\phi}(A \cdot + k)$$

mit  $(c_k) \in \ell^2$ . Es ist zu zeigen:

$$f = \sum_{\ell=0}^{a-1} g^\ell \text{ mit } g^0 \in \tilde{\mathcal{V}}_0, g^\ell \in \tilde{\mathcal{W}}_0^\ell, \ell = 1, \dots, a-1 \quad (3.64)$$

und die Darstellung ist eindeutig. Nach (3.61) ist

$$\tilde{\psi}^\ell = a \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tilde{h}_k^\ell \tilde{\phi}(A \cdot - k) .$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^\ell(x + l) &= a \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tilde{h}_k^\ell \tilde{\phi}(Ax + Al - k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tilde{h}_{Al-k}^\ell \tilde{\phi}(Ax + k) \\ &= a(D_A \circ \tilde{H}_\ell)(\tilde{\phi}(Ax + \cdot))_l . \end{aligned}$$

Nach (3.56) ist

$$\sum_{\ell=0}^{a-1} H_\ell^* \circ D_A^* \circ D_A \circ \tilde{H}_\ell = id_{\ell^2} ,$$

daher gilt

$$\sum_{\ell=0}^{a-1} (H_\ell^* \circ D_A^* \circ D_A \circ \tilde{H}_\ell)(\tilde{\phi}(Ax + \cdot))_l = \tilde{\phi}(Ax + l) ,$$

falls  $\tilde{\phi}(Ax + k)_{k \in \mathbb{Z}^n} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Diese Voraussetzung fehlt bei Chui/Li. Die Voraussetzung

$$\sup_{x \in \mathbb{T}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\phi(\cdot - k)|^2 < \infty$$

tritt auch an anderer Stelle auf, vgl. z.B. Paragraph 3.4.2.

Es folgt

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(Ax + l) &= \frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^{a-1} (H_\ell^* \circ D_A^*)(\tilde{\psi}^\ell(x + \cdot))_l \\ &= \frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^{a-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \bar{h}_{Ak-l}^\ell \tilde{\psi}^\ell(x + k)\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}f &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} c_l \frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^{a-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \bar{h}_{Ak-l}^\ell \tilde{\psi}^\ell(x + k) \\ &= \sum_{\ell=0}^{a-1} \frac{1}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} p_k^\ell \tilde{\psi}^\ell(x + k),\end{aligned}$$

wobei

$$p_k^\ell = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \bar{h}_{Ak-l}^\ell c_l.$$

Sei

$$g^\ell := \frac{1}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} p_k^\ell \tilde{\psi}^\ell(\cdot + k),$$

so ist

$$g^0 \in \overline{\text{span}} \{ \tilde{\phi}_{0,k}; k \in \mathbb{Z}^n \} = \tilde{\mathcal{V}}_0$$

und

$$g^\ell \in \overline{\text{span}} \{ \tilde{\psi}_{0,k}^\ell; k \in \mathbb{Z}^n \} = \tilde{\mathcal{W}}_0^\ell \quad \ell = 1, \dots, a-1.$$

Daher gilt einerseits

$$\tilde{\mathcal{V}}_{-1} \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_0 + \tilde{\mathcal{W}}_0^1 + \dots + \tilde{\mathcal{W}}_0^{a-1}$$

und andererseits gilt aufgrund der Zwei-Skalen-Relation (3.61) für  $\tilde{\psi}^\ell$  und der Definition der  $\tilde{\mathcal{W}}_j^\ell$

$$\mathcal{W}_0^\ell \subset \tilde{\mathcal{V}}_{-1} \quad \ell = 1, \dots, a-1.$$

Damit gilt

$$\tilde{\mathcal{V}}_1 = \tilde{\mathcal{V}}_0 + \tilde{\mathcal{W}}_0^1 \dots + \tilde{\mathcal{W}}_0^{a-1}. \quad (3.65)$$

Seien  $g^0 \in \tilde{\mathcal{V}}_0$  und  $g^\ell \in \tilde{\mathcal{W}}_0^\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, a-1$  mit

$$f := \sum_{\ell=0}^{a-1} g^\ell = 0,$$

so ist nach Satz 3.47

$$0 = \langle \psi^\ell(\cdot - k) | f \rangle = p_k^\ell$$

und daher ist  $g^\ell = 0$ ,  $\ell = 0, \dots, a-1$ . Die Darstellung (3.64) ist also eindeutig und somit die Summe in (3.65) direkt.

□

Dafür, daß die  $\mathcal{V}_j$ ,  $\tilde{\mathcal{V}}_j$  aus (3.59) tatsächlich eine Mehrfachauflösung bilden, bleiben die Eigenschaften

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}_j = \{0\} \quad , \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}_j} = L^2(\mathbb{R}^n)$$

für  $(\mathcal{V}_j)$  und analog für  $(\tilde{\mathcal{V}}_j)$  zu zeigen. Die erste dieser Eigenschaften ist eine Folge der Voraussetzung, daß  $A$  expandierend ist, die zweite Bedingung ist erfüllt, wenn die Symbole  $m_0, \tilde{m}_0$  das Cohen-Kriterium 3.33 erfüllen (vgl. die Bedingungen im eindimensionalen Fall aus Satz 3.40). Für Einzelheiten sei auf Chui/Li [CL94, §2.7] verwiesen.

## 3.4 Verbindungen zur Sampling-Theorie

Bei den Räumen  $V_\omega$  bandbeschränkter Funktionen aus Definition 2.1 bzw. Definition 2.24 handelt es sich ebenso wie bei den Räumen  $\mathcal{V}_j$  einer Mehrfachauflösung um translationsinvariante Räume. Erstere haben die zusätzliche Eigenschaft, daß ihre Elemente durch Sampling-Reihen dargestellt werden können, letztere sind dagegen skalierbar. Es ist daher eine naheliegende Fragestellung, in welchen Fällen aus der Sampling-Eigenschaft die Skalierbarkeit bzw. aus der Skalierbarkeit die Sampling-Eigenschaft folgt. Im vorliegenden Abschnitt werden diese Fragen diskutiert.

Zunächst wird dargelegt, daß dem WSK-Theorem bzw. seiner mehrdimensionalen Verallgemeinerung von Parzen eine separable Mehrfachauflösung assoziiert ist. Die Wavelets einer zu dieser Mehrfachauflösung gehörenden Wavelet-Basis heißen daher auch *Shannon-Wavelets*.

Der sich anschließende Paragraph 3.4.2 untersucht dann, unter welchen Umständen sich für die Räume  $\mathcal{V}_j$  einer Mehrfachauflösung gleichzeitig ein Sampling-Theorem ergibt. Hierbei unterscheidet man den orthonormalen Fall vom allgemeineren Fall einer Riesz-Mehrfachauflösung mit zwei biorthonormalen Skalierungsfunktionen.

### 3.4.1 Die Shannon-Mehrfachauflösung

Wir betrachten die  $n$ -dimensionale Verallgemeinerung des WSK-Theorems, den Satz 2.25 von Parzen:



Sei  $f \in V_\omega$  und  $t_k = \frac{k}{2\omega}$ , so ist

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(t_k) \operatorname{sinc} 2\omega(\cdot - t_k). \quad (3.66)$$

Für  $\omega = \frac{1}{2}$  wird (3.66) zu

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k) \operatorname{sinc}(\cdot - k).$$

### Satz 3.50

Die sinc-Funktion ist Erzeuger einer separablen Mehrfachauflösung.

#### Beweis:

Nach Satz 3.40 sind dazu folgende Bedingungen zu verifizieren.

- 1.) Die sinc-Funktion erfüllt eine Zwei-Skalen-Relation.
- 2.) Die Translatierten des sinc bilden eine Orthonormalbasis des von ihnen aufgespannten Unterraums von  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .
- 3.)  $\mathcal{F}(\operatorname{sinc})$  ist beschränkt, stetig in einer Umgebung des Nullpunkts und es ist  $\mathcal{F}(\operatorname{sinc})(0) \neq 0$ .

Zu 1.) Sei  $\omega = 1$  so gilt für  $f \in V_\omega$ :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f\left(\frac{k}{2}\right) \operatorname{sinc}(2 \cdot -k).$$

Die sinc-Funktion selbst ist bandbeschränkt mit Bandbreite  $\frac{1}{2}$ , also ist  $\operatorname{sinc} \in V_1$  und somit

$$\operatorname{sinc} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \operatorname{sinc}(2 \cdot -k).$$

Sei  $h_k := 2^{-n} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$ , so ist  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |h_k|^2 < \infty$  und es gilt die Zwei-Skalen-Relation

$$\operatorname{sinc} = 2^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k \operatorname{sinc}(A \cdot -k)$$

mit der Dilatationsmatrix  $A = 2E_n$ .

Zu 2.) Es ist  $\hat{\phi} = \chi_{I^n}$ , d.h. offensichtlich gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\phi}(\omega - k)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\chi_{I^n}(\omega - k)|^2 = 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^n.$$

Die Translatierten der sinc-Funktion bilden also nach Lemma 3.14 ein Orthonormalsystem und somit eine ONB des von ihnen erzeugten Unterraums. Zu 3.) Die Behauptung folgt unmittelbar aus  $\text{sinc} = \tilde{\chi}_{I^n}$ .  $\square$

Es existiert somit eine Mehrfachauflösung, bei der die Skalierungsfunktion  $\phi$  die Sampling-Funktion des WSK-Theorems ist. Da

$$\mathcal{V}_0 = \overline{\text{span}} \{ \phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}^n \}$$

ist  $\mathcal{V}_0$  gerade der Raum der auf das  $n$ -dimensionale Intervall  $I^n$  bandbeschränkten Funktionen. Also ist

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 &= V_{\frac{1}{2}}, \\ \mathcal{V}_j &= V_{\frac{1}{2^{j+1}}}. \end{aligned}$$

Diese Mehrfachauflösung heißt **Shannon-Mehrfachauflösung**, da  $A = 2E_n$  ist sie separabel. Im Fall  $n = 1$  heißt ein zu dieser MRA gehörendes Wavelet **Shannon-Wavelet**, für  $n > 1$  ergeben sich die  $2^n - 1$  Wavelets durch Tensorierung der sinc-Funktion und des Shannon-Wavelets. Man kann z.B. direkt nachweisen, daß 

$$\psi := 2 \text{sinc}(2 \cdot) - \text{sinc}$$

ein Shannon-Wavelet ist: Da  $\psi \in V_1$  ist  $\psi \in \mathcal{V}_{-1}$ . Mit

$$\hat{\psi} = \chi_{[-1,1]} - \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$$

folgt für alle  $k, l \in \mathbb{Z}$

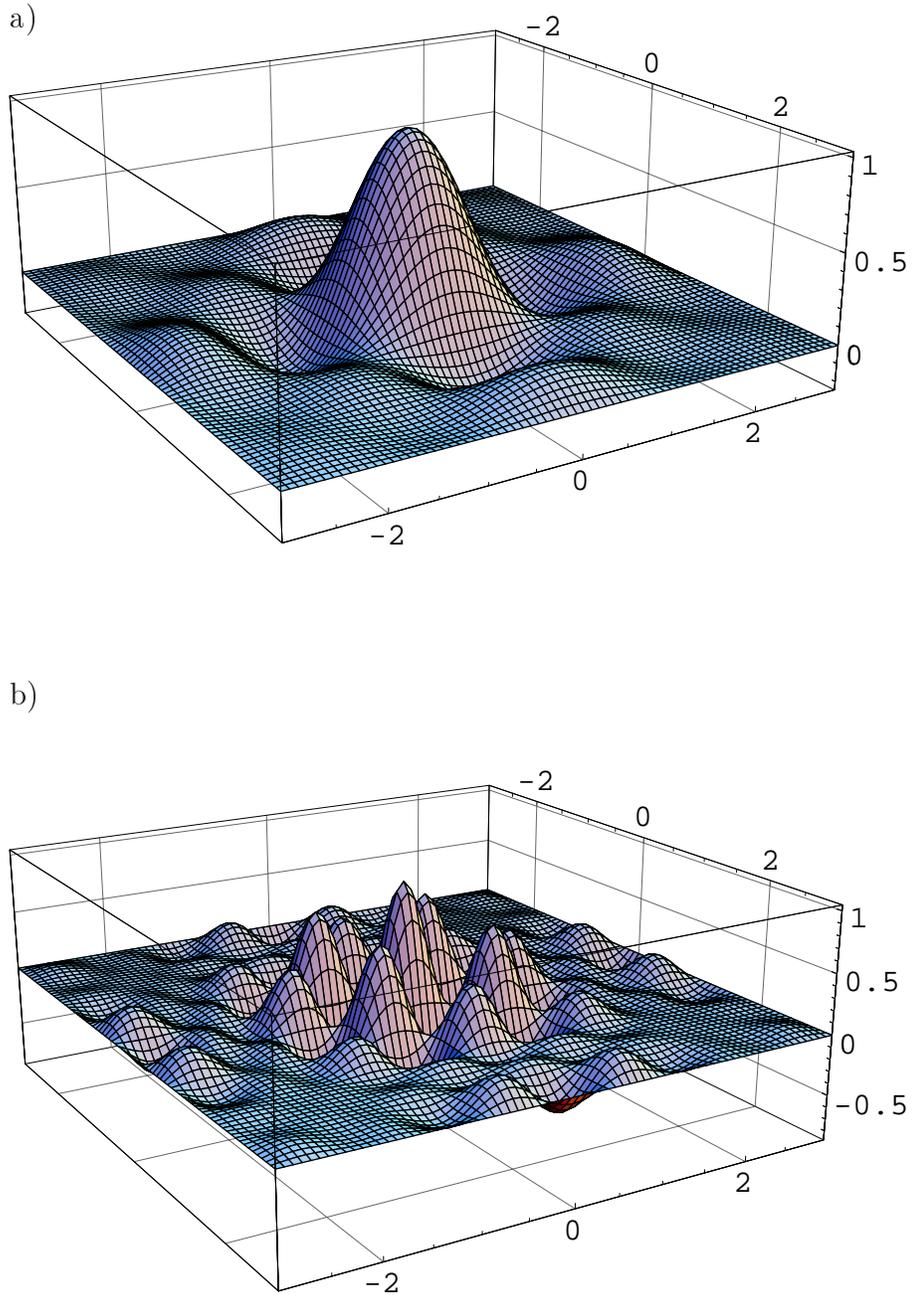
$$\begin{aligned} \langle \psi_{0,k} | \psi_{0,l} \rangle &= \langle (\psi_{0,k})^\wedge | (\psi_{0,l})^\wedge \rangle \\ &= \langle e^{-k}(\chi_{[-1,1]} - \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}) | e^{-l} \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daher ist  $\psi(\cdot - k)$  orthogonal zu  $\mathcal{V}_0$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  und es gilt  $\psi_{0,k} \in \mathcal{W}_0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Mit 

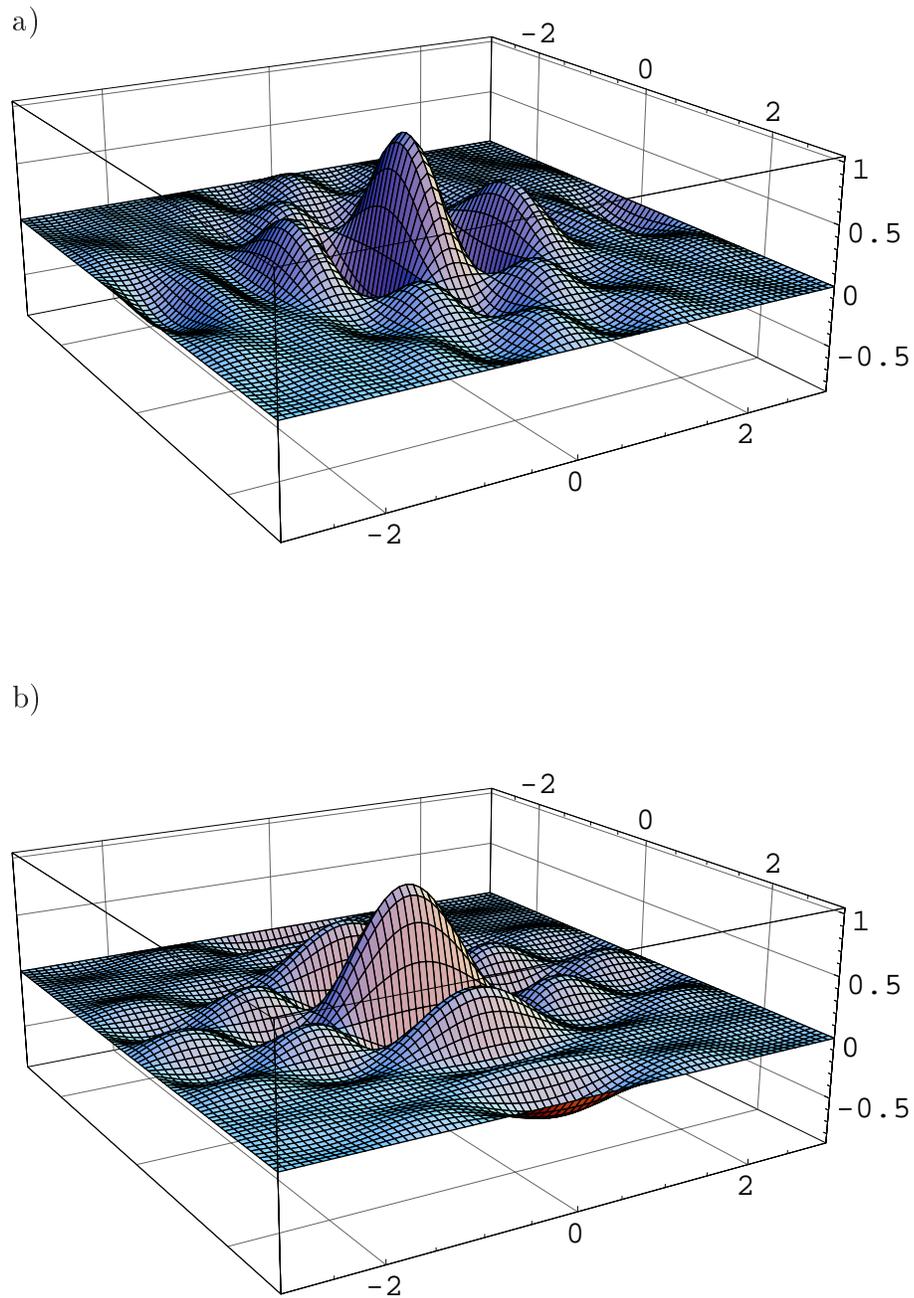
$$\mathcal{W}_0 = \overline{\text{span}} \{ \psi_{0,k}; k \in \mathbb{Z} \}$$

und  $\langle \psi_{0,k} | \psi_{0,l} \rangle = \delta_{k,l}$  folgt die Behauptung.

Die Abbildungen 3.4 und 3.5 zeigen die durch Tensorierung des sinc und des Shannon-Wavelets entstehenden vier Funktionen.



**Abbildung 3.4:** a) Skalierungsfunktion  $\phi(x)\phi(y)$  und b) Wavelet  $\psi(x)\psi(y)$  der Shannon-Mehrfachauflösung.



**Abbildung 3.5:** a) Wavelet  $\phi(x)\psi(y)$  und b) Wavelet  $\psi(x)\phi(y)$  der Shannon-Mehrfachauflösung.

### 3.4.2 Sampling-Theoreme für Mehrfachauflösungen

Die im vorangegangenen Paragraphen erläuterte Verbindung zwischen dem WSK-Theorem und der Theorie der Mehrfachauflösung ist seit längerem bekannt. Bereits Meyer [Mey90, S. 22] gibt die Shannon-Mehrfachauflösung als Beispiel an. Die umgekehrte Fragestellung, wann für die Räume  $\mathcal{V}_j$  einer Mehrfachauflösung ein Sampling-Theorem gilt, scheint jedoch bislang in der Literatur wenig Beachtung gefunden zu haben. Ein versteckter Hinweis findet sich bei Daubechies [Dau92]. Auf Seite 166 merkt sie an, daß (im Falle einer orthogonalen MRA) eine Funktion  $f \in \mathcal{V}_0$  durch ihre Sampling-Werte  $f(k)$ ;  $k \in \mathbb{Z}$  bereits eindeutig bestimmt ist, falls die Periodisierung von  $\hat{\phi}$  keine Nullstellen hat. Die Koeffizienten von  $f$  in der Darstellung

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f | \phi_{0,k} \rangle \phi(\cdot - k)$$

lassen sich dann durch diskrete Filteroperationen gewinnen:

$$\langle f | \phi_{0,k} \rangle = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_{k-l} f(l)$$



und mit

$$\varphi := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(k) e_{-k}$$

sind die  $a_l$  die Fourier-Koeffizienten von  $\frac{1}{\varphi}$ .

Walter [Wal92] hat 1992 Bedingungen formuliert, unter denen für die Räume  $\mathcal{V}_j$  einer Mehrfachauflösung Sampling-Basen im Sinne der Definition 2.16 existieren. Seine Konstruktion folgt im wesentlichen dem durch Lemma 2.17 vorgezeichneten Weg:

Sei  $\phi$  Erzeuger einer (orthonormalen) Mehrfachauflösung  $(\mathcal{V}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  und  $\mathcal{V}_0$  ein rk-Hilbert-Raum. Nach (2.26) gilt für den Kern  $K$  von  $\mathcal{V}_0$

$$K(x, \xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \phi(x - k) \bar{\phi}(\xi - k).$$

Dann ist nach Lemma 2.17 die zu

$$\tilde{S}_k := K(\cdot, k)$$

biorthonormale Basis eine Sampling-Basis von  $\mathcal{V}_0$ . Die punktweise Konvergenz der Sampling-Reihe folgt sofort aus Satz 2.14 Punkt 4.).

Voraussetzung für Walters Konstruktion ist, daß  $\mathcal{V}_0$  ein Hilbert-Raum mit reproduzierendem Kern ist. Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium

für die Existenz eines reproduzierenden Kerns in  $\mathcal{V}_0$  liefert der Satz 2.14:  $\mathcal{V}_0$  ist genau dann ein rk-Hilbert-Raum, wenn die punktweise Auswertung  $l_x f = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$  ein beschränktes lineares Funktional auf  $\mathcal{V}_0$  ist. Walter setzt

- 1.)  $\phi$  stetig und reellwertig,
- 2.)  $\phi(x) = O(|x|^{-1-\varepsilon})$ ,  $\varepsilon > 0$  und
- 3.)  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \phi(k) e_{-k} \neq 0$

voraus. Die Bedingung 2.) ist in der Tat hinreichend für die Existenz eines reproduzierenden Kerns in  $\mathcal{V}_0$ , denn da  $\phi(\cdot - k)$  ONB, also insbesondere Riesz-Basis von  $\mathcal{V}_0$ , folgt mit (3.6)

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(x - k) \right| \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k \phi(x - k)| \\ &\leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\phi(x - k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|f\|_2, \end{aligned}$$

also ist  $l_x$  beschränkt und somit  $\mathcal{V}_0$  ein rk-Hilbert-Raum. Die Rechnung zeigt jedoch, daß statt der Bedingung 2.) bei Walter auch die weitaus natürlichere Bedingung

$$2'.) \quad \sup_{x \in \mathbb{T}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\phi(x - k)|^2 < \infty$$

für die Existenz eines reproduzierenden Kerns in  $\mathcal{V}_0$  hinreichend ist.

Man sieht weiterhin am Beispiel des sinc, der nach Abschnitt 3.4.1 Erzeuger und Sampling-Funktion der Shannon-Mehrfachauflösung ist und auch die Bedingungen 1.), 2'.) und 3.), jedoch nicht Walters Bedingung 2.) erfüllt, daß letztere nicht notwendig ist.

Bedingung 3.) wird zwar bei Daubechies [Dau92, S. 166] nicht explizit erwähnt, zweifelsfrei aber bereits auch dort benötigt.

Die von Walter für den Fall einer orthogonalen Mehrfachauflösung durchgeführte Konstruktion der Sampling-Basis aus dem Erzeuger  $\phi$  läßt sich auf den Fall einer Riesz-Mehrfachauflösung verallgemeinern:

**Satz 3.51**

Sei  $\phi$  Erzeuger einer Riesz-Mehrfachauflösung mit

$$\sup_{x \in \mathbb{T}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\phi(x - k)|^2 < \infty ,$$

so ist  $\mathcal{V}_0$  rk-Hilbert-Raum. Sei  $K$  der Kern von  $\mathcal{V}_0$ . Ist  $\tilde{S}_k := K(\cdot, k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^n$  Riesz-Basis von  $\mathcal{V}_0$ , so ist die zu  $\{\tilde{S}_k\}$  biorthonormale Basis  $\{S_k; k \in \mathbb{Z}^n\}$  Sampling-Basis von  $\mathcal{V}_0$  und es gilt

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k) S_k \quad \forall f \in \mathcal{V}_0 .$$

Die Reihe konvergiert in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  und gleichmäßig auf  $\mathbb{R}^n$ .

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich sofort aus Lemma 2.17 und Satz 2.14 Punkt 4.).

Die zweite Voraussetzung des Satzes 3.51 ist z.B. für interpolierende  $\phi$  erfüllt: Sei  $\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}^n\}$  Riesz-Basis von  $\mathcal{V}_0$  und  $\phi$  interpolierend, d.h. insbesondere stetig.  $\{\tilde{\phi}_k; k \in \mathbb{Z}^n\}$  sei die (nicht notwendigerweise durch Translation entstehende) zu  $\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}^n\}$  biorthonormale Basis von  $\mathcal{V}_0$ . Ist  $\mathcal{V}_0$  rk-Hilbert-Raum, so gilt gemäß (2.27) für den reproduzierenden Kern von  $\mathcal{V}_0$

$$K(x, \xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \phi(x - k) \tilde{\phi}_k(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tilde{\phi}_k(x) \bar{\phi}(\xi - k) .$$

Da  $\phi$  interpolierend ist

$$K(\cdot, l) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tilde{\phi}_k(\cdot) \bar{\phi}(l - k) = \tilde{\phi}_l ,$$

d.h.  $\{K(\cdot, l); l \in \mathbb{Z}^n\}$  ist Riesz-Basis von  $\mathcal{V}_0$ . Dann folgt mit Lemma 2.17, daß die zu  $\{K(\cdot, k); k \in \mathbb{Z}^n\}$  biorthonormale Basis  $\{\phi(\cdot - k) k \in \mathbb{Z}^n\}$  Sampling-Basis von  $\mathcal{V}_0$  ist.

Es gilt also folgender Satz.

**Satz 3.52**

Sei  $\phi$  Erzeuger einer Riesz-Mehrfachauflösung und interpolierend. Gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{T}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\phi(x - k)|^2 < \infty ,$$

so ist

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k) \phi(\cdot - k) \quad \forall f \in \mathcal{V}_0$$

und die Reihe konvergiert in  $L^2$  und gleichmäßig auf  $\mathbb{R}^n$ .



### Bemerkung 3.53

- 1.) Die Voraussetzungen des Satzes 3.52 implizieren die Bedingung 3.) bei Walter, vgl. Lemma 3.24.
- 2.) Fordert man statt der Existenz einer Sampling-Basis von  $\mathcal{V}_0$  lediglich die Existenz eines Sampling-Frames, so läßt sich die Bedingung 3.) abschwächen, vgl. Zhou/Sun [ZS99].
- 3.) Man erhält Satz 3.52 auch in einfacher Weise direkt, ohne die Theorie der rk-Hilbert-Räume:

Ist  $(c_k) \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ , so ist

$$\left( \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_k \phi(\cdot - k)| \right)^2 \leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_k|^2,$$

also ist  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \phi(\cdot - k)$  gleichmäßig konvergent. Ist nun  $f \in \mathcal{V}_0$ ,

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \phi(x - k),$$

so folgt für  $x = k$  aus der Interpolationseigenschaft von  $\phi$ , daß  $c_k = f(k)$  gilt.

## 3.5 Regularität

Auf die für praktische Anwendungen wünschenswerte gute Lokalisation der Skalierungsfunktionen und Wavelet-Basen wurde bereits hingewiesen. Für Anwendungen in der Signalverarbeitung und -analyse ist jedoch auch eine gute Lokalisation der Funktionen auf der Fourier-Seite wünschenswert. Gemäß Satz 1.34 steht diese in direktem Zusammenhang mit der Differenzierbarkeitsordnung oder *Regularität* der Funktion.

Mallat [Mal98, Kap. 7.2] weist auf die Forderung glatter Funktionen zur Verbesserung der Resultate in der Bildverarbeitung hin. In der Datenkompression fordert man für gute Kompressionsraten eine möglichst hohe Zahl *verschwindender Momente* (vgl. Paragraph 3.5.4) der Skalierungsfunktionen und Wavelet-Basen, da dies eine hohe Zahl kleiner Transformationskoeffizienten bedingt. Diese wiederum ist für biorthogonale Konstruktionen direkt an die Regularität der jeweils dualen Funktion gekoppelt (vgl. Satz 3.72). Die Beispiele zeigen, daß der Regularitätsanalyse der Skalierungsfunktionen daher eine besondere Bedeutung zukommt.



Während die Basisfunktionen der in der Signalverarbeitung üblichen Fourier-Transformation und *Diskreten Cosinus-Transformation* trigonometrische Funktionen sind, also unendlich oft differenzierbare Funktionen mit unendlichem Träger, haben Skalierungsfunktionen und Wavelet-Basen im Falle einer endlichen Skalierungsmaske kompakten Träger und typischerweise einen nicht-ganzzahligen Hölder-Exponenten (vgl. Paragraph 3.5.1). Es gilt, diesen Exponenten möglichst genau zu bestimmen bzw. Funktionen mit unter bestimmten Bedingungen optimalem Hölder-Exponenten zu konstruieren.

Die Darstellung der Regularitätsanalyse im vorliegenden Abschnitt ist folgendermaßen strukturiert. Paragraph 3.5.1 gibt zunächst eine Definition der für Regularitätsaussagen wichtigen Hölder- und Sobolev-Räume. Anschließend wird im Unterabschnitt 3.5.2 eine erste Möglichkeit der Regularitätsabschätzung durch Wachstumsabschätzung der Fourier-Transformierten vorgestellt. Ein wichtiges Hilfsmittel nicht nur für die Regularitätsanalyse ist der von Conze/Raugi [CR90] eingeführte *Übergangoperator*, der im Paragraph 3.5.3 untersucht wird. Mit ihm lassen sich verbesserte Regularitätsabschätzungen herleiten. Den Abschluß der Ausführungen zur Regularität bildet der Unterabschnitt 3.5.4 über *Strang-Fix und Moment-Bedingungen*.

Die bekannten Resultate zur Regularitätsanalyse gehen im wesentlichen alle auf Cohen und Daubechies zurück. Es sind dies im einzelnen die Arbeiten von Daubechies [Dau92], Cohen/Daubechies [CD93] und Cohen *et al.* [CGV99]. Weitere Anmerkungen finden sich bei Mallat [Mal98, Kap. 2.3,6,7.2,9.2]. In der vorliegenden Arbeit wird im Zusammenhang mit dem Übergangoperator insbesondere der Fall eines nicht-negativen Symbols betrachtet, für den scharfe Aussagen über den  $L^1$ -Sobolev-Exponenten hergeleitet werden.

### 3.5.1 Hölder- und Sobolev-Räume

Die Taylor-Formel führt die Differenzierbarkeit einer Funktion  $f$  auf lokale Polynom-Approximationen zurück.

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in \mathcal{C}^m(\Omega)$  und  $x_0 \in \Omega$ . Ist  $P_{x_0}$  das Taylor-Polynom der Ordnung  $m - 1$  an der Stelle  $x_0$ ,

$$P_{x_0}(x) = \sum_{|\alpha| < m} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \quad x \in \Omega,$$

so gilt nach der Taylor-Formel

$$|f(x) - P_{x_0}(x)| \leq \frac{|x - x_0|^m}{m!} \sup_{y \in \Omega} \left| \sum_{|\alpha|=m} \partial^\alpha f(y) \right|.$$

Die  $m$ -fache Differenzierbarkeit von  $f$  in  $\Omega$  liefert also eine Schranke für den Approximationsfehler. Hölder-Exponenten verfeinern diese Schranke mit nicht-ganzzahligen Exponenten.

**Definition 3.54**

Die **Hölder-Räume**  $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ ,  $s \in \mathbb{R}_+$  seien folgendermaßen definiert:  
Für  $s \in [0, 1)$  sei

$$\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n); \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x+t) - f(x)| \leq c \cdot |t|^s \quad \forall t \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |t| < 1 \right\} \quad (3.67)$$

mit  $c \in \mathbb{R}_+$  und für  $s = j + s'$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,  $s' \in [0, 1)$  sei

$$\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{C}^j(\mathbb{R}^n); \partial^\alpha f \in \mathcal{C}^{s'}(\mathbb{R}^n) \quad \forall \alpha : |\alpha| = j \right\}. \quad (3.68)$$

**Bemerkung 3.55**

- 1.) Im Zusammenhang der Charakterisierung von Funktionenräumen mit Hilfe von Wavelets betrachtet man neben den *homogenen* Hölder-Räumen aus Definition 3.54 auch die *inhomogenen* Hölder-Räume, wobei die Räume mit ganzzahligen Exponenten durch die sog. *Zygmund-Klassen* ersetzt werden. Für Einzelheiten sei auf Meyer [Mey90, Kap. VI] und Daubechies [Dau92, Kap. 9.2] verwiesen.
- 2.) Es ist  $\mathcal{C}^s \cap L^\infty = \mathcal{C}_{\text{glob}}^s$  mit

$$\mathcal{C}_{\text{glob}}^s := \left\{ f \in \mathcal{C}^j \cap L^\infty; \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f(x+t) - \partial^\alpha f(x)| \leq c \cdot |t|^{s'} \quad \forall t \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha : |\alpha| = j \right\}$$

Für eine beschränkte Funktion  $f$  ist  $f \in \mathcal{C}^s$  also bereits eine Aussage über die globale Regularität von  $f$  (vgl. Stein [Ste70, Kap. V.4.3]).

**Definition 3.56**

Sei  $m \in \mathbb{N}$ , so ist der **Sobolev-Raum**  $H^m(\mathbb{R}^n)$  folgendermaßen definiert:

$$H^m(\mathbb{R}^n) := \{ f \in L^2(\mathbb{R}^n); \partial^\alpha f \in L^2 \quad \forall |\alpha| \leq m \}.$$

Für  $m \in \mathbb{N}$  und  $f \in L^2$  ist

$$\begin{aligned} f \in H^m(\mathbb{R}^n) &\Leftrightarrow id^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n) \forall |\alpha| \leq m \\ &\Leftrightarrow \hat{f}(1 + |\cdot|^2)^{\frac{m}{2}} \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Man definiert daher für  $s \in \mathbb{R}_+$ :

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{\eta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); (1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{\eta} \in L^2\}$$

Für diese Räume gilt (vgl. Taylor [Tay96, Kor. 4.1.4])

### Satz 3.57

Ist  $s = \frac{n}{2} + s'$ ,  $0 < s' < 1$ , so ist  $H^s(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^{s'}(\mathbb{R}^n)$ .

## 3.5.2 Methoden zur Regularitätsabschätzung

Die globale Regularität einer temperierten Distribution hängt vom Fall-Verhalten ihrer Fourier-Transformierten ab:

### Satz 3.58

Sei  $\eta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  mit  $\hat{\eta}(1 + |\cdot|)^s \in L^1(\mathbb{R}^n)$  für ein  $s \in \mathbb{R}_+$ , so ist  $\eta \in \mathcal{C}^s \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

### Beweis:

Sei  $s = j + s'$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,  $s' \in [0, 1)$ , so ist zu zeigen:

$$(i) \quad \eta \in L^\infty \cap \mathcal{C}^0.$$

$$(ii) \quad \eta \in \mathcal{C}^j.$$

$$(iii) \quad \partial^\alpha \eta \in \mathcal{C}^{s'} \text{ für } |\alpha| \leq j.$$

Zu (i) Da  $|\hat{\eta}| \leq |\hat{\eta}(1 + |\cdot|)^s|$  und  $\hat{\eta} = \hat{\eta}(1 + |\cdot|)^s(1 + |\cdot|)^{-s}$  messbar, ist  $\hat{\eta} \in L^1$  und somit ist nach der Fourier-Umkehrformel  $\eta$  stetig und beschränkt, da die Definitionen der Fourier-Transformation auf  $L^1$  und  $\mathcal{S}'$  verträglich sind (vgl. Definition 1.43).

Zu (ii) Da  $|\omega^\alpha| < |1 + |\omega||^j$  für  $|\alpha| \leq j$ , folgt die Aussage mit Satz 1.34 Punkt. 6(i).

Zu (iii) Nach Satz 1.34 ist

$$\partial^\alpha \eta = \overline{\mathcal{F}}((2\pi i \cdot id)^\alpha \hat{\eta}) = \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi i \omega)^\alpha \hat{\eta}(\omega) e^{2\pi i \langle \cdot, \omega \rangle} d\omega$$

und es folgt mit (ii):

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha \eta(x+t) - \partial^\alpha \eta(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle x|\omega \rangle} (e^{2\pi i \langle t|\omega \rangle} - 1) (2\pi i \omega)^\alpha \hat{\eta}(\omega) d\omega \right| \\
&\leq (2\pi)^j \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\eta}(\omega) (1+|\omega|)^j (e^{2\pi i \langle t|\omega \rangle} - 1)| d\omega \\
&= (2\pi)^j \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\eta}(\omega) (1+|\omega|)^s \underbrace{(1+|\omega|)^{-s'} (e^{2\pi i \langle t|\omega \rangle} - 1)}_{:=g(t,\omega)}| d\omega .
\end{aligned}$$

Mit

$$|e^{2\pi i \langle t|\omega \rangle} - 1| \leq c_1 \cdot \begin{cases} |t \cdot |\omega||, & |t \cdot |\omega| \leq 1 \\ 1, & |t \cdot |\omega| > 1 \end{cases}$$

ist für  $|t \cdot |\omega| \leq 1$

$$g(t, \omega) \leq c_1 |t \cdot |\omega| (1+|\omega|)^{-s'} \leq c_1 |t \cdot |\omega|^{1-s'} \leq c_1 |t| \cdot |t|^{s'-1} = c_1 |t|^{s'}$$

und für  $|t \cdot |\omega| > 1$

$$g(t, \omega) \leq c_1 |\omega|^{-s'} < c_1 |t|^{s'} .$$

Insgesamt folgt also

$$|\partial^\alpha \eta(x+t) - \partial^\alpha \eta(x)| \leq c_2 |t|^{s'} .$$

□

### Folgerung 3.59

Ist  $\eta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  mit  $|\hat{\eta}| \leq c(1+|\cdot|)^{-\gamma}$ ,  $\gamma > s+n$ , so ist  $\eta \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ .

**Beweis:**

$$|\hat{\eta}|(1+|\cdot|)^s \leq c(1+|\cdot|)^{-(\gamma-s)}$$

und die rechte Seite ist integrierbar, falls  $\gamma-s > n$  ist.

□

Dieses Resultat bestätigt im übrigen die Bemerkung nach Satz 1.49, denn ist  $\text{supp } \hat{\eta}$  kompakt, so ist  $\eta \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$  für alle  $s \in \mathbb{R}_+$ , d.h.  $\eta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ .

Cohen/Daubechies [CD93, Kap. II.3.a.] zitieren schließlich noch folgendes Resultat, das für Funktionen mit kompaktem Träger quasi eine Umkehrung des Satzes 3.58 liefert.

### Folgerung 3.60

Ist  $\text{supp } f$  kompakt und  $f \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ , so gilt  $\|\hat{f}(1+|\cdot|)^s\|_\infty < \infty$ .

**Beweis:**

Sei  $s \in [0, 1)$  und da  $f \in L^1$ , also  $\hat{f}$  beschränkt, sei o.B.d.A.  $|\omega| \geq 1$ .

Für  $t := \frac{1}{2}|\omega|^{-2}\omega$  ist dann  $e_t(\omega) = e^{i\pi} = -1$ .

Damit folgt

$$\begin{aligned} |2\hat{f}(\omega)| &= |\hat{f}(\omega)(e_t(\omega) - 1)| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(\cdot + t) - f) e_\omega \right| \\ &\leq C_1 |t|^s \\ &= C_2 |\omega|^{-s}. \end{aligned}$$

Der allgemeine Fall folgt durch  $j$ -fache partielle Integration, vgl. Satz 1.34 6.)(ii). □

Eine erste Methode zur Abschätzung der Regularität einer Skalierungsfunktion  $\phi$  ergibt sich somit aus Folgerung 3.59 durch Abschätzung des Wachstums der Fourier-Transformierten von  $\phi$ , die gemäß (3.19) als unendliches Produkt gegeben ist. Daubechies [Dau92, Kap. 7.1.1] bezeichnet Abschätzungen dieser Art als *brute force* Abschätzungen.

**Satz 3.61 (Brute Force)**

Sei  $m \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$  mit  $m(0) = 1$ ,  $A$  eine für  $\mathbb{Z}^n$  zulässige Dilatation,  $B = A^T$  und

$$m_j(\omega) := \prod_{i=0}^{j-1} m(B^{-i}\omega) \quad \text{ sowie } \quad \beta_j := \sup_{\omega \in B^{j-1}I^n} |m_j(\omega)|.$$

Ist  $\lambda_{\min}$  der Eigenwert von  $A$  mit kleinstem Betrag und  $1 < \lambda < |\lambda_{\min}|$ , so existiert für jedes  $j \in \mathbb{N}^*$  eine Konstante  $C \in \mathbb{R}_+$  mit

$$\left| \prod_{i=1}^{\infty} m(B^{-i}\omega) \right| \leq C(1 + |\omega|)^{\frac{\ln \beta_j}{j-1 \ln \lambda}}.$$

Ist  $A$  diagonalisierbar, so kann  $\lambda = |\lambda_{\min}|$  gewählt werden.

**Beweis:**

Da  $A$  expandierend existiert nach Folgerung 3.104 eine Norm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{R}^n$  mit

$$\|B^{-j}\omega\| \leq \lambda^{-j}\|\omega\| \quad (3.69)$$

( $\lambda = |\lambda_{\min}|$  im diagonalisierbaren Fall, vgl. Folgerung 3.104). Da  $m(0) = 1$  existiert weiterhin eine Konstante  $C_1 \geq 0$  mit

$$|m(\omega)| \leq 1 + C_1 \|\omega\| \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^n. \quad (3.70)$$

Da  $\lambda > 1$  existiert zu  $\omega \in \mathbb{R}^n$  ein  $j_0 \in \mathbb{N}^*$ , so daß

$$\lambda^{j_0-1} < (1 + \|\omega\|)^{\frac{1}{j}} \leq \lambda^{j_0} \quad (3.71)$$

ist. Da

$$\prod_{i=0}^k m_j(B^{-ij-1}\cdot) = \underbrace{m(B^{-1}\cdot) \cdot \dots \cdot m(B^{-j}\cdot)}_{=m_j(B^{-0j-1}\cdot)} \cdot \dots \cdot \underbrace{m(B^{-(k-1)j-1}\cdot) \cdot \dots \cdot m(B^{-kj}\cdot)}_{=m_j(B^{-kj-1}\cdot)}$$

ist

$$\prod_{i=1}^{\infty} m(B^{-i}\cdot) = \prod_{i=0}^{\infty} m_j(B^{-ij-1}\cdot) = \underbrace{\prod_{i=0}^{j_0-1} m_j(B^{-ij-1}\cdot)}_{=: \Pi_1} \underbrace{\prod_{i=j_0}^{\infty} m_j(B^{-ij-1}\cdot)}_{=: \Pi_2} .$$

Die beiden Teilprodukte  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  schätzt man getrennt ab. Zunächst zu  $\Pi_1$ . Es ist

$$|\Pi_1| \leq \beta_j^{j_0} = e^{j_0 \cdot \ln \beta_j} = \exp\left(j_0 \cdot \ln \lambda \frac{\ln \beta_j}{\ln \lambda}\right) = \lambda^{j_0 \cdot \frac{\ln \beta_j}{\ln \lambda}}$$

und mit (3.71) folgt weiter

$$|\Pi_1| \leq \left((1 + \|\omega\|)^{\frac{1}{j}} \cdot \lambda\right)^{\frac{\ln \beta_j}{\ln \lambda}} \leq C_2 (1 + \|\omega\|)^{\frac{\ln \beta_j}{j \cdot \ln \lambda}} .$$

Nun zu  $\Pi_2$ . Mit  $1 + x \leq e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\prod_{i=j_0}^{\infty} (1 + |u_i|) \leq \exp\left(\sum_{i=j_0}^{\infty} |u_i|\right)$$

und es folgt mit (3.69), (3.70) und (3.71)

$$\begin{aligned} |\Pi_2| &\leq \exp\left(C_1 \sum_{i=j_0}^{\infty} \|B^{-ij-1}\omega\|\right) \\ &\leq \exp\left(C_1 \sum_{i=j_0}^{\infty} \lambda^{-ij-1} \|\omega\|\right) \\ &= \exp\left(C_1 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{-ij-1} \lambda^{-jj_0} \|\omega\|\right) \\ &\leq \exp\left(C_1 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{-ij-1}\right) \\ &=: C_3(j, \lambda) . \end{aligned}$$

Zusammenfassen der Abschätzungen für  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  liefert schließlich die Behauptung. □

Bessere Regularitätsabschätzungen erhält man im allgemeinen, indem man  $L^1$ - bzw.  $L^2$ -Abschätzungen für  $\hat{\phi}(1 + |\cdot|)^s$  herleitet und dann den Satz 3.58 anwendet. Dies geschieht unter Verwendung der sog. **Littlewood-Paley-Methode**, bei der das Integral in einzelne Abschnitte unterteilt wird, die dann separat abgeschätzt werden. Das entsprechende Resultat wird in Satz 3.67 formuliert. Dafür wird jedoch der Begriff des *Übergangsoperators* benötigt.

### 3.5.3 Der Übergangsoperator

Zuerst wohl von Conze und Raugi [CR90] im Zusammenhang mit der Wavelet-Theorie untersucht, ist der dem Symbol  $m$  einer Skalierungsfunktion  $\phi$  assoziierte *Übergangsoperator*  $T_m$  ein wichtiges Hilfsmittel zum Studium der Eigenschaften von  $\phi$ . Regularitätsabschätzungen für  $\phi$  unter Betrachtung des Übergangsoperators finden sich bei Cohen/Daubechies [CD93, Kap. II.4], Cohen *et al.* [CGV99] und Daubechies [Dau92, Kap. 7]. Lawton *et al.* [LLS97] stellten Verbindungen zwischen der Stabilität von  $\phi$  und den Eigenwerten und Eigenvektoren von  $T_m$  her.

#### Definition 3.62

Sei  $m \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ , so heißt

$$T = T_m : \mathcal{P}(\mathbb{T}^n) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$$

$$f \mapsto \sum_{i=0}^{a-1} m(B^{-1}(\cdot + \rho_i)) f(B^{-1}(\cdot + \rho_i))$$

**Übergangsoperator** bezüglich  $m$ . Conze/Raugi [CR90] bezeichnen Funktionen, für die  $T_m f = f$  gilt, als  **$T_m$ -harmonisch**.

Aus der Definition ergibt sich sofort:

#### Folgerung 3.63

Die konstante Funktion 1 ist genau dann  $T_m$ -harmonisch, wenn das Symbol  $m$  die Interpolationsbedingung (3.30) erfüllt.

#### Satz 3.64

Seien  $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$  mit  $f = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} c_l e_{-l}$  und  $m = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k e_{-k}$ . Dann gilt:

1.)  $Tf$  ist wiederum ein trigonometrisches Polynom:

$$Tf = a \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k c_{Al-k} \right) e_{-l} .$$

2.)

$$\langle T^j f | g \rangle_{\mathbb{T}^n} := \int_{\mathbb{T}^n} T^j f \bar{g} = \int_{B^j I^n} \left( \prod_{i=1}^j m(B^{-i} \omega) \right) f(B^{-j} \omega) \bar{g}(\omega) d\omega .$$

3.) Der Raum  $E_f := \text{span} \{T^j f; j \geq 0\}$  ist endlich-dimensional und invariant unter  $T$ :  $T(E_f) \subseteq E_f$ .

**Beweis:**

Zu 1.)

$$\begin{aligned} Tf(\omega) &= \sum_{i=0}^{a-1} m(B^{-1}(\omega + \rho_i)) f(B^{-1}(\omega + \rho_i)) \\ &= \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k e_{-k}(B^{-1}(\omega + \rho_i)) \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} c_l e_{-l}(B^{-1}(\omega + \rho_i)) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k c_l e_{-(k+l)}(B^{-1}\omega) \sum_{i=0}^{a-1} e_{-(k+l)}(B^{-1}\rho_i) . \end{aligned}$$

Nach Korollar 3.30 ist die letzte Summe gleich  $a$ , falls  $k+l \in A\mathbb{Z}^n$  und Null sonst. Also ist

$$\begin{aligned} Tf(\omega) &= a \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k c_{Al-k} e_{-Al}(B^{-1}\omega) \\ &= a \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k c_{Al-k} e_{-l}(\omega) , \end{aligned}$$

denn  $e_{-Al}(B^{-1}\omega) = e^{-2\pi i \langle Al | B^{-1}\omega \rangle} = e_{-l}(\omega)$ .

Zu 2.) Beweis durch Induktion nach  $j$ .

$j = 0$ : Mit  $T^0 = id$  und  $B^0 = E_n$  ist

$$\langle T^0 f | g \rangle_{\mathbb{T}^n} = \langle f | g \rangle_{\mathbb{T}^n} = \int_{\mathbb{T}^n} f \bar{g} = \int_{B^0 I^n} \left( \prod_{i=1}^0 m(B^{-i} \omega) \right) f(B^0 \omega) \bar{g}(\omega) d\omega .$$

Hierbei wurde die bereits mehrfach benutzte Identifikation von  $\mathbb{T}^n$  mit  $I^n$  verwendet.

$j \rightarrow j + 1$ : Nach Punkt 1.) ist  $Tf \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ . Die Induktionsvoraussetzung liefert also

$$\begin{aligned} \langle T^{j+1}f|g \rangle_{\mathbb{T}^n} &= \langle T^j T f | g \rangle_{\mathbb{T}^n} = \int_{B^j I^n} \left( \prod_{i=1}^j m(B^{-i}\omega) \right) T f(B^{-j}\omega) \bar{g}(\omega) d\omega \\ &= \int_{B^j I^n} \left( \prod_{i=1}^j m(B^{-i}\omega) \right) \sum_{\ell=0}^{a-1} m(B^{-1}(B^{-j}\omega + \rho_\ell)) f(B^{-1}(B^{-j}\omega + \rho_\ell)) \bar{g}(\omega) d\omega \\ &= \int_{I^n} \left( \prod_{i=1}^j m(B^{j-i}\xi) \right) \sum_{\ell=0}^{a-1} m(B^{-1}(\xi + \rho_\ell)) f(B^{-1}(\xi + \rho_\ell)) \bar{g}(B^j\xi) a^j d\xi, \end{aligned}$$

letzteres mit der Substitution  $\xi := B^{-j}\omega$  und da  $\omega \in B^j I^n \Leftrightarrow \xi \in I^n$ . Eine weitere Substitution  $\zeta := \xi + \rho_\ell$  liefert

$$\langle T^{j+1}f|g \rangle_{\mathbb{T}^n} = \sum_{\ell=0}^{a-1} a^j \int_{I^n + \rho_\ell} \left( \prod_{i=1}^j m(B^{j-i}\zeta) \right) m(B^{-1}\zeta) f(B^{-1}\zeta) \bar{g}(B^j\zeta) d\zeta,$$

denn  $m(B^{j-i}\cdot)$ ,  $g(B^j\cdot)$  sind für  $j \geq 0$ ,  $j - i \geq 0$  trigonometrische Polynome und daher invariant unter der Substitution.

Betrachte

$$h(B^{-1}\zeta) := \left( \prod_{i=1}^j m(B^{j-i}\zeta) \right) m(B^{-1}\zeta) f(B^{-1}\zeta) \bar{g}(B^j\zeta).$$

Gilt

$$\sum_{\ell=0}^{a-1} \int_{I^n + \rho_\ell} h(B^{-1}\zeta) d\zeta = \int_{B I^n} h(B^{-1}\zeta) d\zeta, \quad (3.72)$$

so folgt

$$\begin{aligned} \langle T^{j+1}f|g \rangle_{\mathbb{T}^n} &= a^j \int_{B I^n} h(B^{-1}\zeta) d\zeta \\ &= a^j \int_{B I^n} \left( \prod_{i=1}^j m(B^{j-i}\zeta) \right) m(B^{-1}\zeta) f(B^{-1}\zeta) \bar{g}(B^j\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

und mit der Substitution  $\omega := B^j\zeta$  folgt

$$\langle T^{j+1}f|g \rangle_{\mathbb{T}^n} = \int_{B^{j+1} I^n} \left( \prod_{i=1}^{j+1} m(B^{-i}\omega) \right) f(B^{-(j+1)}\omega) \bar{g}(\omega) d\omega.$$

Zu zeigen bleibt (3.72). Da  $h \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$  genügt es,  $h = e_{-k}$  zu betrachten. Es ist

$$\sum_{\ell=0}^{a-1} \int_{I^{n+\rho_\ell}} e_{-k}(B^{-1}\zeta) d\zeta = \sum_{\ell=0}^{a-1} \int_{I^n} e_{-k}(B^{-1}\zeta) e_{-k}(B^{-1}\rho_\ell) d\zeta$$

und mit Korollar 3.30 folgt für  $k = Al$ ,  $l \in \mathbb{Z}^n$

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{a-1} \int_{I^{n+\rho_\ell}} e_{-k}(B^{-1}\zeta) d\zeta &= a \int_{I^n} e_{-k}(B^{-1}\omega) d\omega \\ &= a \int_{I^n} e_{-l}(\omega) d\omega \end{aligned}$$

und

$$\sum_{\ell=0}^{a-1} \int_{I^{n+\rho_\ell}} e_{-k}(B^{-1}\zeta) d\zeta = 0$$

in allen übrigen Fällen. Also ist

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{a-1} \int_{I^{n+\rho_\ell}} e_{-k}(B^{-1}\zeta) d\zeta &= a \cdot \delta_{k,0} \\ &= a \int_{I^n} e_{-k}(\omega) d\omega \\ &= \int_{BI^n} e_{-k}(B^{-1}\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Zu 3.) Die Invarianz ist klar. Weiterhin ist nach Punkt 1.)

$$Tf = a \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k c_{Al-k} e_{-l}.$$

Da  $m, f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ , existieren  $R, S \subset \mathbb{Z}^n$  mit  $h_k = 0$  für  $k \notin S$  und  $c_l = 0$  für  $l \notin R$ . Daraus ergibt sich, daß  $g_l = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k c_{Al-k} = 0$  falls  $Al - k \notin R$  ist. Es gilt

$$\begin{aligned} Al - k \notin R &\Leftrightarrow Al \notin (S + R) \\ &\Leftrightarrow l \notin A^{-1}(S + R) \cap \mathbb{Z}^n. \end{aligned}$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Argumentation ergibt sich schließlich für die Koeffizienten  $g_l$  von  $T^j f$ , daß

$$g_l = 0 \quad \text{für} \quad l \notin \left( A^{-j}S + \sum_{i=1}^j A^{-i}R \right) \cap \mathbb{Z}^n \quad \text{ist.}$$

Sei  $N_f := \sup_{k \in R} |k|$  und  $N_m := \sup_{k \in S} |k|$ , so ist

$$\|A^{-j}R\| \leq \|A^{-j}\|N_f \leq \sup_{j>0} \|A^{-j}\|N_f$$

und

$$\left\| \sum_{i=1}^j A^{-i}S \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^j A^{-i} \right\| N_m \leq \sup_{j>0} \sum_{i=1}^j \|A^{-i}\| N_m .$$

Da  $A^{-1}$  kontrahierend ist, folgt die Behauptung. □

Die Eigenwerte und Eigenvektoren des Übergangsoperators sind von großer Bedeutung im Zusammenhang mit Aussagen über Eigenschaften einer Skalierungsfunktion  $\phi$ . Das folgende einfache Resultat geht auf Lawton *et al.* [LLS97] zurück, es verallgemeinert Folgerung 3.63.

**Lemma 3.65**

Ist  $\phi$  stetig sowie  $(h, A)$ -skalierbar und  $m$  das Symbol der Maske  $h$ , so ist

$$f_0 := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \phi(k)e_{-k}$$

$T_m$ -harmonisch.

Ist  $\hat{\phi} \in L^1$ , so ist  $f_0 = \varpi \hat{\phi}$ . Falls außerdem  $m$  interpolierend, so ist  $f_0 = 1$ .

**Beweis:**

Nach Satz 3.64 1.) und der Zwei-Skalen-Relation (3.16) ist

$$\begin{aligned} Tf_0 &= a \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} h_l \phi(Ak - l)e_{-k} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \phi(k)e_{-k} = f_0 . \end{aligned}$$

Der zweite Teil der Behauptung ergibt sich direkt aus Folgerung 3.63. □

Unter Verwendung des Übergangsoperators kann nun das bereits in Paragraph 3.2.3 angekündigte Resultat bewiesen werden, daß für eine Skalierungsfunktion mit nicht-negativem Symbol, das die Interpolationsbedingung (3.30) erfüllt, bereits  $\hat{\phi} \in L^1$  gilt.

**Lemma 3.66**

Sei  $m \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$  das Symbol einer endlichen Skalierungsmaske  $(h_k)$  und  $\hat{\phi}$  durch das Produkt (3.19) definiert. Ist  $m \geq 0$  und erfüllt  $m$  die Interpolationsbedingung (3.30), so ist  $\hat{\phi} \in L^1$ .

**Beweis:**

Nach (3.30) ist

$$T1(\omega) = \sum_{i=0}^{a-1} m(B^{-1}(\omega + \rho_i)) = 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^n .$$

Sei

$$\hat{\phi}_j(\omega) := m(B^{-1}\omega) \cdot \dots \cdot m(B^{-j}\omega) \chi_{I^n}(B^{-j}\omega) .$$

Mit  $f = g = 1$  folgt aus Satz 3.64 Punkt 2.)

$$1 = \langle T^j 1 | 1 \rangle_{\mathbb{T}^n} = \int_{B^j I^n} \prod_{i=1}^j m(B^{-i}\omega) d\omega = \|\hat{\phi}_j\|_1 ,$$

denn  $B^{-j}\omega \in I^n \Leftrightarrow \omega \in B^j I^n$  und  $m \geq 0$ .

Für  $j \geq 1$  ist  $\hat{\phi}_j \geq 0$  und die  $\hat{\phi}_j$  konvergieren punktweise gegen  $\hat{\phi}$ . Anwendung des Lemmas von Fatou liefert dann die Behauptung. □

**Satz 3.67 (Regularität nach Littlewood-Paley)**

Sei  $m, f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$  mit  $m \geq 0$ ,  $f \geq 0$  und  $f > 0$  in einer punktierten Umgebung des Nullpunkts. Es bezeichne  $\varrho_A$  den Spektralradius der Dilatationsmatrix  $A$  und  $\varrho_f$  den Spektralradius von  $T|_{E_f}$ . Ist  $\varrho_f < 1$  und  $0 \leq s < -\frac{\ln \varrho_f}{\ln \varrho_A}$ , so ist  $\hat{\phi}(1 + |\cdot|)^s \in L^1$ . Nach Satz 3.58 ist dann  $\phi \in \mathcal{C}^s$ .

**Bemerkung 3.68**

- 1.) Nach Korollar 2 bei Cohen *et al.* [CGV99, S.12] ist die im folgenden häufiger auftretende Voraussetzung  $\varrho_f < 1$  eine natürliche Voraussetzung.
- 2.) Ein ähnlicher Satz für die  $L^2$ -Norm von  $\hat{\phi}(1 + |\cdot|)^s$  findet sich ebenfalls bei Cohen *et al.* (op. cit., Th. 3.2).

**Beweis des Satzes:**

Im folgenden auftretende, positive Konstanten werden fortlaufend numeriert und mit  $C_j$ ,  $j \geq 1$  bezeichnet.

Nach der Spektralformel (3.99) ist

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|(T|_{E_f})^j\|^{\frac{1}{j}} = \varrho_f ,$$

daher existiert zu  $\varepsilon > 0$  ein  $j_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\langle T^j f | 1 \rangle_{\mathbb{T}^n} \leq \|T^j\| \|f\| \leq \|f\| (\varrho_f + \varepsilon)^j \quad \forall j \geq j_0 \quad (3.73)$$

und

$$\|B^j\| \leq (\varrho_A + \varepsilon)^j \quad \forall j \geq j_0. \quad (3.74)$$

Die Wahl von  $\varepsilon$  ergibt sich aus (3.77).

Sei  $K \subset I^n$  eine kompakte Umgebung des Nullpunkts mit  $f|_{K \setminus \{0\}} > 0$ .

Da auch  $B^{-1}K$  eine Umgebung des Nullpunkts ist, existiert eine Konstante  $C_1 > 0$ , so daß  $f|_U \geq C_1$  für  $U := K \setminus B^{-1}K$  gilt. Da  $\omega \in B^j U \Leftrightarrow B^{-j}\omega \in U$  ist  $f(B^{-j}\omega) \geq C_1$  für  $\omega \in B^j U$  und mit (3.28) und der Nichtnegativität von  $m$  gilt

$$\begin{aligned} \int_{B^j U} \hat{\phi} &= \int_{B^j U} \prod_{i=1}^j m(B^{-i}\omega) \hat{\phi}(B^{-j}\omega) \frac{f(B^{-j}\omega)}{f(B^{-j}\omega)} d\omega \\ &\leq \frac{\|\hat{\phi}\|_{\infty, K}}{C_1} \int_{B^j U} \prod_{i=1}^j m(B^{-i}\omega) f(B^{-j}\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Mit Satz 3.64 2.) und (3.73) folgt weiter

$$\begin{aligned} \int_{B^j U} \hat{\phi} &\leq \frac{\|\phi\|_{\infty, K}}{C_1} \langle T^j f | 1 \rangle_{\mathbb{T}^n} \\ &\leq C_2 (\varrho_f + \varepsilon)^j \quad \forall j \geq j_0. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Es ist

$$\bigcup_{j \geq 1} B^j U = \bigcup_{j \geq 1} B^j (K \setminus B^{-1}K) = \bigcup_{j \geq 1} (B^j K \setminus B^{j-1}K) = \mathbb{R}^n \setminus K,$$

daher gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\omega) (1 + |\omega|)^s d\omega &= \\ &= \int_{\tilde{U}} \hat{\phi}(\omega) (1 + |\omega|)^s d\omega + \sum_{j \geq j_0} \int_{B^j U} \hat{\phi}(\omega) (1 + |\omega|)^s d\omega \end{aligned} \quad (3.76)$$

mit

$$\tilde{U} := K \cup \bigcup_{j=1}^{j_0-1} B^j U.$$

Da  $\hat{\phi} \in \mathcal{C}^\infty$  ist

$$\int_{\tilde{U}} \hat{\phi}(\omega)(1 + |\omega|)^s d\omega \leq C_3(j_0) .$$

Betrachte den zweiten Summanden in (3.76). Es ist

$$(1 + |\omega|)^s \leq C_4 |\omega|^s \quad \forall \omega \in \bigcup_{j \geq j_0} B^j U$$

und für  $\omega = B^j \omega' \in B^j U$  folgt mit (3.74) für alle  $j \geq j_0$

$$\begin{aligned} |\omega|^s &\leq (\|B^j\| |\omega'|)^s \\ &\leq (\varrho_A + \varepsilon)^{js} |\omega'|^s \\ &\leq C_1 (\varrho_A + \varepsilon)^{sj} . \end{aligned}$$

Mit (3.75) gilt also für alle  $j \geq j_0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\omega)(1 + |\omega|)^s d\omega \leq C_3 + C_1 C_2 \sum_{j \geq j_0} (\varrho_f + \varepsilon)^j (\varrho_A + \varepsilon)^{sj} . \quad (3.77)$$

Nach Voraussetzung ist  $s < -\frac{\ln \varrho_f}{\ln \varrho_A}$  und dies ist äquivalent zu  $\varrho_A^s \varrho_f < 1$ . Einsetzen in (3.77) liefert schließlich die Behauptung.  $\square$

Satz 3.67 liefert eine obere Schranke für die Regularität der Funktion  $\phi$ . Für die Analyse wünschenswert wäre jedoch auch eine untere Schranke, besser noch eine exakte Aussage über den Hölder-Koeffizienten von  $\phi$ . Mit Hilfe der *Strang-Fix Bedingungen* (vgl. Paragraph 3.5.4) läßt sich diese untere Schranke tatsächlich angeben. Unter gewissen Einschränkungen ist die Schranke aus Satz 3.67 sogar exakt (vgl. Folgerung 3.83).

Zur Vorbereitung dieses Umkehrsatzes dient das folgende Lemma.

**Lemma 3.69**

Ist  $\hat{\phi} \in L^1$  und  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\phi}(\cdot - k) = 1$  und  $m \geq 0$ , so gilt für alle  $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$

$$\langle T^j f | g \rangle_{\mathbb{T}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\omega) f(B^{-j}\omega) \bar{g}(\omega) d\omega .$$

**Beweis:**

Nach Satz 3.64 ist

$$\begin{aligned} \langle T^j f | g \rangle_{\mathbb{T}^n} &= \int_{B^j I^n} \left( \prod_{i=1}^j m(B^{-i}\omega) \right) f(B^{-j}\omega) \bar{g}(\omega) d\omega \\ &= \int_{B^j I^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\phi}(B^{-j}\omega - k) \left( \prod_{i=1}^j m(B^{-i}\omega) \right) f(B^{-j}\omega) \bar{g}(\omega) d\omega . \end{aligned}$$

Da  $m \geq 0$  ist auch  $\hat{\phi} \geq 0$ , daher gilt

$$\left| \sum_{|k| < N} \hat{\phi}(\cdot - k) \right| \leq 1 \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Mit dem Satz von Lebesgue folgt

$$\langle T^j f | g \rangle_{\mathbb{T}^n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{B^j I^n} \left( \prod_{i=1}^j m(B^{-i}\omega) \right) f(B^{-j}\omega) \bar{g}(\omega) \hat{\phi}(B^{-j}\omega - k) d\omega$$

und die Substitution  $\xi := \omega - B^j k$  liefert

$$\langle T^j f | g \rangle_{\mathbb{T}^n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{B^j I^n - B^j k} \left( \prod_{i=1}^j m(B^{-i}\xi) \right) f(B^{-j}\xi) \bar{g}(\xi) \hat{\phi}(B^{-j}\xi) d\xi,$$

denn  $m, f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ . Mit (3.28) folgt schließlich

$$\begin{aligned} \langle T^j f | g \rangle_{\mathbb{T}^n} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{B^j I^n + B^j k} \hat{\phi}(\xi) f(B^{-j}\xi) \bar{g}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\xi) f(B^{-j}\xi) \bar{g}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe des Übergangsooperators lassen sich auch Aussagen über die Stabilität einer Skalierungsfunktion  $\phi$  treffen. Das folgende Resultat wurde zuerst von Lawton *et al.* [LLS97] bewiesen und später von Cohen *et al.* [CGV99] verbessert.

### Satz 3.70

Sei  $\phi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$   $(h, A)$ -skalierbar mit  $\text{supp } h$  kompakt und  $m$  das Symbol der  $(h_k)$ . Weiterhin sei  $u = |m|^2$  und  $E \subseteq \mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$  endlich-dimensional mit  $T_u(E) \subseteq E$  und es gelte

$$\{f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n); f \text{ ist } T_u\text{-harmonisch}\} \subset E.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- 1.)  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  und  $\phi$  ist stabil.
- 2.)  $\lambda = 1$  ist einfacher Eigenwert von  $T_u|_E$  zu einer strikt positiven Eigenfunktion  $f_1 \in E$ .

### 3.5.4 Strang-Fix und Moment-Bedingungen

#### Definition 3.71

Sei  $\alpha$  ein Multiindex. Ist  $id^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , so heißt

$$\text{Mom}_\alpha(f) := \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x) dx$$

**Moment** von  $f$  der Ordnung  $|\alpha|$ .

Im eindimensionalen Fall ist für zwei biorthogonale Funktionen  $\psi, \tilde{\psi}$  die Zahl der verschwindenden Momente der einen an die Regularität der anderen Funktion gekoppelt. Daubechies [Dau92, Kap. 5.5] beweist folgenden Satz.

#### Satz 3.72

Seien  $\psi, \tilde{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$  nicht konstante Funktionen mit

$$\langle \psi_{j,k} | \tilde{\psi}_{j',k'} \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{k,k'} ,$$

wobei die  $\psi_{j,k}$  mit  $A = 2$  wie in (3.31) definiert seien. Ist  $\psi \in \mathcal{C}_b^n(\mathbb{R})$  und  $|\tilde{\psi}| \leq C(1 + |\cdot|)^{-s}$  für ein  $s > n + 1$ , so ist  $\text{Mom}_\alpha(\tilde{\psi}) = 0$ ,  $\alpha = 0, \dots, n$ .

Ist also  $\{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$  eine orthonormale Wavelet-Basis des  $L^2(\mathbb{R})$ , so folgt unter den Voraussetzungen dieses Satzes (mit  $\tilde{\psi} = \psi$ ), daß alle Momente von  $\psi$  bis zur Ordnung  $n$  verschwinden. Mit Satz 1.34 6.) folgt weiter (vgl. auch Lemma 3.74), daß  $\hat{\psi}$  in diesem Fall eine  $(n + 1)$ -fache Nullstelle im Nullpunkt besitzt:  $\partial^l \hat{\psi}(0) = 0 \quad \forall l \leq n$ . Da

$$\hat{\psi} = -e^{-\pi i \cdot} \bar{m} \left( \frac{\cdot + 1}{2} \right) \hat{\phi} \left( \frac{\cdot}{2} \right) \quad (3.78)$$

(vgl. Paragraph 3.3.2) und  $\hat{\phi}(0) \neq 0$ , folgt schließlich unter der Voraussetzung  $|\phi| \leq C(1 + |\cdot|)^{-s}$ ,  $s > n + 1$ , daß das Symbol  $m$  im Punkt  $\omega = \frac{1}{2}$  ebenfalls eine  $(n + 1)$ -fache Nullstelle besitzt und daher in folgender Weise zerfällt:

$$m(\omega) = \left( \frac{1 + e^{-2\pi i \omega}}{2} \right)^{n+1} \mathcal{L}(\omega) ,$$

wobei  $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^n$  und  $\mathbb{Z}$ -periodisch. Nach Fix/Strang [FS69] heißen diese Nullstellenbedingungen *Strang-Fix-Bedingungen*.

#### Definition 3.73

Sei  $m$  das Symbol einer  $(h, A)$ -skalierbaren Funktion und  $\mathcal{R} = \{\rho_0, \dots, \rho_{a-1}\}$  ein Repräsentantensystem von  $\mathbb{Z}^n / B\mathbb{Z}^n$ . Dann erfüllt  $m$  die **Strang-Fix-Bedingungen** der Ordnung  $r \in \mathbb{N}$ , falls für alle Multiindizes  $\alpha$  mit Ordnung  $|\alpha| \leq r - 1$  gilt:

$$\partial^\alpha m(B^{-1} \rho_i) = 0 \quad i = 1, \dots, a - 1 . \quad (3.79)$$

Man beachte die Zählung ab  $i = 1$ , denn  $\rho_0 = 0$  und  $m(0) \neq 0$  ist Voraussetzung für die Existenz von Skalierungsfunktionen, vgl. Satz 3.20.

Im eindimensionalen Fall sind Strang-Fix und Moment-Bedingungen äquivalent. Folgendes Resultat findet sich z.B. bei Mallat [Mal98, §7.2.1].

**Lemma 3.74**

Sei  $\phi$  Skalierungsfunktion einer orthonormalen Mehrfachauflösung mit  $\hat{\phi} = m(\frac{\cdot}{2})\hat{\phi}(\frac{\cdot}{2})$  und  $\psi$  das durch (3.78) gegebene zugehörige Wavelet. Existieren die Momente von  $\psi$  bis zur Ordnung  $r$  und ist  $\hat{\psi}$  in einer Umgebung des Nullpunkts  $r$ -fach stetig differenzierbar, so sind folgende Aussagen äquivalent.

- 1.)  $\psi$  hat  $r$  verschwindende Momente.
- 2.)  $\partial^l \hat{\psi}(0) = 0 \quad 0 \leq l \leq r - 1$ .
- 3.)  $m$  erfüllt die Strang-Fix-Bedingungen der Ordnung  $L$ .

**Beweis:**

Nach Satz 1.34 6.) ist

$$\partial^l \hat{\psi}(\omega) = (-2\pi i)^l \int_{\mathbb{R}} x^l \psi(x) e_{-\omega}(x) dx .$$

Daher gilt

$$\partial^l \hat{\psi}(0) = (-2\pi i)^l \int_{\mathbb{R}} x^l \psi(x) dx$$

und damit die Äquivalenz von 1.) und 2.).

Aus (3.78) folgt wegen  $\hat{\phi}(0) \neq 0$  mittels Differentiation induktiv die Äquivalenz von 2.) und 3.).

□

Die Äquivalenz von 1.) und 2.) gilt nach Satz 1.34 6.) auch noch in höheren Dimensionen:

**Bemerkung 3.75**

Ist  $id^\alpha \psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $|\alpha| < r$  und  $\psi$  in einer Umgebung des Nullpunkts  $r$ -fach stetig differenzierbar, so ist

$$\text{Mom}_\alpha(\psi) = \left( \frac{-1}{2\pi i} \right)^{|\alpha|} \partial^\alpha \hat{\psi}(0) \quad |\alpha| < r .$$

Jia [Jia98] hat gezeigt, daß z.B. für interpolierende Skalierungsfunktionen die Strang-Fix Bedingungen der Ordnung  $r$  äquivalent dazu sind, daß Polynome vom Grade höchstens  $r - 1$  als Linearkombination der  $\phi(\cdot - k)$  dargestellt werden können. Genauer gilt folgender Satz.

**Satz 3.76 (Jia)**

Sei  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$  eine endliche Folge in  $\mathbb{R}$  und  $\phi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  die durch (3.19) gegebene Skalierungsfunktion. Sei  $\mathcal{S}(\phi)$  der durch  $\phi$  erzeugte PSI-Raum und  $\Pi_r$  bezeichne den Raum aller Polynome vom Grad  $\leq r$ . Gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\phi}(\rho_i - k) \neq 0 \quad i = 0, \dots, a - 1,$$

so sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1.)  $\Pi_{r-1} \subset \mathcal{S}(\phi)$ .
- 2.) Das zu  $\phi$  gehörige Symbol  $m$  erfüllt die Strang-Fix Bedingungen der Ordnung  $r$ .

Für den Fall  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  und  $\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}^n\}$  Riesz-Basis von  $\mathcal{S}_2(\phi)$  gilt unter den Voraussetzungen von Satz 3.76 folgendes Korollar (vgl. Cohen *et al.* [CGV99, Beh. 2.1]).

**Korollar 3.77**

Ist  $\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}^n\}$  Riesz-Basis von  $\mathcal{S}_2(\phi)$ , so ist  $\Pi_{r-1} \subset \mathcal{S}_2(\phi)$  genau dann, wenn das zugehörige Symbol  $m$  die Strang-Fix Bedingungen der Ordnung  $r$  erfüllt.

Die Momente einer Skalierungsfunktion können mittels der Skalierungsmaske rekursiv berechnet werden, vgl. Resnikoff/Wells [RW98, §5.3.3].

Mit Hilfe der Strang-Fix-Bedingungen soll nun die Umkehrung des Satzes 3.67 hergeleitet werden. Eine analoge Untersuchung des  $L^2$ -Falles findet sich bei Cohen *et al.* [CGV99]. Der Beweis des nachfolgenden Satzes orientiert sich an Cohen *et al.* [CGV99, Th. 2.1].

**Satz 3.78**

Sei  $m \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$  das Symbol einer  $(h, A)$ -skalierbaren Funktion  $\phi$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $A$  ist isotrop:  $A$  ist diagonalisierbar und alle Eigenwerte von  $A$  haben den gleichen Betrag  $\varrho_A > 1$  (vgl. Definition 3.100).
- (ii)  $m \geq 0$  und  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\phi}(\cdot - k) = 1$ .

(iii)  $\hat{\phi}(1 + |\cdot|)^s \in L^1(\mathbb{R}^n)$  für ein  $s \geq 0$ .

Dann erfüllt  $m$  die Strang-Fix Bedingungen der Ordnung  $r > s$ .

**Bemerkung 3.79**

Für  $s = 0$  ist die Aussage des Satzes 3.78 bereits bekannt: Aus (ii) folgt, daß  $m$  interpolierend; da  $m \geq 0$ ,  $m(0) = 1$  ist  $m(B^{-1}\rho_i) = 0$ ,  $i > 0$ , also hat  $m$  Strang-Fix-Ordnung  $r \geq 1$ . Andererseits ist  $\hat{\phi} \in L^1$ , also gilt (iii) für  $s = 0$ .

**Beweis zu Satz 3.78:**

Da  $A$  isotrop existiert nach Lemma 3.103 eine zur euklid. Norm  $|\cdot|$  äquivalente Norm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{R}^n$  mit

$$\|B\omega\| = \varrho_A \|\omega\|. \quad (3.80)$$

Diese wird im folgenden verwendet.

Sei  $f := \hat{\phi} \|\cdot\|^s$ , so ist  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und

$$F := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(\cdot - k) \in L^1(\mathbb{T}^n).$$

Nach Voraussetzung (ii) ist

$$\inf(F|_K) \geq \inf_{\omega \in K, k \in \mathbb{Z}^n} |\omega - k|^s \cdot 1 > 0 \quad (3.81)$$

für alle Kompakta  $K \subset \mathbb{R}^n$  mit  $K \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$ . Da

$$\begin{aligned} f(B\omega) &= m(\omega) \hat{\phi}(\omega) \|B\omega\|^s \\ &= \varrho_A^s m(\omega) f(\omega) \end{aligned} \quad (3.82)$$

ist

$$\begin{aligned} F(B\omega) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(B(\omega - B^{-1}k)) \\ &= \varrho_A^s \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} m(\omega - B^{-1}k) f(\omega - B^{-1}k). \end{aligned}$$

Ist  $\mathcal{R} = \{\rho_0, \dots, \rho_{a-1}\}$  ein Repräsentantensystem von  $\mathbb{Z}^n/B\mathbb{Z}^n$ , so läßt sich jedes  $k \in \mathbb{Z}^n$  eindeutig darstellen als  $k = \rho_i + Bl$  mit  $\rho_i \in \mathcal{R}$  und  $l \in \mathbb{Z}^n$ . Somit ist

$$\begin{aligned} F(B\omega) &= \varrho_A^s \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} m(\omega - B^{-1}\rho_i - l) f(\omega - B^{-1}\rho_i - l) \\ &= \varrho_A^s \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} m(\omega - B^{-1}\rho_i) f(\omega - B^{-1}\rho_i - l) \\ &= \varrho_A^s \sum_{i=0}^{a-1} m(\omega - B^{-1}\rho_i) F(\omega - B^{-1}\rho_i). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Da  $\hat{\phi}$  stetig und  $\hat{\phi}(0) = 1$  ist  $g := \frac{F}{f}$  für hinreichend kleines  $r > 0$  auf  $\{0 < \|\omega\| < r\}$  wohldefiniert und mit (3.82), (3.83) folgt

$$\begin{aligned} g(B\omega) &= \frac{\varrho_A^s \sum_{i=0}^{a-1} m(\omega - B^{-1}\rho_i) F(\omega - B^{-1}\rho_i)}{\varrho_A^s m(\omega) f(\omega)} \\ &= g(\omega) + \frac{\sum_{i=1}^{a-1} m(\omega - B^{-1}\rho_i) F(\omega - B^{-1}\rho_i)}{m(\omega) f(\omega)} \\ &=: g(\omega) + h(\omega) . \end{aligned}$$

Für  $i = 1, \dots, a-1$  ist  $\rho_i \notin B\mathbb{Z}^n$  und daher auch  $B^{-1}\rho_i \notin \mathbb{Z}^n$ . Da  $\hat{\phi}$  stetig mit  $\hat{\phi}(0) = 1$  und  $m(0) = 1$  existiert nach (3.81) eine Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$  des Nullpunkts und eine Konstante  $C > 0$ , so daß

$$h(\omega) \geq C \frac{1}{\|\omega\|^s} \sum_{i=1}^{a-1} m(\omega - B^{-1}\rho_i) \quad \forall \omega \in U \quad (3.84)$$

gilt. Sei  $K$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|$  eine Kugel um den Nullpunkt mit  $K \subset U$ , so ist  $K \subset B^j U \forall j \geq 0$  und daher  $B^{-j} K \subset U \forall j \geq 0$ . Für

$$R_0 := K \setminus B^{-1}K, \quad R_j := B^{-j}R_0$$

und  $j \geq 0$  betrachte

$$g_j := \frac{1}{\lambda(R_j)} \int_{R_j} g(\omega) d\omega, \quad h_j := \frac{1}{\lambda(R_j)} \int_{R_j} h(\omega) d\omega .$$

Da  $g(B\omega) = g(\omega) + h(\omega)$  ist

$$\begin{aligned} g_{j+1} + h_{j+1} &= \frac{1}{\lambda(R_{j+1})} \int_{R_{j+1}} (B\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{\lambda(R_{j+1})} \int_{BR_{j+1}} \xi d\xi \\ &= \frac{1}{\lambda(R_j)} \int_{R_j} \xi d\xi \\ &= g_j . \end{aligned}$$

Da  $g \geq 0$  und  $h \geq 0$  ist  $g_j \geq 0$  und  $h_j \geq 0$ , und da für alle  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{j=1}^n h_j = \sum_{j=1}^n (g_{j-1} - g_j) = g_0 - g_n \leq g_0 ,$$

ist  $\lim_{j \rightarrow \infty} h_j = 0$ . Aus (3.84) folgt daher

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\lambda(R_j)} \int_{R_j} \frac{m(\omega - B^{-1}\rho_i)}{\|\omega\|^s} d\omega \right) = 0. \quad (3.85)$$

Nach der Taylor-Formel existiert ein Polynom  $P$ , so daß

$$m(\omega - B^{-1}\rho_i) = P(\omega) + Q(\omega)$$

mit  $Q(\omega) = o(\|\omega\|^s)$  gilt. Da

$$\frac{1}{\lambda(R_j)} \int_{R_j} \frac{|Q(\omega)|}{\|\omega\|^s} d\omega \rightarrow 0$$

gilt

$$\frac{1}{\lambda(R_j)} \int_{R_j} \frac{|P(\omega)|}{\|\omega\|^s} d\omega \rightarrow 0$$

und daher

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\varrho_A^{js}}{\lambda(R_0)} \int_{R_0} \frac{|P(B^{-j}\omega)|}{\|\omega\|^s} d\omega = 0.$$

Da

$$0 \leq C_1 \leq \|\omega\|^s \leq C_2 \quad \forall \omega \in R_0$$

ist dies äquivalent zu

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\varrho_A^{js}}{\lambda(R_0)} \int_{R_0} |P(B^{-j}\omega)| d\omega = 0. \quad (3.86)$$

Auf dem endlich-dimensionalen Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq N$  sind

$$\frac{1}{\lambda(R_0)} \int_{R_0} \|P\| \quad \text{und} \quad \sup_{\omega \in R_0} \|P(\omega)\|$$

zwei äquivalente Normen, und mit  $P$  ist auch  $P(B^{-j}\cdot)$  ein Polynom vom Grad  $\leq N$ . Aus (3.86) folgt also

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left( \varrho_A^{js} \sup_{\omega \in R_0} \|P(B^{-j}\omega)\| \right) = 0.$$

Da nach (3.80)

$$\varrho_A^{js} = \left( \frac{1}{\varrho_A^{-j}} \right)^s = \left\| \frac{\omega}{B^{-j}\omega} \right\|^s$$

ist dies nach Definition von  $R_0$  äquivalent zu

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in R_j} \frac{\|P(\omega)\|}{\|\omega\|^s} = 0 .$$

Somit ist also  $P(\omega) = o(\|\omega\|^s)$  und daher

$$\partial^\alpha P(0) = 0 \quad \text{für } |\alpha| \leq s .$$

Zusammen mit

$$\partial^\alpha R(0) = 0 \quad \text{für } |\alpha| \leq s$$

liefert dies die Behauptung. □ 

### Lemma 3.80

Erfüllt das Symbol  $m$  die Strang-Fix-Bedingungen der Ordnung  $r$ , so ist

$$F_f := \{g \in E_f; \partial^\alpha g(0) = 0 \quad \forall |\alpha| \leq r - 1\}$$

invariant unter  $T_m$ .

#### Beweis:

Da nach Definition

$$Tg(\omega) = \sum_{i=0}^{a-1} m(B^{-1}(\omega + \rho_i))g(B^{-1}(\omega + \rho_i)) ,$$

gilt für  $g \in F_f$  und  $|\alpha| \leq r - 1$  nach der Leibniz-Formel

$$\begin{aligned} \partial^\alpha (Tg)(0) &= \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta m(B^{-1}\rho_i) \partial^{\alpha-\beta} g(B^{-1}\rho_i) \\ &= \sum_{i=1}^{a-1} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta m(B^{-1}\rho_i) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

□

### Folgerung 3.81

Ist  $f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$  mit

$$\partial^\alpha f(0) = 0 \quad \forall |\alpha| \leq r - 1 ,$$

so ist  $F_f = E_f$ .

Der nun folgende Satz liefert die bereits angekündigte Umkehrung des Satzes 3.67.

**Satz 3.82**

Sei  $m$  das Symbol einer  $(h, A)$ -skalierbaren Funktion  $\phi$  mit folgenden Eigenschaften (vgl. Satz 3.78):

- (i)  $A$  ist isotrop:  $A$  ist diagonalisierbar und alle Eigenwerte von  $A$  haben den gleichen Betrag  $\varrho_A > 1$ .
- (ii)  $m \geq 0$  und  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\phi}(\cdot - k) = 1$ .
- (iii)  $m$  erfüllt die Strang-Fix-Bedingungen der Ordnung  $r$ .

Weiterhin sei  $f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$  mit  $\partial^\alpha f(0) = 0 \quad \forall |\alpha| \leq r - 1$ . Ist  $\varrho_f$  der Spektralradius von  $T|_{E_f}$  und ist  $\varrho_f < 1$ , so gilt:

$$\hat{\phi}(1 + |\cdot|)^s \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \Rightarrow \quad s < -\frac{\ln \varrho_f}{\ln \varrho_A} .$$

**Beweis:**

Da  $A$  isotrop existiert nach Lemma 3.103 eine zur euklid. Norm  $|\cdot|$  äquivalente Norm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{R}^n$  mit

$$\|B\omega\| = \varrho_A \|\omega\| .$$

Sei  $g \in E_f$  Eigenfunktion zum Eigenwert  $\lambda$  mit  $|\lambda| = \varrho_f$ . Da nach Folgerung 3.81  $E_f = F_f$ , ist  $g(\omega) = O(\|\omega\|^r)$  und nach Satz 3.78 ist  $s < r$ . Sei

$$q := \frac{g}{\|\cdot\|^s} ,$$

so gilt

$$\lim_{\|\omega\| \rightarrow \infty} q(\omega) = 0$$

und da

$$\lim_{\|\omega\| \rightarrow 0} q(\omega) = 0$$

ist  $q$  beschränkt. Für  $f = g$  folgt somit aus Lemma 3.69

$$\begin{aligned} \lambda^j \int_{\mathbb{T}^n} \|g\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\omega) g(B^{-j}\omega) \bar{g}(\omega) d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\omega) q(B^{-j}\omega) \|B^{-j}\omega\|^s \bar{g}(\omega) d\omega . \end{aligned}$$

Da  $\|B^{-j}\omega\| = \varrho_A^{-j}\|\omega\|$  folgt weiter

$$(\lambda\varrho_A^s)^j \int_{\mathbb{T}^n} \|f\|^2 \leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\omega) \|q(B^{-j}\omega)\| \|\omega\|^s d\omega. \quad (3.87)$$

Da  $\hat{\phi}\|\cdot\|^s \in L^1$  und  $q$  beschränkt sowie

$$\lim_{j \rightarrow \infty} q(B^{-j}\omega) = 0 \quad \text{punktweise,}$$

folgt aus dem Satz von Lebesgue, daß die rechte Seite in (3.87) gegen Null konvergiert. Also ist  $|\lambda\varrho_A^s| < 1$  und es folgt die Behauptung.  $\square$

Aus den Sätzen 3.67, 3.78 und 3.82 ergibt sich die nachstehende Folgerung.

**Folgerung 3.83**

Sei  $m$  das Symbol einer  $(h, A)$ -skalierbaren Funktion  $\phi$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $A$  ist isotrop:  $A$  ist diagonalisierbar und alle Eigenwerte von  $A$  haben den gleichen Betrag  $\varrho_A > 1$ .
- (ii)  $m \geq 0$  und  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\phi}(\cdot - k) = 1$ .
- (iii)  $m$  erfüllt die Strang-Fix-Bedingungen der Ordnung  $r$ .

Weiterhin sei  $f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^m)$  mit

- (iv)  $f \geq 0$  und  $f > 0$  in einer punktierten Umgebung des Nullpunkts.
- (v)  $\partial^\alpha f(0) = 0 \quad \forall |\alpha| \leq r - 1$ .

Ist  $\varrho_f$  der Spektralradius von  $T|_{E_f}$ , so gilt

$$\hat{\phi}(1 + |\cdot|)^s \in L^1 \quad \Leftrightarrow \quad s < -\frac{\ln \varrho_f}{\ln \varrho_A}.$$

## 3.6 Spezielle Konstruktionsverfahren

Skalierungsfunktionen sind mathematische Objekte, die zwar durch ihre Skalierungsmaske im wesentlichen eindeutig bestimmt sind (vgl. Satz 3.20), für die jedoch i.a. keine geschlossene Formel existiert, die nicht wie die Zwei-Skalen-Relation iterativen Charakter hat. Eine Ausnahme bildet z.B. die sinc-Funktion. Die Konstruktion von Skalierungsfunktionen nimmt daher

meist den Weg über die Konstruktion der Fourier-Transformierten, zumal diese auch für Regularitätsabschätzungen benötigt wird (vgl. Kapitel 3.5).

Es sind jedoch auch iterative Verfahren bekannt, mit deren Hilfe sich spezielle Skalierungsfunktionen ohne den beschriebenen Umweg über die Fourier-Transformierte direkt auf der Ortsseite konstruieren lassen. Der vorliegende Abschnitt untersucht zwei dieser speziellen Konstruktionsverfahren. Mit der im Paragraphen 3.6.1 beschriebenen Methode der *Iterativen Interpolation* nach Dubuc *et al.* lassen sich auf einem Ausgangsgitter gegebene interpolierende Skalierungsfunktionen auf sukzessive verfeinerte Gitter fortsetzen. Dieses Verfahren kann z.B. in der Computer-Graphik zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen eingesetzt werden.

Der nachfolgende Paragraph 3.6.2 stellt ein Verfahren zur Konstruktion mehrdimensionaler Skalierungsfunktionen vor, die charakteristische Funktion einer meßbaren Menge  $Q \subset \mathbb{R}^n$  sind. Es handelt sich somit um die Verallgemeinerung der Haar-Mehrfachauflösung, deren Skalierungsfunktion die charakteristische Funktion des Intervalls  $[0, 1]$  ist. Das Verfahren wurde 1992 von Gröchenig und Madych [GM92] entwickelt.

Der Paragraph 3.6.3 zeigt Verbindungen zwischen orthogonalen und interpolierenden Skalierungsfunktionen auf. Es handelt sich hierbei jedoch nicht wie in den beiden vorangegangenen Unterabschnitten um ein Konstruktionsverfahren auf der Ortsseite.

Der Paragraph 3.6.4 schließlich stellt ein iteratives Verfahren zur Konstruktion interpolierender Symbole vor.

### 3.6.1 Iterative Interpolation

In einer Reihe von in Zusammenarbeit mit verschiedenen anderen Autoren verfaßten Artikeln entwickelte S. Dubuc ein zunächst eindimensionales Verfahren zur Konstruktion *iterativ interpolierender Funktionen*, das schließlich von Deslaurier *et al.* [DDD91] auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinert wurde. Hierbei wird eine auf dem Ausgangsgitter  $\mathbb{Z}^n$  definierte Funktion mittels Interpolation gemäß einer interpolierenden Skalierungsmaske sukzessive auf die durch eine invertierbare Matrix  $A$  definierten, verfeinerten Gitter  $A^{-j}\mathbb{Z}^n$  fortgesetzt. Es stellt sich heraus, daß dieses Konstruktionsverfahren eng mit der Theorie der interpolierenden Skalierungsfunktionen verwandt ist.

Seien  $A$  eine invertierbare Matrix und  $h$  eine Wichtungsfunktion mit folgenden Eigenschaften:

- 1.)  $A\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{Z}^n$ ,
- 2.)  $h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$3.) \quad h(Ak) = \delta_{0,k} \quad k \in \mathbb{Z}^n ,$$

4.)  $\text{supp}(h_k)$  endlich.

Die Wichtungsfunktion besitzt also p.d. die Interpolationseigenschaft (3.29) der Skalierungsmaske einer interpolierenden Skalierungsfunktion.

Man definiert nun eine Folge von Gittern im  $\mathbb{R}^n$  durch

$$\begin{aligned} \Upsilon &:= \mathbb{Z}^n \\ \Upsilon_j &:= A^{-j}\Upsilon \quad j \in \mathbb{N} \\ \Upsilon_\infty &:= \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Upsilon_j , \end{aligned}$$

es gilt also

$$\Upsilon \subset \dots \subset \Upsilon_j \subset \dots \subset \Upsilon_\infty .$$

Mit  $X_j := \mathbb{C}^{\Upsilon_j}$  sei für  $j \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} T_j : X_{j-1} &\rightarrow X_j \\ g &\mapsto \sum_{k \in G} h(A^j \cdot -Ak)g(A^{-j+1}k) \end{aligned}$$

der lineare Operator, der eine Funktion  $g : \Upsilon_{j-1} \rightarrow \mathbb{C}$  auf  $\Upsilon_j$  fortsetzt. Ist  $f : \Upsilon \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben, so definiert man mittels

$$\begin{aligned} f_0 &:= T_0 f := f \\ f_j &:= T_j f_{j-1} \quad j \in \mathbb{N}^* \end{aligned} \tag{3.88}$$

eine Folge von Funktionen  $f_j : \Upsilon_j \rightarrow \mathbb{C}$ .

### Lemma 3.84

1.)  $f_j$  interpoliert  $f_{j-1}$ , allgemeiner gilt  $T_j g|_{\Upsilon_{j-1}} = g \quad \forall g \in X_{j-1}$ .

2.) Die Abbildung

$$\begin{aligned} T : X_0 &\rightarrow X_\infty \\ f &\mapsto f_\infty := \lim_{j \rightarrow \infty} f_j \end{aligned}$$

ist linear und für alle  $j \in \mathbb{N}$  ist  $Tf|_{\Upsilon_j} = f_j$ .

$Tf$  heißt **Iterative Interpolierende** von  $f$  bezüglich  $A$  und  $h$ .

3.)  $T$  kommutiert mit der Translation auf  $\Upsilon$ :

$$Tf(\cdot - l) = T(f(\cdot - l)) \quad \forall f \in X_0, \forall l \in \Upsilon .$$

4.)  $T$  ist homogen:

$$T(f_j(A^{-j}\cdot)) = (Tf)(A^{-j}\cdot) \quad \forall f \in X_0, \forall j \in \mathbb{N}.$$

**Beweis:**

Zu 1.) Sei  $x \in \Upsilon_{j-1}$ , also  $x = A^{-j+1}l$ ,  $l \in \mathbb{Z}^n$ . Dann ist wegen der Interpolationseigenschaft von  $h$

$$\begin{aligned} T_j g(x) &= \sum_{k \in \Upsilon} h(A^j x - Ak) g(A^{-j+1}k) \\ &= \sum_{k \in \Upsilon} h(A(l - k)) g(A^{-j+1}k) \\ &= g(A^{-j+1}l) = g(x). \end{aligned}$$

Zu 2.) Nach 1.) ist  $f_i|_{\Upsilon_j} = f_j = T_j f_{j-1} \quad \forall i > j$ , also existiert  $\lim f_j$  und es gilt  $Tf|_{\Upsilon_j} = f_j$ , und da die  $T_j$  linear sind, gilt dies auch für  $T$ .

Zu 3.) Nach 2.) ist  $Tf|_{\Upsilon_j} = f_j \quad \forall j \in \mathbb{N}$ , d.h. die Behauptung ist äquivalent zu  $f_j(\cdot - l) = T_j(f_{j-1}(\cdot - l)) \quad \forall j \in \mathbb{N}^*, \forall l \in \mathbb{Z}^n$ .

Nach Definition der  $f_j$  ist

$$\begin{aligned} f_j(\cdot - l) &= (T_j f_{j-1})(\cdot - l) \\ &= \sum_{k \in \Upsilon} h(A^j(\cdot - l) - Ak) f_{j-1}(A^{-j+1}k) \\ &= \sum_{k \in \Upsilon} h(A^j \cdot - \underbrace{A(A^{j-1}l + k)}_{=: k' \in \Upsilon}) f_{j-1}(A^{-j+1}k) \\ &= \sum_{k' \in \Upsilon} h(A^j \cdot - Ak') f_{j-1}(A^{-j+1}(k' - A^{j-1}l)) \\ &= \sum_{k' \in \Upsilon} h(A^j \cdot - Ak') f_{j-1}(A^{-j+1}k' - l) \\ &= T_j(f_{j-1}(\cdot - l)). \end{aligned}$$

Zu 4.) Da  $Tg|_{\Upsilon_i} = g_i$  ist zu zeigen:

$$T(f_j(A^{-j}\cdot))|_{\Upsilon_i} = (Tf|_{\Upsilon_{i+j}})(A^{-j}\cdot) = f_{i+j}(A^{-j}\cdot) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Beweis durch Induktion nach  $i$ .

$i = 0$ :

$$T(f_j(A^{-j}\cdot))|_{\Upsilon} = f_j(A^{-j}\cdot) = (Tf)|_{\Upsilon_j}(A^{-j}\cdot).$$

$i - 1 \rightarrow i$ :

$$T(f_j(A^{-j}\cdot))|_{\Upsilon_i} = (f_j(A^{-j}\cdot))_i = T_i(f_j(A^{-j}\cdot))_{i-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \in \Upsilon} h(A^i \cdot -Ak)(f_j(A^{-j} \cdot))_{i-1}(A^{-i+1}k) \\
&\stackrel{\text{Ind.-Vor.}}{=} \sum_{k \in \Upsilon} h(A^i \cdot -Ak)f_{i+j-1}(A^{-(i+j)+1}k) \\
&= \sum_{k \in \Upsilon} h(A^{(i+j)-j} \cdot -Ak)f_{i+j-1}(A^{-(i+j)+1}k) \\
&= f_{i+j}(A^{-j} \cdot) .
\end{aligned}$$

□

**Definition 3.85**

Sei  $\delta := \chi_{\{0\}} \in X_0$ , so heißt die Iterative Interpolierende  $\phi := T\delta$  von  $\delta$  die **Fundamentalinterpolierende Funktion** bezüglich  $h$  und  $A$ .

**Satz 3.86**

Sei  $h$  eine Wichtungsfunktion und  $A$  eine für  $\mathbb{Z}^n$  zulässige Dilatation. Dann hat die Fundamentalinterpolierende Funktion  $\phi$  bezüglich  $h$  und  $A$  folgende Eigenschaften:

- 1.)  $\text{supp } \phi|_{\Upsilon_j}$  ist endlich  $\forall j \in \mathbb{N}$ .
- 2.)  $\phi(A^{-1} \cdot)|_{\Upsilon} = h$ .
- 3.) Für alle  $f \in X_0$  ist

$$Tf = \sum_{k \in \Upsilon} f(k)\phi(\cdot - k) . \quad (3.89)$$

- 4.) Die Fundamentalinterpolierende Funktion  $\phi$  erfüllt die Zwei-Skalen-Relation

$$\phi = \sum_{k \in \Upsilon} h(k)\phi(A \cdot -k) .$$

**Beweis:**

Zu 1.) Nach Lemma 3.84 2.) ist  $\phi|_{\Upsilon_j} = T\delta|_{\Upsilon_j} = \delta_j = T_j\delta_{j-1}$  und nach Definition der  $T_j$  hat  $T_j f$  endlichen Träger, falls  $f$  endlichen Träger besitzt, vgl. auch Satz 3.64.

Zu 2.) Für  $l \in \Upsilon$  ist

$$\phi(A^{-1}l) = T\delta(A^{-1}l) = \delta_1(A^{-1}l) = \sum_{k \in \Upsilon} h(l - Ak)\delta_0(k) = h(l) .$$

Zu 3.) Jedes  $f \in X_0$  läßt sich in der Form

$$f = \sum_{k \in \Upsilon} f(k) \delta(\cdot - k)$$

darstellen. Nach Lemma 3.84 ist  $T$  linear und kommutiert mit der Translation auf  $\Upsilon$ . Da die Summe in (3.89) nach 1.) stets endlich ist, gilt also

$$\begin{aligned} Tf &= \sum_{k \in \Upsilon} f(k) T(\delta(\cdot - k)) \\ &= \sum_{k \in \Upsilon} f(k) (T\delta)(\cdot - k) \\ &= \sum_{k \in \Upsilon} f(k) \phi(\cdot - k). \end{aligned}$$

Zu 4.) Nach Lemma 3.84 4.) ist  $\phi(A^{-1}\cdot) = (T\delta)(A^{-1}\cdot) = T(\delta_1(A^{-1}\cdot))$ . Nach 3.) ist  $T(\delta_1(A^{-1}\cdot)) = \sum_{k \in \Upsilon} \delta_1(A^{-1}k) \phi(\cdot - k)$  und nach 2.) ist schließlich  $\delta_1(A^{-1}k) = h(k)$ . Insgesamt folgt

$$\phi(A^{-1}\cdot) = \sum_{k \in \Upsilon} h(k) \phi(\cdot - k)$$

und dies ist äquivalent zur Behauptung. □

### Lemma 3.87

Sei  $S := \text{supp } h$ , so ist für alle  $j \in \mathbb{N}$

$$\text{supp } \phi(A^{-1}\cdot)|_{\Upsilon_j} \subseteq \sum_{i=0}^j A^{-i} S.$$

**Beweis:** durch Induktion nach  $j$ .

$j = 0$ : Nach Satz 3.86 Punkt 2.) ist  $\phi(A^{-1}\cdot)|_{\Upsilon} = h$ .

$j - 1 \rightarrow j$ : Unter Anwendung von Punkt 2.) des Lemmas 3.84 folgt

$$\begin{aligned} \phi(A^{-1}\cdot)|_{\Upsilon_j} &= (T\delta)(A^{-1}\cdot)|_{\Upsilon_j} \\ &= \delta_j(A^{-1}\cdot) = T_j \delta_{j-1}(A^{-1}\cdot) \end{aligned}$$

und nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\begin{aligned} \text{supp } \phi(A^{-1}\cdot)|_{\Upsilon_{j-1}} &= \text{supp } T\delta(A^{-1}\cdot)|_{\Upsilon_{j-1}} \\ &\subseteq \sum_{i=0}^{j-1} A^{-i} S. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\delta_j(A^{-1}\cdot) = \sum_{k \in \Upsilon} h(A^{j-1}\cdot - Ak) \delta_{j-1}(A^{-j+1}k)$$

und

$$h(A^{j-1}x - Ak) = 0 \quad \text{für } A^{j-1}x - Ak \notin S$$

sowie nach Induktionsvoraussetzung

$$\delta_{j-1}(A^{-j+1}k) = 0 \quad \text{für } A^{-j+2}k \notin \sum_{i=0}^{j-1} A^{-i}S.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} A^{j-1}x - Ak \notin S &\Leftrightarrow x - A^{-j+2}k \notin A^{-j}S \\ &\Leftrightarrow x \notin A^{-j}S + \sum_{i=0}^{j-1} A^{-i}S \\ &\Leftrightarrow x \notin \sum_{i=0}^j A^{-i}S. \end{aligned}$$

□

Das beschriebene Konstruktionsverfahren, auch als *stationary subdivision scheme* bezeichnet, kann insbesondere in der Computer-Graphik zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen eingesetzt werden. Es läßt sich effizient implementieren, da aufgrund der Eigenschaft 2.) aus Lemma 3.84 einmal berechnete Daten nicht mehr verändert, sondern interpoliert werden. Eine auf diese Weise konstruierte Funktion ist jedoch nach wie vor diskret, ihr Definitionsbereich ist das Gitter  $\Upsilon_\infty$ . Lediglich unter den bereits aus Satz 3.20 bekannten zusätzlichen Voraussetzungen  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h_k = 1$  und  $A$  expandierend läßt sie sich zu einer Distribution  $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  fortsetzen. Diese ist dann durch die Produktdarstellung (3.19) für  $\hat{\phi}$  gegeben.

### 3.6.2 Verallgemeinerte Haar-Basen im $\mathbb{R}^n$

Bereits 1910 erkannte A. Haar, daß die Funktionen

$$\psi_{j,k} := 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j} \cdot -k) \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

mit

$$\psi := \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Orthonormalbasis des  $L^2(\mathbb{R})$  bilden. Die Funktion  $\psi$  heißt daher auch **Haar-Funktion**. Es handelt sich um das Mother-Wavelet der Haar-Mehrfachauflösung, deren zugehörige Skalierungsfunktion  $\phi$  die charakteristische Funktion des Einheitsintervalls ist (siehe z.B. Daubechies [Dau92, §1.3.3]):  $\phi = \chi_{[0,1]}$  mit der Zwei-Skalen-Relation  $\phi = \phi(2\cdot) + \phi(2\cdot - 1)$ . Die Räume  $\mathcal{V}_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  der Haar-Mehrfachauflösung sind durch

$$\mathcal{V}_j := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}); f|_{[k2^j, (k+1)2^j]} = \text{const}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

gegeben. Die Verallgemeinerung der Haar-Basis auf höhere Dimensionen durch Gröchenig und Madych [GM92] offenbarte interessante Beziehungen zur Theorie der selbstaffinen Mengen (siehe hierzu den Anhang 2.C zu Kapitel 2). Ziel war es, Mehrfachauflösungen des  $L^2(\mathbb{R}^n)$  zu konstruieren, deren Skalierungsfunktionen charakteristische Funktionen von meßbaren Mengen  $Q \subset \mathbb{R}^n$  sind. Weitere Erkenntnisse in diesem Zusammenhang lieferten 1994 Lagarias und Wang [LW96a]. Der vorliegende Paragraph skizziert diesen Konstruktionsweg und analysiert Verbindungen zu den interpolierenden Skalierungsfunktionen.

Es gelten die Bezeichnungen aus Abschnitt 2.C, insbesondere sei  $A$  eine für  $\mathbb{Z}^n$  zulässige Dilatationsmatrix mit  $|\det A| = a$  und  $\mathcal{R} = \{\kappa_0, \dots, \kappa_{a-1}\}$  ein Repräsentantensystem für  $\mathbb{Z}^n / A\mathbb{Z}^n$ .

### Lemma 3.88

Sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  meßbar mit (vgl. Bezeichnung 2.54)

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} (Q + k) \simeq \mathbb{R}^n .$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1.)  $Q \cap (Q + k) \simeq \emptyset$  für  $k \in \mathbb{Z}^n$ ,  $k \neq 0$ .
- 2.)  $\lambda(Q) = 1$ .

Zusammen mit der Voraussetzung bedeutet 1.) nach Definition 2.57, daß  $Q$  eine  $\mathbb{Z}^n$ -Kachel ist. Zum Beweis dieses Lemmas vgl. den Beweis von Lemma 2.27.

### Satz 3.89 (Gröchenig/Madych)

Sei  $\chi_Q$  die charakteristische Funktion einer  $L$ -meßbaren Menge  $Q \subset \mathbb{R}^n$  und  $c := \lambda(Q)^{-\frac{1}{2}}$ . Ist  $\phi := c \cdot \chi_Q$  Skalierungsfunktion einer Mehrfachauflösung bezüglich  $A$  mit  $|\det A| = a$ , so hat  $Q$  folgende Eigenschaften:

- 1.) Es existiert ein Repräsentantensystem  $\mathcal{R} = \{\kappa_0, \dots, \kappa_{a-1}\}$  von  $\mathbb{Z}^n/A\mathbb{Z}^n$ , für das  $Q = Q(A, \mathcal{R})$  ganzzahlig selbstaffin ist.
- 2.)  $Q$  ist  $\mathbb{Z}^n$ -Kachel.
- 3.) Es existiert ein Kompaktum  $K \subset \mathbb{R}^n$  mit  $Q \simeq K$ .

Umgekehrt gilt: Besitzt eine beschränkte, meßbare Menge  $Q \subset \mathbb{R}^n$  die Eigenschaften 1.) und 2.), so ist  $\chi_Q$  Skalierungsfunktion einer zu  $(\mathbb{Z}^n, A)$  gehörenden Mehrfachauflösung.

### Bemerkung 3.90

- 1.) Lagarias und Wang [LW96a, Th. 1.1] haben gezeigt, daß für eine ganzzahlig selbstaffine Menge  $Q = Q(A, \mathcal{R})$ , die gleichzeitig  $\mathbb{Z}^n$ -Kachel ist, die Ziffernmengemenge  $\mathcal{R}$  ein Repräsentantensystem von  $\mathbb{Z}^n/A\mathbb{Z}^n$  sein muß.
- 2.) Nach Lemma 3.88 gilt für eine Menge  $Q$  mit den Eigenschaften aus Satz 3.89 notwendigerweise  $\lambda(Q) = 1$ .
- 3.) Besitzt  $Q$  die Eigenschaften aus Satz 3.89, so existiert ein Fundamentalbereich  $P$  des Gitters  $\mathbb{Z}^n$  mit  $P \simeq Q$  (zum Begriff *Fundamentalbereich* siehe Definition 2.44).

#### Beweis hierfür:

Nach Satz 3.89 existiert ein Kompaktum  $K$  mit  $K \simeq Q$ .

Da  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} K + k$  lokal endlich, ist  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} K + k$  abgeschlossen, aus

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} K + k \simeq \mathbb{R}^n$$

folgt also

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} K + k = \mathbb{R}^n . \quad (3.90)$$

Sei  $\mathbb{Z}^n$  linear geordnet (z.B. lexikographisch) und

$$P := K \setminus \bigcup_{k > 0} K + k .$$

Ist  $l \neq l'$ , o.B.d.A.  $l' > l$ , so ist einerseits  $P + l' \subset K + l'$  und andererseits

$$P + l \subset \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k > l} K + k \subset \mathbb{R}^n \setminus K + l' .$$

Also ist  $P + l' \cap P + l = \emptyset$ . Mit (3.90) und da  $K$  beschränkt, existiert zu jedem  $x \in \mathbb{R}^n$  ein maximales  $l$  mit  $x \in K + l$ . Somit ist

$$x \in K + l \setminus \bigcup_{k > l} K + k = P + l .$$

□

Die charakteristische Funktion  $\chi_Q$  einer meßbaren Menge  $Q \subset \mathbb{R}^n$  kann also nur dann Skalierungsfunktion einer zu  $(\mathbb{Z}^n, A)$  gehörenden Mehrfachauflösung sein, wenn  $Q = Q(A, \mathcal{R})$  eine ganzzahlig selbstaffine  $\mathbb{Z}^n$ -Kachel ist. In diesem Fall gilt für  $\phi$  fast überall die Zwei-Skalen-Relation

$$\phi = \sum_{\kappa \in \mathcal{R}} \phi(A \cdot -\kappa) , \quad (3.91)$$

denn es ist

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa \in \mathcal{R}} \phi(A \cdot -\kappa) &= \sum_{\kappa \in \mathcal{R}} \chi_Q(A \cdot -\kappa) \\ &= \sum_{\kappa \in \mathcal{R}} \chi_{A^{-1}(Q+\kappa)} . \end{aligned}$$

$Q$  ist  $\mathbb{Z}^n$ -Kachel, daher sind die  $A^{-1}(Q+\kappa)$ ,  $\kappa \in \mathcal{R}$  paarweise quasi-disjunkt. Da  $Q$  selbstaffin ist

$$Q = \bigcup_{\kappa \in \mathcal{R}} A^{-1}(Q + \kappa)$$

und somit gilt fast überall

$$\sum_{\kappa \in \mathcal{R}} \chi_{A^{-1}(Q+\kappa)} = \chi_{\bigcup_{\kappa \in \mathcal{R}} A^{-1}(Q+\kappa)} = \chi_Q .$$

Ein Vergleich von (3.91) mit (3.16) liefert für die Skalierungsmaske  $(h_k)$

$$h_k = \begin{cases} \frac{1}{a}, & k \in \mathcal{R} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} . \quad (3.92)$$

Man kann ohne Einschränkung  $0 \in \mathcal{R}$  annehmen (siehe Anhang 2.C). Dann ist  $\kappa \notin A\mathbb{Z}^n$  für  $0 \neq \kappa \in \mathcal{R}$ , also  $h_{Ak} = \frac{\delta_{0,k}}{a}$  und somit erfüllt die Skalierungsmaske die Interpolationsbedingung (3.29). Als charakteristische Funktion der Menge  $Q$  ist  $\phi$  jedoch nicht stetig, und demnach auch nicht interpolierend.

Die Lösung  $\phi = \chi_Q$  der Funktionalgleichung (3.91) ist Fixpunkt der Abbildung

$$f \mapsto \sum_{\kappa \in \mathcal{R}} f(A \cdot -\kappa),$$

wobei  $\mathcal{R}$  ein Repräsentantensystem von  $\mathbb{Z}^n / A\mathbb{Z}^n$  ist. Man verwendet daher die Fixpunktiteration

$$\phi_{j+1} = \sum_{\kappa \in \mathcal{R}} \phi_j(A \cdot -\kappa) \quad j \in \mathbb{N} \quad (3.93)$$

zur Bestimmung dieser Lösung. Als Startwert wählt man eine Funktion  $\phi_0$ , die – wie der gesuchte Fixpunkt – charakteristische Funktion einer  $\mathbb{Z}^n$ -Kachel ist.

Sei also  $Q_0$  eine  $\mathbb{Z}^n$ -Kachel,  $\phi_0 := \chi_{Q_0}$  und  $\mathcal{R}$  ein Repräsentantensystem von  $\mathbb{Z}^n / A\mathbb{Z}^n$ . Dann liefert der erste Iterationsschritt gemäß (3.93) die Funktion

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \sum_{\kappa \in \mathcal{R}} \chi_{Q_0}(A \cdot -\kappa) \\ &= \sum_{\kappa \in \mathcal{R}} \chi_{A^{-1}(Q_0 + \kappa)}. \end{aligned}$$

Da die  $A^{-1}(Q_0 + \kappa)$ ,  $\kappa \in \mathcal{R}$  quasi-disjunkt sind, ist  $\phi_1$  die charakteristische Funktion der Menge

$$Q_1 = \bigcup_{\kappa \in \mathcal{R}} A^{-1}(Q_0 + \kappa)$$

und wegen  $\lambda(Q_0) = 1$  ist

$$\lambda(Q_1) = a |\det A^{-1}| \lambda(Q_0) = |\det A| \frac{1}{|\det A|} = 1.$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} A \left( \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} Q_1 + k \right) &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} \bigcup_{\kappa \in \mathcal{R}} (Q_0 + \kappa) + Ak \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} Q_0 + k \simeq \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

denn es gilt

$$\bigcup_{\kappa \in \mathcal{R}} (\kappa + A\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$$

und  $Q_0$  ist  $\mathbb{Z}^n$ -Kachel. Da  $A^{-1}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$  ist somit nach Lemma 3.88 auch  $Q_1$   $\mathbb{Z}^n$ -Kachel. Induktiv folgt, daß  $\phi_{j+1}$  die charakteristische Funktion der Menge  $Q_{j+1}$  mit

$$Q_{j+1} = \bigcup_{\kappa \in \mathcal{R}} A^{-1}(Q_j + \kappa) \quad (3.94)$$

ist. (3.94) hat die Form eines Iterierten Funktionensystems (vgl. Punkt 2.) in Bemerkung 2.56) und dessen Attraktor  $Q$  hat nach Satz 2.59 positives Maß, da  $A$  ganzzahlig und  $\mathcal{R}$  ein Repräsentantensystem von  $\mathbb{Z}^n/A\mathbb{Z}^n$  ist.  $Q$  ist eine ganzzahlig selbstaffine  $\mathbb{Z}^n$ -Kachel und somit ist nach Satz 3.89  $\chi_Q$  Skalierungsfunktion einer Mehrfachauflösung zu  $(\mathbb{Z}^n, A)$ . Nach Satz 3.20 ist  $\phi$  bis auf einen Normierungsfaktor eindeutig bestimmt. Man wählt daher  $c = \lambda(Q)^{\frac{1}{2}} = 1$ , so daß  $\|\phi\|_2 = 1$  ist.

Somit ergibt sich zur Konstruktion folgender Algorithmus.

### Algorithmus 3.91

- 1.) Wähle  $Q_0$  kompakt,  $\mathcal{R}$  Repräsentantensystem von  $\mathbb{Z}^n/A\mathbb{Z}^n$ .
- 2.) Bestimme  $Q$  als Attraktor des IFS (3.94). Dann ist  $\lambda(Q) \geq 1$ .
- 3.) Ist  $\lambda(Q) = 1$ , so ist  $\phi = \chi_Q$  Skalierungsfunktion einer zu  $(\mathbb{Z}^n, A)$  gehörenden Mehrfachauflösung.

Um hinreichende Bedingungen angeben zu können, unter denen der Algorithmus 3.91 eine Skalierungsfunktion liefert, verwenden Gröchenig und Madych die Radix-Darstellung (2.51) der Menge  $Q$ . Weiterhin wird die Folge von Maßen

$$\mu_j = \sum_{\kappa \in \mathcal{R}} \delta_{-A^{-j}\kappa} \quad j \in \mathbb{N}^*$$

mit  $\nu_{j+1} = \mu_{j+1} * \nu_j$  und  $\nu_1 = \mu_1$  benötigt.

### Satz 3.92

Sei  $\mathcal{R}$  ein Repräsentantensystem von  $\mathbb{Z}^n/A\mathbb{Z}^n$  und  $Q$  die Menge aus (2.51), d.h. die durch  $A$  und  $\mathcal{R}$  definierte selbstaffine Menge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- 1.)  $\chi_Q$  ist Erzeuger einer zu  $(\mathbb{Z}^n, A)$  gehörenden Mehrfachauflösung.
- 2.)  $\lambda(Q) = 1$
- 3.)  $Q \cap (Q + k) \simeq \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n, k \neq 0$ .
- 4.) Für alle beschränkten Funktionen  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\nu_j(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \chi_Q(x) dx .$$

- 5.) Ist  $\{Q_j; j \in \mathbb{N}\}$  mit  $Q_0 = [0, 1]^n$  die durch (3.94) definierte Folge von Mengen, so konvergiert die Folge der charakteristischen Funktionen  $\{\chi_{Q_j}\}$  gegen  $\chi_Q$ .

- 6.) Die Fourier-Transformierte von  $\mu_1$ ,  $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e_k(B^{-1}\cdot)$ , i.e. das Symbol der Maske  $(h_k)$ , vgl. (3.92), erfüllt das Cohen-Kriterium 3.33: Es existiert eine kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$ , die eine Umgebung des Ursprungs enthält, eine  $\mathbb{Z}^n$ -Kachel ist und für die gilt:

$$|\hat{\mu}_1(B^{-j}\xi)| > 0 \quad \forall \xi \in K, j \geq 1.$$

### Bemerkung 3.93

Ist  $\chi_Q$  skalierbar, so ist auch die Faltung von  $\chi_Q$  mit sich wieder skalierbar, vgl. den folgenden Paragraphen 3.6.3.

$$\phi_N := \underbrace{\chi_Q * \dots * \chi_Q}_{N\text{-mal}}$$

heißt **verallgemeinerter kardinaler B-Spline** und ist wiederum Erzeuger einer Mehrfachauflösung.

### 3.6.3 Autokorrelationsfunktionen

Es besteht ein Zusammenhang zwischen orthogonalen und interpolierenden Skalierungsfunktionen, auf den auch Daubechies [Dau92, S. 210] bereits hinweist. Aus einer orthogonalen läßt sich stets eine interpolierende Skalierungsfunktion konstruieren, indem man die *Autokorrelationsfunktion* betrachtet. Zwar ist in höheren Dimensionen eine orthogonale Skalierungsfunktion nicht leicht zugänglich, das Verfahren läßt sich jedoch auch auf biorthogonale Skalierungsfunktionen anwenden.

Saito/Beylkin [SB93] verwenden die Autokorrelationsfunktionen der Daubechies-Wavelets [Dau88] zur Rekonstruktion von Signalen aus zero-crossings. Lawton *et al.* [LLS97] leiten mit Hilfe des zur Autokorrelationsmaske gehörenden Übergangsoperators ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Stabilität einer Skalierungsfunktion ab (vgl. Satz 3.70).

#### Definition 3.94

Sei  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$   $(h, A)$ -skalierbar mit  $(h_k) \in \ell^1(\mathbb{Z}^n)$ . Dann heißt

$$\Phi := (\phi * \bar{\phi}) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi) \bar{\phi}(\xi - \cdot) d\xi \quad (3.95)$$

die **Autokorrelationsfunktion** von  $\phi$ .

Ist  $\phi \in L^2$ , so ist  $\Phi \in L^\infty$ . Ist außerdem  $\text{supp } \phi$  kompakt, so ist  $\phi \in L^1$  und daher  $\Phi \in L^1 \cap L^2$ .

**Lemma 3.95**

Sei  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  Skalierungsfunktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- 1.)  $\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}^n\}$  ist ein Orthonormalsystem.
- 2.) Die Autokorrelationsfunktion  $\Phi$  von  $\phi$  ist interpolierend.

**Beweis:**

Es ist

$$\langle \phi | \phi(\cdot - k) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi) \bar{\phi}(\xi - k) d\xi = \Phi(k)$$

und  $\Phi$  ist stetig, denn mit  $\phi \in L^2$  ist  $|\hat{\phi}|^2 \in L^1$  und

$$\hat{\Phi} = \hat{\phi} \hat{\bar{\phi}} = \hat{\phi} \check{\bar{\phi}} = \hat{\phi} \bar{\check{\phi}} = |\hat{\phi}|^2 .$$

□

**Lemma 3.96**

Ist  $\phi$   $(h, A)$ -skalierbar mit  $(h_k) \in \ell^1(\mathbb{Z}^n)$ , so ist  $\Phi$   $(g, A)$ -skalierbar mit

$$g_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} h_l \bar{h}_{l-k} .$$

**Beweis:**

Ist  $\phi$   $(h, A)$ -skalierbar, so gilt  $\hat{\phi} = m(B^{-1} \cdot) \hat{\phi}(B^{-1} \cdot)$ . Daher ist

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} &= \hat{\phi} \hat{\bar{\phi}} \\ &= (m \bar{m})(B^{-1} \cdot) (\hat{\phi} \hat{\bar{\phi}})(B^{-1} \cdot) \\ &= (\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n}(h) \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n}(\bar{h}))(B^{-1} \cdot) (\phi * \bar{\phi})^\wedge(B^{-1} \cdot) \\ &= (h * \bar{h})^\wedge(B^{-1} \cdot) \hat{\Phi}(B^{-1} \cdot) \end{aligned}$$

und somit gilt

$$\Phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} g_k \Phi(A \cdot - k)$$

mit

$$g_k = (h * \bar{h})(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} h_l \bar{h}_{l-k} .$$

□

Die Autokorrelationsfunktion bildet einen Spezialfall der bereits in Folgerung 3.43 festgehaltenen Tatsache, daß das Produkt der Symbole  $m$  und  $\bar{m}$  zweier biorthogonaler Skalierungsfunktionen  $\phi$  und  $\bar{\phi}$  interpolierend ist.

### 3.6.4 Iteration von Symbolen

Ein wesentlicher Vorteil des in Paragraph 3.3.2 vorgestellten Konstruktionsverfahrens von Daubechies für eindimensionale Skalierungsfunktionen mit kompaktem Träger ist die Tatsache, daß sich die Regularität der konstruierten Funktionen – natürlich auf Kosten der Größe des Trägers – theoretisch beliebig erhöhen läßt: Man faltet die konstruierte Funktion beliebig oft mit dem  $B$ -Spline  $B_0$ . Für das Symbol entspricht dies der Erhöhung des Exponenten des Exponentialterms in (3.41), vgl. Beispiel 3.16.

Im vorliegenden Paragraphen soll ein Verfahren vorgestellt werden, mit dem sich auch im mehrdimensionalen Fall iterativ Skalierungsfunktionen mit höherer Regularität gewinnen lassen. Es setzt auf der im Paragraph 3.3.3 diskutierten Konstruktion zweier biorthogonaler Mehrfachauflösungen auf. Von besonderer Bedeutung sind in diesem Zusammenhang interpolierende Skalierungsfunktionen bzw. deren Symbole. Das Verfahren wurde von Ji *et al.* [JRS99] vorgestellt. Das dort diskutierte allgemeine Verfahren hat im speziellen Fall einer Dilatationsmatrix mit Determinante  $a = 2$  eine besonders einfache Form. Wir beschränken uns im folgenden auf diesen Spezialfall.

Für das Verfahren wird zunächst das Bezout-Theorem benötigt, das auch bei Daubechies bereits Verwendung findet.

#### Satz 3.97 (Bezout)

Es seien  $Q_1$  und  $Q_2$  zwei Polynome vom Grade  $n_1$  bzw.  $n_2$  ohne gemeinsame Nullstelle. Dann existieren zwei eindeutig bestimmte Polynome  $P_1$  und  $P_2$  vom Grade  $n_2 - 1$  bzw.  $n_1 - 1$  mit

$$P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = 1 .$$

#### Korollar 3.98

Sei  $Q_1(y) = (1 - y)^N$ ,  $Q_2(y) = y^N$ , so existiert ein Polynom  $P_N$  vom Grad  $N - 1$  mit

$$(1 - y)^N P_N(y) + y^N P_N(1 - y) = 1 , \quad (3.96)$$

wobei

$$P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} y^k .$$

Es ist  $P_N(y) \geq 0$  für  $y \in [0, 1]$  und  $P_N(y)$  ist das Polynom vom kleinsten Grade, für das (3.96) gilt.

**Bemerkung 3.99**

Seien  $m_1, m_2$  Symbole zu Skalierungsfunktionen  $\phi_1, \phi_2$  und

$$\hat{\phi} := \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 = \prod_{j=1}^{\infty} (m_1 m_2)(B^{-j} \cdot) .$$

Gilt

$$\hat{\phi}_1(1 + |\cdot|)^s \in L^1$$

(z.B. mit der Littlewood-Paley Methode aus Satz 3.67) und

$$|\hat{\phi}_2| \leq C(1 + |\cdot|)^r$$

(z.B. mit der Brute-Force Methode aus Satz 3.61), so ist

$$\hat{\phi}(1 + |\cdot|)^{s-r} \in L^1 ,$$

denn

$$\hat{\phi}(1 + |\cdot|)^{s-r} = \hat{\phi}_1(1 + |\cdot|)^s \hat{\phi}_2(1 + |\cdot|)^{-r} .$$

Sei  $A$  Dilatationsmatrix mit Determinante  $a = 2$  und das Symbol  $m$  erfülle die Interpolationsbedingung (3.30), es gelte also

$$m + m(\cdot + B^{-1}\rho_1) = 1 .$$

Sei  $P_N(y)$  die eindeutige Lösung kleinsten Grades von (3.96), so liefert Einsetzen von  $m$  in (3.96) (das Bezout-Theorem gilt allgemein in graduierten Ringen)

$$(1 - m)^N P_N(m) + m^N P_N(1 - m) = 1 . \quad (3.97)$$

Sei

$$\begin{aligned} m^{(N)} &:= m^N P_N(1 - m) \\ \tilde{m}^{(N-1)} &:= m^{N-1} P_N(1 - m) , \end{aligned} \quad (3.98)$$

so ist  $m^{(N)}$  wiederum interpolierendes Symbol, denn mit (3.97) gilt

$$\begin{aligned} &m^{(N)} + m^{(N)}(\cdot + B^{-1}\rho_1) \\ &= m^N P_N(1 - m) + m^N P_N(1 - m)(\cdot + B^{-1}\rho_1) \\ &= m^N P_N(1 - m) + (1 - m)^N P_N(m) \\ &= 1 . \end{aligned}$$

Weiterhin ist  $\tilde{m}^{(N-1)}$  duales Symbol zu  $m$ , vgl. (3.47), denn nach Konstruktion ist

$$\tilde{m} \tilde{m}^{(N-1)} + \tilde{m} \tilde{m}^{(N-1)}(\cdot + B^{-1}\rho_1) = 1 .$$

Die Symbole erfüllen also die nach Folgerung 3.43 notwendige Voraussetzung zur Konstruktion biorthogonaler Mehrfachauflösungen, vgl. (3.47).

Zur Konstruktion neuer interpolierender Symbole ergeben sich nunmehr zwei Möglichkeiten: Man kann entweder den Exponenten  $N$  von  $m$  in (3.98) erhöhen oder das beschriebene Iterationsverfahren anwenden. Bei Erhöhung des Exponenten  $N$  wird das auftretende Polynom  $P_N$  jedoch sehr schnell kompliziert. Es ist daher günstiger, mit einem niedrigen Exponenten von  $m$  zu starten und dann das Iterationsverfahren zu verwenden. Ji *et al.* haben gezeigt, daß sich auf diese Weise unter der Bedingung, daß die zum Symbol  $m$  gehörende Skalierungsfunktion hinreichend glatt ist, tatsächlich Symbole zu Skalierungsfunktionen mit höherer Regularität konstruieren lassen.

### 3.A Der Spektralradius

In diesem Abschnitt sind einige Resultate zum Spektralradius zusammengestellt, die hauptsächlich im Zusammenhang der Regularitätsabschätzungen für Skalierungsfunktionen im Abschnitt 3.5 gebraucht werden. Als Referenz diente Zeidler [Zei86, S. 795].

#### Definition 3.100

Eine Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  heißt **isotrop**, falls  $A$  diagonalisierbar ist und alle Eigenwerte von  $A$  den gleichen Betrag haben. Anderenfalls heißt  $A$  **anisotrop**.

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

z.B. ist isotrop, denn die beiden Eigenwerte  $\lambda_1 = a + ib$  und  $\lambda_2 = a - ib$  haben stets den gleichen Betrag.

Offensichtlich ist  $A$  isotrop genau dann, wenn  $A^T$  isotrop.

#### Definition 3.101

Sei  $X$  ein komplexer Banach-Raum und  $\mathcal{L}(X, X)$  der Raum der stetigen linearen Abbildungen von  $X$  in sich und  $A \in \mathcal{L}(X, X)$ . Dann heißt die Menge der  $\lambda \in \mathbb{C}$ , für die

$$(\lambda \text{id} - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$$

ist, die **Resolventen-Menge**  $\rho(A)$  und für  $\lambda \in \rho(A)$  heißt

$$(\lambda \text{id} - A)^{-1}$$

**Resolvente** von  $A$ . Das Komplement

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

heißt **Spektrum** von  $A$ .

$$\varrho_A := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

heißt **Spektralradius** von  $A$ .

#### Lemma 3.102

Sei  $A \in \mathcal{L}(X, X)$ . Dann gilt:

- 1.)  $\sigma(A)$  ist nicht-leer und kompakt.

2.) Es gilt  $\varrho_A \leq \|A\|$  und

$$\varrho_A = \lim_{j \rightarrow \infty} \|A^j\|^{\frac{1}{j}}. \quad (3.99)$$

3.) Ist  $\varrho_A < 1$ , so existiert  $(id - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$  und es gilt

$$(id - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j id.$$

Diese Reihe wird als **Neumann-Reihe** bezeichnet.

4.) Für alle  $\varepsilon > 0$  existiert eine Norm  $\|\cdot\|_\varepsilon$  auf  $X$ , so daß für die zugehörige Operatornorm gilt

$$\begin{aligned} \varrho_A &\leq \|A\|_\varepsilon \leq \varrho_A + \varepsilon, \\ \|x\|_\varepsilon &:= \sup_{j \in \mathbb{N}} (\varrho_A + \varepsilon)^{-j} \|A^j x\|. \end{aligned}$$

Die Operator-Norm  $\|A\|_\varepsilon$  liefert gleichzeitig eine äquivalente Norm auf  $\mathcal{L}(X, X)$ .

### Lemma 3.103

- 1.) Ist  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine diagonalisierbare Matrix, so existiert eine Norm auf  $X$ , so daß für die Operatornorm aus Lemma 3.102 4.)  $\|A\| = \rho_A$  gilt.
- 2.) Ist  $A$  isotrop, so ist

$$\|Ax\| = \rho_A \|x\| \quad \forall x \in X.$$

### Folgerung 3.104

- 1.) Ist  $A$  invertierbar und  $0 < \lambda < \frac{1}{\rho_{A^{-1}}}$ , so existiert eine Norm auf  $X$  mit

$$\|A^{-j}x\| \leq \lambda^{-j} \|x\| \quad \forall j \in \mathbb{N}, x \in X.$$

- 2.) Ist  $A$  diagonalisierbar, so kann

$$\lambda = \frac{1}{\rho_{A^{-1}}} = \frac{1}{|\lambda_{\min}|}$$

gewählt werden, wobei  $\lambda_{\min}$  der betragsmäßig kleinste Eigenwert von  $A$  ist.

- 3.) Ist  $A$  isotrop, so gilt

$$\|A^{-j}x\| \leq \lambda^{-j} \|x\| \quad \forall x \in X.$$



# KAPITEL 4

---

## Zusammenfassung und Ausblick

### 4.1 Zusammenfassung

Trotz der überaus zahlreichen Literatur zur Theorie der Skalierungsfunktionen und Wavelets fehlt bislang eine zusammenhängende und umfassende Darstellung des mehrdimensionalen Falles. Ziel dieser Arbeit war es daher, die Theorie der mehrdimensionalen Skalierungsfunktionen zu beleuchten und – motiviert durch das Beispiel der sinc-Funktion – insbesondere die interpolierenden Skalierungsfunktionen im Zusammenhang mit der Sampling-Theorie zu untersuchen.

Sowohl für die Betrachtungen zur Sampling-Theorie als auch im Kontext der Skalierungsfunktionen ist eine genaue Kenntnis der Fourier-Transformation unabdingbar. *Bandbeschränktheit*, *Aliasing*, *Stabilität* und *Regularität* sind nur einige der Begriffe, die direkt oder indirekt auf der Fourier-Transformation aufsetzen. Besondere Bedeutung kommt den Paley-Wiener Sätzen zu, die die Fourier-Transformierten von Funktionen und Distributionen mit kompaktem Träger charakterisieren, sowie der Poisson-Formel als Bindeglied zwischen der Fourier-Transformation auf  $\mathbb{R}^n$  und jener auf dem Torus. Daher wurde zunächst die mehrdimensionale Theorie der Fourier-Transformation zusammengestellt.

Um Zusammenhänge zwischen der Sampling-Theorie und den (interpolierenden) Skalierungsfunktionen erkennen zu können, ist sodann eine Übersicht über das Themengebiet *Sampling-Theorie* notwendig. Hier ist insbesondere die Betrachtung der Hilbert-Räume mit reproduzierendem Kern (rk-Hilbert-Räume) zu erwähnen. Die in der zugänglichen Literatur vorhandenen Resultate wurden geordnet, dabei konnte gezeigt werden, daß eine Basis eines rk-Hilbert-Raums genau dann eine Sampling-Basis ist, wenn sie aus interpolie-

renden Funktionen besteht. Auch zur mehrdimensionalen Sampling-Theorie gibt es auffallend wenig Literatur.

Der Hauptteil der Arbeit schließlich gibt einen umfassenden Überblick über den aktuellen Wissensstand zur Theorie der mehrdimensionalen Skalierungsfunktionen und Wavelets mit Schwerpunkt auf den interpolierenden Skalierungsfunktionen. Im Lichte der rk-Hilbert-Räume konnten die bisherigen Resultate zum Sampling in Mehrfachauflösungen neu interpretiert und gezeigt werden, daß die Translatierten eines interpolierenden Erzeugers einer Mehrfachauflösung, deren Räume  $\mathcal{V}_j$  einen reproduzierenden Kern besitzen, zugleich eine Sampling-Basis bilden. Mit der Diskussion vier verschiedener Konstruktionsverfahren für interpolierende Skalierungsfunktionen schließlich wird klar, daß die gewonnenen Resultate praktisch nutzbar sind und man sich in der Tat unter Beibehaltung der Skalierbarkeit und Interpolationseigenschaft von der sinc-Funktion als Skalierungs- und Samplingfunktion lösen kann.

## 4.2 Ausblick

Interpolierende Skalierungsfunktionen haben in den letzten Jahren die Entwicklung der Theorie der mehrdimensionalen Mehrfachauflösungen befördert und sind nach wie vor Gegenstand aktueller Forschungsinteressen. Interessante Fragestellungen für weiterführende Untersuchungen ergeben sich z.B. im Zusammenhang mit der Theorie der rk-Hilbert-Räume. Die vorliegende Arbeit hat gezeigt, daß eine interpolierende Skalierungsfunktion stets eine Sampling-Basis liefert, wenn der von ihren Translatierten aufgespannte Raum ein rk-Hilbert-Raum ist. Hier ist ein möglicher Ansatzpunkt die Klärung der Frage, ob es andere Fälle als den des rk-Hilbert-Raums gibt, in denen Sampling-Basen existieren.

Auch im Kontext der Konstruktionsverfahren sind Fragen offen. Für das beschriebene Verfahren durch Iteration von Symbolen z.B. könnte der Regularitätszuwachs bzw. die für eine erfolgreiche Anwendung des Verfahrens nötige Regularität des Startsymbols näher untersucht werden.

Weitere Ansatzpunkte für weiterführende Arbeiten ergeben sich im Kontext der Regularitätsanalyse. Bei der Littlewood-Paley-Methode zur Regularitätsanalyse sind Eigenwerte des auf den Raum  $E_f$  eingeschränkten Übergangsoperators zu bestimmen. Da  $E_f$  für jedes trigonometrische Polynom  $f$  endlich-dimensional ist, bilden die  $T^j f$ ,  $j \geq 0$  eine sog. Krylov-Sequenz. Erste Experimente mit den für diesen Fall in der Numerik bekannten schnellen und stabilen Berechnungsverfahren verliefen vielversprechend, so daß eine

weitere Untersuchung der Anwendungsmöglichkeiten dieser Verfahren auf die Regularitätsanalyse lohnend erscheint.

Die im Zusammenhang mit den Strang-Fix Bedingungen gezeigten Resultate gelten ausnahmslos nur für den Fall isotroper Dilatationsmatrizen  $A$ . Hier könnten weitergehende Untersuchungen klären, inwieweit sich auch im anisotropen Fall noch Aussagen treffen lassen.



# SYMBOLE

---

## Allgemein

Symbol	Erklärung	Seite
$A, B = A^T$	Sampling-Matrix, Dilatationsmatrix	81,82
$\alpha, \beta$	Multiindex	7
$E_n$	$n$ -dimensionale Einheitsmatrix	134,146
$i, j, \ell, m, n$	ganze Zahl	
$k, l$	$n$ -dimensionale ganze Zahl	
$\kappa_i$	Repräsentant von $\mathbb{Z}^n / A\mathbb{Z}^n$	88
$\Re, \Im$	Real- und Imaginärteil	
$\rho_i$	Repräsentant von $\mathbb{Z}^n / B\mathbb{Z}^n$	119
$\varrho_A$	Spektralradius der Matrix A	194
$\varrho_f$	Spektralradius von $T _{E_f}$	165
$\text{supp } f$	Träger von $f$	8,15
$ x $	Euklid-Norm	8
$\ f\ _p$	$L^p$ -Norm	9
$\ c\ _p$	$\ell^p$ -Norm	9
$\langle \cdot, \eta \rangle$	stetiges lineares Funktional	13
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	duales Paar	13
$\langle \cdot   \cdot \rangle$	Skalarprodukt	
$[x]$	Gauß-Klammer, größte ganze Zahl $\leq x$	
$\simeq$	Gleichheit bis auf Nullmengen	88

## Funktionen und Operatoren

Symbol	Erklärung	Seite
$c, (c_k)$	(Zahlen-) Folge	9
$D_A^p$	Dilatationsoperator	11
$\delta_x$	Dirac'sche Delta-Distribution im Punkt $x$	13
$\partial^\alpha$	Differential-Operator	8
$E_\lambda$	Modulationsoperator	10
$e_\lambda$	Exponential	10
$\eta$	Distribution	13
$\mathcal{F}, \overline{\mathcal{F}}$	(inverse) Fourier-Transformation	25,26
$\hat{f}$	$\mathcal{F}(f)$	25
$\check{f}$	$\overline{\mathcal{F}}(f)$	26
$\tilde{f}$	$f(-\cdot)$	17
$f * g$	Faltung von $f$ mit $g$	11
$f \circ g$	Verkettung von $f$ und $g$	14
$id$	Identitätsabbildung	10
$m$	Symbol	33
$R_f$	Fourier-Reihe von $f$	32
$\varphi$	Testfunktion	12
$\phi$	Skalierungsfunktion	110
$\psi$	Wavelet	128
sinc	Sinus Cardinalis $\frac{\sin \pi \cdot}{\pi}$	78
$T_b$	Translationsoperator	10
$T = T_m$	Übergangsoperator	160
$\mu, \lambda$	(Lebesgue-) Maß	10,73
$\varpi$	Periodisierungsoperator	21
$\chi_Q$	charakteristische Funktion auf $Q$	10

## Funktionsräume

Symbol	Erklärung	Seite
$\mathcal{B}_\omega^p$	Bernstein-Raum	54
$\mathcal{C}, \mathcal{C}^k$	( $k$ -fach) stetig differenzierbare Funktionen	8
$\mathcal{C}^\infty, \mathcal{E}$	unendlich oft stetig differenzierbare Funktionen	8,15
$\mathcal{C}_0$	stetige, im Unendlichen verschwindende Funktionen	8
$\mathcal{C}_b$	stetige, beschränkte Funktionen	59
$\mathcal{C}_c^\infty, \mathcal{D}$	Testfunktionen	8,12
$\mathcal{C}^s$	Hölder-Raum	155
$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$	Distributionen	13
$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$	Distributionen mit kompaktem Träger	16
$\mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)$	periodische Distributionen	22
$E_f, F_f$	Unter $T_m$ invariante Räume	161,175
$H^m, H^s$	Sobolev-Raum	155
$\mathcal{H}$	(Funktionen-) Hilbert-Raum	62
$L^p, L_{\text{loc}}^p$	(lokal) Lebesgue-integrierbare Funktionen	9
$\ell(\mathbb{Z}^n)$	Folgen über $\mathbb{Z}^n$	9
$\ell^p(\mathbb{Z}^n)$	summierbare Folgen	9
$L^p(\mathbb{T}^n)$	periodische $L^p$ -Funktionen	31
$\mathcal{L}(X, X)$	stetige lineare Abbildungen von $X$ in sich	59,194
$\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$	Multiplikatoren	20
$\mathcal{O}'_C(\mathbb{R}^n)$	Konvolutoren	20
$PW_B$	Paley-Wiener Raum	65, 75
$\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$	trigonometrische Polynome	110
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	Schwartz-Raum rasch fallender Funktionen	19
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	temperierte Distributionen	19
$\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$	rasch fallende Folgen	32
$\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$	temperierte Folgen	35
$\mathcal{S}(\phi)$	PSI-Raum	95
$\mathcal{S}_2(\phi)$	PSI-Variante	97
$V_\omega$	$\omega$ -bandbeschränkte Funktionen	45, 71
$\mathcal{V}_j, \mathcal{W}_j$	Räume einer Mehrfachauflösung	126,127

## Zahlenräume

Symbol	Erklärung
$\mathbb{N}, \mathbb{N}^*$	natürliche Zahlen (ohne Null)
$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^n$	ganze Zahlen
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$	reelle Zahlen
$\mathbb{R}_+$	nicht-negative reelle Zahlen
$\mathbb{R}_+^*$	positive reelle Zahlen
$\mathbb{C}, \mathbb{C}^n$	komplexe Zahlen
$\mathbb{U}$	komplexe Zahlen vom Betrag 1
$\mathbb{T}, \mathbb{T}^n$	Torus
$I^n$	$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^n$ , auch $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$
$\Gamma, \Lambda, \Upsilon$	$n$ -dimensionale Gitter

# ABKÜRZUNGEN

---

<b>Abkürzung</b>	<b>Erklärung</b>
Anh.	Anhang
Bsp.	Beispiel
bzw.	beziehungsweise
d.h.	das heißt
engl.	englisch
f.ü.	fast überall
i.a.	im allgemeinen
i.d.R.	in der Regel
i.e.	id est, lat. das heißt
Kap.	Kapitel
Kor.	Korollar
lat.	lateinisch
L-meßbar	Lebesgue-meßbar
o.B.d.A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
ONB	Orthonormalbasis
p.d.	per definitionem, lat. nach Definition
Pkt.	Punkt
Prelim.	Preliminaries, Präliminarien
rk-HR	Hilbert-Raum mit reproduzierendem Kern
S.	Seite
sog.	sogenannt
Th.	Theorem
übertr.	übertragen, im übertragenen Sinne
vgl.	vergleiche
Vol.	Volume
z.B.	zum Beispiel
z.T.	zum Teil



# ABBILDUNGEN

---

## Kapitel 1

1.1	Eine Testfunktion. . . . .	13
1.2	Übersicht: Funktionen- und Distributionenräume. . . . .	24
1.3	Übersicht: Fourier-Transformation auf $\mathbb{T}^n$ und $\mathbb{Z}^n$ . . . . .	38

## Kapitel 2

2.1	Oversampling: Wahl anderer Sampling-Funktionen. . . . .	51
2.2	Aliasing bei Undersampling. . . . .	54
2.3	Der Sinus Cardinalis und seine Fourier-Transformierte . . . . .	80
2.4	Das Quincunx-Gitter. . . . .	87
2.5	Selbstaffine Mengen: Der Twin-Dragon. . . . .	90

## Kapitel 3

3.1	Tensorielle B-Splines $B_0$ und $B_1$ . . . . .	105
3.2	Tensorielle B-Splines $B_2$ und $B_3$ . . . . .	106
3.3	Das Symbol aus Beispiel 3.31. . . . .	123
3.4	Shannon-Mehrfachauflösung I. . . . .	148
3.5	Shannon-Mehrfachauflösung II. . . . .	149



# LITERATUR

---

- [Aro50] N. Aronszajn. Theory of reproducing kernels. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 68:337–404, 1950.
- [BA83] P. Burt and E. Adelson. The laplacian pyramid as a compact image code. *IEEE Trans. Comm.*, 31:482–540, 1983.
- [Bar88] M. F. Barnsley. *Fractals Everywhere*. Academic Press, Boston, 1988.
- [BAR90] A. Ben-Artzi and A. Ron. On the integer translates of a compactly supported function: dual bases and linear projectors. *SIAM J. Math. Anal.*, 21:1550–1562, 1990.
- [Bla98] Christian Blatter. *Wavelets – Eine Einführung*. Vieweg, 1998.
- [Bor99] E. Borel. Mémoire sur les séries divergentes. *Ann. École Norm. Sup.*, 16(3):9–131, 1899.
- [Bow78] Rufus Bowen. Markov partitions are not smooth. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 71(1):130–132, 1978.
- [Bro67] J. L. Brown, Jr. On the error in reconstructing a non-bandlimited function by means of the bandpass sampling theorem. *J. Math. Anal. and Appl.*, 18:75–84, 1967.
- [BS92] P. L. Butzer and R. L. Stens. Sampling theory for not necessarily band-limited functions: A historical overview. *SIAM Review*, 34(1):40–53, 1992.
- [BSS88] P. L. Butzer, W. Splettstößer, and R. L. Stens. The sampling theorem and linear prediction in signal analysis. *Jber. d. Dt. Math.-Verein*, 90:1–70, 1988.
- [Buh98] M.D. Buhmann. Radial functions on compact support. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 41(1):33–46, 1998.

- [Buh00] M.D. Buhmann. Approximation and interpolation with radial functions. *Acta Numerica*, 9, 2000.
- [Cas71] J.W. Cassels. *An Introduction to the Geometry of Numbers*. Springer-Verlag, Berlin, 2nd corrected edition, 1971.
- [CD93] Albert Cohen and Ingrid Daubechies. Non-separable bidimensional wavelet bases. *Revista Mat. Iberoamericana*, 9(1):51–137, 1993.
- [CDF92] A. Cohen, I. Daubechies, and J. Feauveau. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 45:485–560, 1992.
- [CDL98] Albert Cohen, Nira Dyn, and David Levin. Matrix subdivision schemes. Preprint, 1998.
- [CDM91] A.S. Cavaretta, W. Dahmen, and C.A. Micchelli. *Stationary Subdivision*. Number 453 in: Mem. Amer. Math. Soc. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [CGV99] Albert Cohen, Karlheinz Gröchenig, and Lars F. Villemoes. Regularity of multivariate refinable functions. *Constr. Approx.*, 15(2):241–255, 1999.
- [Chu92a] C. K. Chui. *An Introduction to Wavelets*. Academic Press, San Diego, 1992.
- [Chu92b] C. K. Chui, editor. *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*. Academic Press, San Diego, 1992.
- [CL94] Charles K. Chui and Chun Li. A general framework of multivariate wavelets with duals. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 1(4):368–390, 1994.
- [Coh90] A. Cohen. *Ondelettes, analyses multirésolutions et traitement numérique du signal*. PhD thesis, Université Paris IX Dauphine, 1990.
- [Coh92] A. Cohen. Biorthogonal wavelets. In Chui [Chu92b], pages 123–152.
- [CR90] Jean-Pierre Conze and Albert Raugi. Fonctions harmoniques pour un opérateur de transition et applications. *Bull. Soc. math. France*, 118(3):273–310, 1990.

- [CS93] A. Cohen and J.-M. Schlenker. Compactly supported bidimensional wavelet bases with hexagonal symmetry. *Constr. Approx.*, 9(2-3):209–236, 1993.
- [Dau88] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 41:909–996, 1988.
- [Dau92] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. Number 61 in: CBMS-NSF Series in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, 1992.
- [dBDR94] Carl de Boor, Ronald A. DeVore, and Amos Ron. Approximation from shift-invariant subspaces of  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 341(2):787–806, 1994.
- [DDD91] Gilles Deslauriers, Jacques Dubois, and Serge Dubuc. Multidimensional iterative interpolation. *Can. J. Math.*, 43(2):297–312, 1991.
- [DGM98] Stephan Dahlke, Karlheinz Gröchenig, and Peter Maass. A new approach to interpolating scaling functions. IGPM-Report Nr. 154, RWTH Aachen, 1998.
- [Die75] J. Dieudonné. *éléments d'analyse*, volume 6. Gauthier-Villars, Paris, 1975.
- [DL91] Ingrid Daubechies and Jeffrey C. Lagarias. Two-scale difference equations I. Existence and global regularity of solutions. *SIAM J. Math. Anal.*, 22(5):1388–1410, 1991.
- [DL92] Ingrid Daubechies and Jeffrey C. Lagarias. Two-scale difference equations II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals. *SIAM J. Math. Anal.*, 23:1031–1079, 1992.
- [DM97] Stephan Dahlke and Peter Maass. Interpolating refinable functions and wavelets for general scaling matrices. *Numer. Funct. Anal. And Optimiz.*, 18(5&6):521–539, 1997.
- [Don92] David L. Donoho. Interpolating wavelet transforms. Technical Report 408, Stanford University, November 1992.
- [Dub85] E. Dubois. The sampling and reconstruction of time-varying imagery with application in video systems. *Proc. IEEE*, 73(4):502–522, April 1985.
- [Dub86] Serge Dubuc. Interpolation through an iterative scheme. *J. Math. Anal. and Appl.*, 114:185–204, 1986.

- [Ebe94] Wolfgang Ebeling. *Lattices and codes: A course partially based on lectures by F. Hirzebruch*. Vieweg-Verlag, Wiesbaden, 1994.
- [For84] Otto Forster. *Analysis 3 Integralrechnung im  $\mathbb{R}^n$  mit Anwendungen*. Vieweg-Verlag, Wiesbaden, 3rd edition, 1984.
- [FS69] George Fix and Gilbert Strang. Fourier analysis of the finite element method in Ritz-Galerkin theory. *Stud. Appl. Math.*, 48:265–273, 1969.
- [Gil81] William J. Gilbert. Geometry of radix representations. In Chandler Davis, Branko Grünbaum, and F.A. Sherk, editors, *The Geometric Vein: The Coxeter Festschrift*, pages 129–139. Springer-Verlag New York Inc., 1981.
- [GL87] P.M. Gruber and C.G. Lekkerkerker. *Geometry of Numbers*. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 2nd edition, 1987.
- [Gla95] Andrew S. Glassner. *Principles Of Digital Image Synthesis*, volume 1. Morgan Kaufmann Publishers, Inc., San Francisco, California, 1995.
- [GM92] K. Gröchenig and W. R. Madych. Multiresolution analysis, Haar bases, and self-similar tilings of  $\mathbb{R}^n$ . *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 38(2):556–568, March 1992.
- [Gol53] S. Goldman. *Information Theory*. Prentice Hall, New York, 1953.
- [Hig85] J.R. Higgins. Five short stories about the cardinal series. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 12(1):45–89, 1985.
- [Hig96] J. R. Higgins. *Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis. Foundations*. Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [Hör83] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1983.
- [Jag66] D. Jagerman. Bounds for truncation error of the sampling expansion. *SIAM J. Appl. Math.*, 14:714–723, 1966.
- [Jia98] Rong-Qing Jia. Approximation properties of multivariate wavelets. *Math.-Comp.*, 67(222):647–665, 1998.
- [Jia99a] Rong-Qing Jia. Characterization of smoothness of multivariate refinable functions in Sobolev spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(10):4089–4112, 1999.

- [Jia99b] Qingtang Jiang. Multivariate matrix refinable functions with arbitrary matrix dilation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(6):2407–2438, 1999.
- [JM91] Rong-Qing Jia and Charles A. Micchelli. Using the refinement equation for the construction of pre-wavelets II: Powers of two. In Pierre-Jean Laurent and Schumaker [PJLS91], pages 209–246. Papers from the International Conference on Curves and surfaces, Chamonix-Mont-Blanc, June 21–27, 1990.
- [JM92] Rong-Qing Jia and Charles A. Micchelli. On linear independence for integer translates of a finite number of functions. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 36(1):69–85, 1992.
- [JP99] K. Jetter and G. Plonka. A survey on  $L^2$ -approximation order from shift-invariant spaces. Preprint, 1999.
- [JRS99] Hui Ji, Sherman D. Riemenschneider, and Zuowei Shen. Multivariate compactly supported fundamental refinable functions, duals, and biorthogonal wavelets. *Stud.-Appl.-Math.*, 102(2):173–204, 1999.
- [JS97] Hui Ji and Zuowei Shen. Compactly supported (bi)orthogonal wavelets generated by interpolatory refinable functions. Preprint, 1997.
- [Kho72] Vo-Khac Khoan. *Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles*, volume 1+2. Librairie Vuibert, Paris, 1972.
- [Kra60] H.P. Kramer. A generalised sampling theorem. *J. Math. Phys.*, 38:68–72, 1959/1960.
- [KV92] Jelena Kovačević and Martin Vetterli. Nonseparable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for  $\mathbb{R}^n$ . *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 38(2):533–555, 1992.
- [Lan67a] H. J. Landau. Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions. *Acta Math.*, 117:37–52, 1967.
- [Lan67b] H. J. Landau. Sampling, data transmission, and the nyquist rate. *Proc. IEEE*, 55(10):1701–1706, 1967.
- [LLS97] W. Lawton, S.L. Lee, and Zuowei Shen. Stability and orthonormality of multivariate refinable functions. *SIAM J. Math. Anal.*, 28(4):999–1014, 1997.

- [LMR94] A.K. Louis, P. Maaß, and A. Rieder. *Wavelets:Theorie und Anwendungen*. Teubner, 1994.
- [LW96a] Jeffrey C. Lagarias and Yang Wang. Haar bases for  $L^2(\mathbb{R}^n)$  and algebraic number theory. *J. Number Theory*, 57(1):181–197, 1996.
- [LW96b] Jeffrey C. Lagarias and Yang Wang. Integral self-affine tiles in  $\mathbb{R}^n$ . I. Standard and nonstandard digit sets. *J. London Math. Soc.*, 54(2):161–179, 1996.
- [LW96c] Jeffrey C. Lagarias and Yang Wang. Self-affine tiles in  $\mathbb{R}^n$ . *J. Adv. Math.*, 121(1):21–49, 1996.
- [LW97] Jeffrey C. Lagarias and Yang Wang. Integral self-affine tiles in  $\mathbb{R}^n$ . II. Lattice tilings. *J. Fourier Anal. Appl.*, 3(1):83–102, 1997.
- [Mal89] S. Mallat. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of  $L^2$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 315(1):69–87, 1989.
- [Mal98] Stéphane Mallat. *A Wavelet Tour Of Signal Processing*. Academic Press, 1998.
- [Mar69] Jürg Marti. *Introduction to the Theory of Bases*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1969.
- [Mar91] R.J. Marks II. *Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [Mey90] Yves Meyer. *Ondelettes et Opérateurs, I: Ondelettes, II: Opérateurs de Calderón-Zygmund, III: (with R. Coifman), Opérateurs multilinéaires*. Hermann, Paris, 1990.
- [MR93] Y. Meyer and S. Roques, editors. *Progress in Wavelet Analysis and Applications*, France, 1993. Editions Frontieres. Proceedings of the International Conference „Wavelets and Applications“, Toulouse, France, June 1992.
- [Nat86] Frank Natterer. *The mathematics of computerized tomography*. John Wiley & Sons Ltd and B.G. Teubner, 1986.
- [Nik75] S. M. Nikol’skiĭ. *Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems*. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 1975.

- [Odl78] A. M. Odlyzko. Non-negative digit sets in positional number systems. *Proc. London Math. Soc.* (3), 37(2):213–229, 1978.
- [Par56] E. Parzen. A simple proof and some extensions of sampling theorems. Technical Report 7, Stanford University, 1956.
- [PJLS91] Alain Le Méhauté Pierre-Jean Laurent and Larry L. Schumaker, editors. *Curves and surfaces*, Boston, MA, 1991. Academic Press. Papers from the International Conference on Curves and surfaces, Chamonix-Mont-Blanc, June 21–27, 1990.
- [PW34] Raymond E. A. C. Paley and Norbert Wiener. *Fourier Transforms in the Complex Domain*, volume 19 of *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1934.
- [Ron89] Amos Ron. A necessary and sufficient condition for the linear independence of the integer translates of a compactly supported distribution. *Constr. Approx.*, 5(3):297–308, 1989.
- [Ron92] Amos Ron. Characterizations of linear independence and stability of the shifts of a univariate refinable function in terms of its refinement mask. Preprint, September 1992.
- [Ron99] Amos Ron. Introduction to shift-invariant spaces I: Linear independence. Preprint, 1999.
- [RS95] Amos Ron and Zuowei Shen. Frames and stable bases for shift-invariant subspaces of  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . *Canad. J. Math.*, 47(5):1051–1094, 1995.
- [RS97] Sherman D. Riemenschneider and Zuowei Shen. Multidimensional interpolatory subdivision schemes. *SIAM J. Num. Anal.*, 34(6):2357–2381, 1997.
- [Rud62] Walter Rudin. *Fourier Analysis On Groups*. Interscience Publishers, New York, 1962.
- [Rud66] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw Hill, Inc., 1966.
- [Rud91] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw Hill, Inc., 2nd edition, 1991.
- [RW98] Howard L. Resnikoff and Raymond O. Wells, Jr. *Wavelet Analysis. The Scalable Structure Of Information*. Springer-Verlag, New York, 1998.

- [SB93] Naoki Saito and Gregory Beylkin. Multiresolution representations using the auto-correlation functions of compactly supported wavelets. *IEEE Trans. on Signal Process.*, 41(12):3584–3590, 1993.
- [SD80] W. Schempp and B. Dreseler. *Einführung in die harmonische Analyse*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1980.
- [Sha49] C.E. Shannon. Communication in the presence of noise. In *Proc. IRE*, volume 37, pages 10–21, 1949.
- [SSW77] Kennan T. Smith, Donald C. Solmon, and Sheldon L. Wagner. Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83(6):1227–1270, November 1977.
- [Sta67] C.J. Standish. Two remarks on the reconstruction of sampled non-bandlimited functions. *IBM J. Res. Develop.*, 11:648–649, 1967.
- [Ste70] Elias M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.
- [Str93] Robert S. Strichartz. Wavelets and self-affine tilings. *Constr. Approx.*, 9(2-3):327–346, 1993.
- [Tay96] Michael E. Taylor. *Partial Differential Equations I. Basic Theory*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [Tit26] E.C. Titchmarsh. The zeros of certain integral functions. *Proc. London Math. Soc.*, 25:283–302, 1926.
- [Tre67] François Trèves. *Topological vector spaces, distributions and kernels*. Academic Press, New York-London, 1967.
- [Tri83] Hans Triebel. *Theory of Function Spaces*. Akad. Verlagsges., Leipzig, 1983.
- [Vil93] Lars F. Villemoes. Sobolev regularity of wavelets and stability of iterated filter banks. In Meyer and Roques [MR93], pages 243–251. Proceedings of the International Conference „Wavelets and Applications“, Toulouse, France, June 1992.
- [Vil94] Lars F. Villemoes. Wavelet analysis of refinement equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 25(5):1419–1460, 1994.

- [VK95] Martin Vetterli and Jelena Kovačević. *Wavelets And Subband Coding*. Prentice Hall, 1995.
- [VP08] Ch.-J. de la Vallée-Poussin. Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes. *Bull. Acad. Roy. de Belgique*, pages 319–410, 1908.
- [Wal92] Gilbert G. Walter. A sampling theorem for wavelet subspaces. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 38(2):881–884, March 1992.
- [Wei57] P. Weiss. Sampling theorems associated with Sturm-Liouville systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 63:242, 1957.
- [Wei63] P. Weiss. An estimate of the error arising from misapplication of the sampling theorem. *Amer. Math. Soc. Notices*, 10(351), 1963. Abstract No. 601-54.
- [Woj97] P. Wojtaszczyk. *A Mathematical Introduction to Wavelets*. Number 37 in: London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1997.
- [Woo53] P.M. Woodward. *Probability and information theory, with applications to radar*. Pergamon Press, Oxford, 1953.
- [XZ93] Xiang-Gen Xia and Zhen Zhang. On sampling theorem, wavelets, and wavelet transform. *IEEE Trans. on Signal Process.*, 41(12):3524–3535, 1993.
- [You80] Robert M. Young. *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*. Academic Press, New York, 1980.
- [Zay93] Ahmed I. Zayed. *Advances in Shannon's Sampling Theory*. CRC Press, Boca Raton, 1993.
- [Zei86] Eberhard Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its applications I Fixed-Point Theorems*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [ZS99] Xingwei Zhou and Wenchang Sun. On the sampling theorem for wavelet subspaces. *J. Fourier Anal. Appl.*, 5(4):347–354, 1999.



# DANKSAGUNG

---

Die von zahlreicher Seite erfahrene Unterstützung hat wesentlich zur Fertigstellung dieser Arbeit beigetragen. Mein herzlicher Dank gilt allen, die daran Anteil hatten.

Herr Prof. Dr. Wolfgang Gromes weckte durch eine Vorlesung im Wintersemester 1993/94 mein Interesse für die *Wavelets* und förderte die Entstehung der Arbeit durch zahlreiche Diskussionen, die kritische Durchsicht des Manuskripts und ungezählte Kannen schwarzen Tees. Für die hervorragende Betreuung bedanke ich mich ganz besonders.

Herr Prof. Dr. Manfred Sommer schuf durch meine Einstellung in der Netzverwaltung des Fachbereichs Mathematik und Informatik die finanziellen Voraussetzungen für diese Arbeit. Für die gewährte Unterstützung und zahlreiche anregende Diskussionen möchte ich ihm herzlich danken.

In freundschaftlicher Verbundenheit danke ich Herrn Dr. Jürgen Vaupel für wertvolle Anregungen in einer frühen Phase der Arbeit sowie für die Möglichkeit eines zweiwöchigen Studienaufenthalts in Berkeley, Kalifornien, U.S.A.

Meinen Kollegen am Fachbereich Mathematik und Informatik, insbesondere den Kollegen aus der Netzverwaltung, Herrn Dr. Herbert Gasiorowski und Herrn cand. inf. Sebastian Benoit, danke ich für das überaus gute Arbeitsklima. Herrn Dipl. Inf. Steffen Priebe danke ich für wertvolle Anregungen zur Formatierung dieser Arbeit mit  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  und  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ .

Meinen Eltern danke ich für die mir gewährte Freiheit und Unterstützung bei der Gestaltung meines Ausbildungsweges. Freiheit macht neugierig.

Außerordentlicher Dank gilt meiner Frau Eva sowie meinen Kindern Joist und Milena, ohne die ...



# LEBENS LAUF

---

Name,Vorname : Hampel, Roger  
Geburtsdatum : 09.07.1968  
Geburtsort : Marburg/Lahn  
Familienstand : verheiratet, 2 Kinder  
Schulbildung : Wollenbergschule Wetter  
August 1978 bis Juli 1984  
Mittlere Reife Juli 1984  
Gymnasium Philippinum Marburg  
August 1984 bis Mai 1987  
Abitur Mai 1987  
Wehrdienst : Juli 1987 bis September 1988  
Studium : 1988 - 1995  
Studium der Diplom-Mathematik  
mit Nebenfach Informatik  
an der Philipps-Universität Marburg  
Vordiplom: Oktober 1990  
Diplom: Mai 1995  
Tätigkeiten : Fachbereich Mathematik der Universität Marburg  
Wissenschaftliche Hilfskraft mit Abschluß  
(November 1995 - März 1999)  
Wissenschaftlicher Mitarbeiter  
(April 1999 - März 2000)