Die Produktdarstellung von Skalierungsfunktionen

Wolfgang Gromes

12. April 2002

Abstract

We discuss conditions for a multivariate symbol $m(\omega)$ with mask (h_k) to define a scaling function ϕ by $\widehat{\phi} = \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\cdot)$. We show especially that $(h_k \cdot \ln \|k\|) \in l^1(\mathsf{Z}^n)$ is sufficient, but $(h_k) \in l^1(\mathsf{Z}^n)$ is not sufficient for the convergence of the infinite product. For a finite mask (h_k) we give two different methods for estimating the support of ϕ , the second one leads to a very natural and at least for generalized Haar functions best possible result.

1 Einleitung

Die zentralen Eigenschaften einer Skalierungsfunktion ϕ, wie Regularität, Riesz-Basis oder orthogonale Basis der Translatierten und die Interpolationseigenschaft korrespondieren unmittelbar mit entsprechenden Eigenschaften des Symbols m, vgl. z.B. Cohen [2], Daubechies [4], Dahlke et al. [3], Gromes/Saßmannshausen [7] und viele andere, der Ausgangspunkt für die Konstruktion von geeigneten Skalierungsfunktionen ist demnach fast immer die Konstruktion eines entsprechenden Symbols $m = \sum_{k \in \mathsf{Z}^n} h_k e_{-k}$. Aus der Skalierungsgleichung

$$\phi = a \sum_{k} h_k \, \phi(A \cdot -k) \tag{S}$$

erhält man durch Fouriertransformation formal

$$\widehat{\phi} = m(B^{-1}\cdot)\, \widehat{\phi}(B^{-1}\cdot) \tag{$\hat{S}$}$$

und daraus durch Iteration wiederum zunächst formal

$$\widehat{\phi} \;= \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\cdot)\ . \tag{1}$$

In diesem Artikel werden die Konvergenzeigenschaften dieses unendlichen Produktes und die Eigenschaften von ϕ , die sich aus der Produktdarstellung ergeben, untersucht.

Wir legen zunächst einige Bezeichnungen und Standardvoraussetzungen fest: Es sei

- $m : \mathsf{R}^n \to \mathsf{C}$ eine Z^n−periodische, messbare und beschränkte Funktion mit $m(0) = 1$, das *Symbol,*
- $e_k : \mathsf{R}^n \mapsto \mathsf{C}$, $\omega \mapsto e^{2\pi i <k|\omega>}$ der k-te *Charakter,* wobei $< k|\omega >= \sum_{j=1}^{n} k_j\omega_j$ für $k \in \mathsf{Z}^n$ und $\omega \in \mathsf{R}^n$ (oder $\omega \in \mathsf{C}^n$) sei,
- $h = (h_k)$ sei die Folge der Fourierkoeffizienten von m, die *Maske* von m, und $\operatorname{supp} h := \{k \in \mathsf{Z}^n \mid h_k \neq 0\}$ der Träger der Maske,

- $A \in \mathsf{Z}^{n\times n}$ sei eine Dilatationsmatrix, d.h. alle (komplexen) Eigenwerte von A sind betragsmäßig größer als 1 , B die Transponierte von A und $a := |\det A|$.

BEMERKUNG (a) Wegen $m \in L^2([0,1]^n)$ gilt $m = \sum_{k\in\mathsf{Z}^n} h_k e_{-k}$ in $L^2([0,1]^n)$.
(b) Da A eine Dilatationsmatrix ist, gilt für den Spektralradius $\rho(A^{-1}) < 1$, und nach einer einfachen Folgerung aus der Jordan-Normalform existiert für alle $r \in]1, 1/\rho(A^{-1})[$ eine Norm $\|\cdot\|$ auf dem R^n mit der Matrixnorm $\|B^{-1}\| \le 1/r$. Ist A diagonalisierbar, so kann $r = 1/\rho(A^{-1})$ gewählt werden.

Nach Knopp [12] nennen wir ein unendliches Produkt $\prod_{j=1}^{\infty} w_j$ von komplexen Zahlen *eigentlich konvergent,* wenn das Produkt konvergiert, d.h. $\lim_{\nu\to\infty} \prod_{j=1}^{\nu} w_j$ existiert und es ein $j_0 > 0$ gibt mit $\prod_{j=j_0}^{\infty} w_j \neq 0$.
Für das folgende Lemma siehe Rudin [15] und Knopp [12]

LEMMA 1 *Sei (w_j) ein Folge in* C , $u_j := w_j - 1$.

(a) Ist $\sum_{j=1}^{\infty} |u_j|$ konvergent, so ist $\prod_{j=1}^{\infty} w_j$ eigentlich konvergent und

$$\left|\prod_{j=1}^{\infty} w_j\right| \le \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} |u_j|\right) .$$

(b) Ist $u_j \ge 0$ oder $u_j \le 0$ für alle $j \ge j_0$, so ist $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$ genau dann konvergent, wenn $\prod_{j=1}^{\infty} w_j$ eigentlich konvergiert.

(c) Ist (w_j) ein Folge von beschränkten komplexwertigen Funktionen auf einer Menge Ω und $u_j := w_j - 1$, so gilt: Konvergiert $\sum_{j=1}^{\infty} |u_j|$ gleichmäßig auf Ω und ist dort beschränkt, so konvergiert $\prod_{j=1}^{\infty} w_j$ ebenfalls gleichmäßig (und eigentlich) auf Ω und ist dort auch beschränkt.

Im nächsten Abschnitt werden Abschätzungen für $\widehat{\phi}$ hergeleitet und das Konvergenzverhalten des Produktes (1) untersucht, insbesondere wird gezeigt, dass aus $(h_k \cdot \ln \|k\|) \in l^1(\mathsf{Z}^n)$ die kompakte Konvergenz des Produktes folgt, während für $(h_k) \in l^1(\mathsf{Z}^n)$ das Produkt fast überall divergieren kann. Im letzten Teil werden zwei verschiedene Methoden zur Abschätzung des Trägers von ϕ für eine endliche Maske (h_k) , d.h für ein trigonometrisches Polynom m angegeben. Die erste Methode ist eine Verallgemeinerung der von Daubechies [4] im eindimensionalen Fall angewandten Technik, die zweite Methode ist eine (distributive) Version des Kaskadenalgorithmus, vgl. z.B Deslauriers et al. [5] und Daubechies [4], man erhält damit die direkte Verallgemeinerung der Formel für die Haar-Funktionen in Gröchenig/Madych [6]

$$\operatorname{supp} \phi \subset \sum_{j=1}^{\infty} A^{-j}(\operatorname{supp} h) .$$

Das Resultat wird durch Beispiele und Bemerkungen illustriert.

Herrn Saßmannshausen danke ich für zahlreiche kritische Anmerkungen sowie den Literaturhinweis zum Beispiel 1 .

2 Konvergenzeigenschaften des Produkts

Im folgenden Satz wird zunächst die Existenz einer Skalierungsfunktion unter sehr allgemeinen Voraussetzungen bewiesen. Die Beweismethode stammt im eindimensionalen Fall von Daubechies [4], der mehrdimensionale ist von Hampel [9] behandelt worden.

SATZ 1 *Gilt*

$$\prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\cdot) \text{ konvergiert punktweise und ist beschränkt auf Kompakta des } \mathsf{R}^n , \tag{2}$$

so folgt für $\widehat{\phi} := \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\cdot)$

(a) *Für alle* $r \in]1, 1/\rho(A^{-1})[$ *und jede Norm auf dem* R^n *existiert eine Konstante* $C \geq 0$ *mit*

$$\left|\widehat{\phi}\right| \leq C(1 + \|\cdot\|^{\frac{\ln \|m\|_\infty}{\ln r}}) . \tag{3}$$

Ist A *diagonalisierbar, so kann* $r = 1/\rho(A^{-1})$ *gewählt werden.*

(b) $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}'$ *und* $\widehat{\phi}$ *erfüllt die Skalierungsgleichung* $(\hat{S})$.

Beweis: a) Wegen der Äquivalenz der Normen kann nach der obigen Bemerkung eine Norm $\|\cdot\|$ auf dem R^n gewählt werden mit $\|B^{-1}\| \leq 1/r$ (bzw. $\|B^{-1}\| = 1/\rho(A^{-1})$ im diagonalisierbaren Fall). Sei

$$C = \sup_{\|\omega\| \leq r} \left| \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\omega) \right|$$

und für (festes) $\omega \in \mathsf{R}^n$

$$j_\omega := \min\{j \in \mathsf{N} \mid \|\omega\| \leq r^{j+1}\} .$$

Da nach Definition von j_ω

$$\left\|B^{-j_\omega}\omega\right\| \leq r^{-j_\omega} \ \|\omega\| \leq r$$

folgt

$$\left|\widehat{\phi}(\omega)\right| = \left| \prod_{j=1}^{j_\omega} m(B^{-j}\omega) \right| \cdot \left| \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}(B^{-j_\omega}\omega)) \right| \leq \left| \prod_{j=1}^{j_\omega} m(B^{-j}\omega) \right| \cdot C . \tag{4}$$

Ist $j_\omega > 0$, so folgt aus $\|\omega\| > r^{j_\omega}$

$$j_\omega < \frac{\ln \|\omega\|}{\ln r} .$$

Wegen $\|m\|_\infty \geq 1$ erhält man damit aus (4)

$$\begin{aligned} \left|\widehat{\phi}(\omega)\right| &\leq \|m\|_\infty^{\frac{\ln\|\omega\|}{\ln r}} \cdot C \\ &= C \exp\left(\frac{\ln\|\omega\|}{\ln r} \cdot \ln\|m\|_\infty\right) \\ &= C\ \|\omega\|^{\frac{\ln\|m\|_\infty}{\ln r}} . \end{aligned} \tag{5}$$

Ist $j_\omega = 0$, so ist das erste Produkt in (4) leer, hat also den Wert 1 und demnach ist $\left|\widehat{\phi}(\omega)\right| \leq C$. Also gilt (a) .

b) $\widehat{\phi}$ ist als punktweiser Limes messbarer Funktionen messbar und $\widehat{\phi}$ ist nach (3) polynomial beschränkt, also ist $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}'$ und nach Definition von $\widehat{\phi}$ gilt die Skalierungsgleichung $(\hat{S})$. ¤

Im folgenden Lemma werden Kriterien für die Voraussetzung (2) von Satz 1 angegeben. Die Aussage in (a) ist eine Standardbedingung, vgl. Louis et al. [14] im eindimensionalen und Hampel [9] (für $\delta = 1$) im mehrdimensionalen Fall.

LEMMA 2 *Gilt zusätzlich zu den allgemeinen Voraussetzungen an m eine der folgenden Bedingungen:*

(a) *m ist hölderstetig in Null: Es gibt $C \geq 0$ und $\delta > 0$ mit*

$$|m(\omega) - 1| \leq C\ \|\omega\|^\delta$$

in einer Umgebung U der Null,
oder

(b) $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} |h_k| \cdot \ln\|k\|$ *ist konvergent,*

so ist $\prod_{j=1}^\infty m(B^{-j}\cdot)$ gleichmäßig konvergent auf Kompakta des $\mathbb{R}^n$, dort beschränkt und $\prod_{j=1}^\infty m(B^{-j}\cdot)$ konvergiert auch in $\mathcal{S}'$ gegen $\widehat{\phi}$.

Beweis: Es sei wieder die Norm aus dem Beweis von Satz 1 mit $\|B^{-1}\| \leq 1/r < 1$ gewählt.

a) Es sei Œ (vgl. (4)) $\omega \in \mathbb{R}^n$ mit $B^{-j}(\omega) \in U$ für alle $j > 0$. Dafür gilt dann

$$\sum_{j=1}^\infty \left|m(B^{-j}\omega) - 1\right| \leq C \sum_{j=1}^\infty (r^{-j}\|\omega\|)^\delta = C\frac{1}{r^\delta - 1}\|\omega\|^\delta .$$

Mit $u_j = m(B^{-j}\cdot) - 1$ folgen die ersten beiden Behauptungen aus Lemma 1 (c).

b) Sei $1 < s < r$. Da für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\left|e^{i\alpha} - 1\right| = \left|e^{i\alpha/2} - e^{-i\alpha/2}\right| = |2\sin\alpha/2| \leq |\alpha|$$

folgt mit $m(0) = 1$ und der Äquivalenz obiger Norm zur euklidischen Norm

$$\begin{aligned}
\left|m(B^{-j}\omega) - 1\right| &= \left|\sum_{k\in\mathsf{Z}^n} h_k(e_{-k}(B^{-j}\omega) - 1)\right| \\
&\leq 2\pi \sum_{\|k\|\leq s^j} |h_k| \cdot \left|\langle k|B^{-j}\omega\rangle\right| + \sum_{\|k\|>s^j} |h_k| \cdot 2 \\
&\leq C\, r^{-j}\, \|\omega\| \sum_{\|k\|\leq s^j} |h_k| \cdot \|k\| + 2 \sum_{\|k\|>s^j} |h_k| \\
&:= a_j + b_j
\end{aligned}$$

mit einer nur von der Norm abhängenden Konstanten C . Für die beiden Teilsummen erhält man

$$a_j \leq C\, r^{-j}\, \|\omega\|\, s^j \cdot \|h\|_1$$

und somit

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \leq C' \, \|\omega\| \ .$$

Da

$$\|k\| > s^j \Longleftrightarrow j < \frac{\ln \|k\|}{\ln s}$$

ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j = 2 \sum_{k\neq 0} \sum_{j<\frac{\ln\|k\|}{\ln s}} |h_k| \leq 2 \sum_{k\neq 0} |h_k| \cdot \frac{\ln \|k\|}{\ln s} \leq C'' \ .$$

Damit folgen die ersten Behauptungen wieder aus Lemma 1 (c).
Wegen der kompakten Konvergenz ist $\prod_{j=1}^{\nu} m(B^{-j}\cdot)$ gleichmäßig beschränkt auf $\{\|\omega\| \leq r\}$, nach (5) demnach gleichmäßig polynomial beschränkt, also auch in $\mathcal{S}'$ konvergent. ¤

BEMERKUNG Die Aussage in (a) gilt ebenso für komplexe Argumente.

Eine natürliche Voraussetzung für das Symbol m ist

$$m = \sum_{k\in\mathsf{Z}^n} h_k e_{-k} \text{ mit } m(0) = 1 \text{ und } (h_k) \in l^1(\mathsf{Z}^n) \ . \tag{6}$$

Damit ist m stetig, unter den Voraussetzungen von Lemma 1 (c) ist dann $\widehat{\phi}$ ebenfalls stetig und die fouriertransformierte Skalierungsgleichung $(\hat{S})$ ist äquivalent zur Skalierungsgleichung (S) , vgl. Hampel [9], Lemma 3.20 . Die Voraussetzung (6) ist jedoch weder notwendig noch hinreichend für die Konvergenz des Produktes $\prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\cdot)$, wie an den folgenden Beispielen gezeigt wird.
Die Grundidee des ersten Beispiels, welches zeigt, dass die Voraussetzung $(h_k) \in$

l^1 für die Konvergenz des Produktes nicht hinreichend ist, stammt aus N. K. Bari [1] Vol.II, p.178/179.

BEISPIEL 1 Es sei $n = 1$, $A = 2$ und

$$m = \frac{6}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \cos(2\pi\, 2^{\nu^2} \cdot) \; .$$

Die Reihe ist absolut konvergent, also ist die Folge (a_k) der Fourierkoeffizienten in l^1 und es gilt $m(0) = 1$. Da

$$a_k = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\nu^2} \;\text{ falls } k = 2^{\nu^2}$$

und $a_k = 0$ sonst, ist

$$a_k \cdot \ln k = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\nu^2} \ln 2^{\nu^2} = \frac{6}{\pi^2} \cdot \ln 2 \;\text{ falls } k = 2^{\nu^2} \; ,$$

und demnach ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \ln k$ divergent.
Wir zeigen, dass (bzgl. des Lebesgue-Maßes) gilt

$$\prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\omega) = 0 \text{ für fast alle } \omega \in \mathsf{R} \; . \tag{7}$$

Da $m(\omega) = m(-\omega)$ genügt es dazu (vgl (4)) $\omega \in [0, 1]$ zu betrachten. Wegen $m(0) = 1$ gibt es $j_0 > 0$ mit

$$0 < m(2^{-j}\omega) \leq 1 \text{ für alle } j \geq j_0 \text{ und } \omega \in [0, 1] \; . \tag{8}$$

Demnach ist $\prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\omega)$ für alle $\omega \in [0, 1]$ konvergent mit $0 \leq \prod_{j=j_0}^{\infty} m(2^{-j}\omega) \leq 1$. Wegen Lemma 1 (b) und (8) sind demnach folgende Aussagen für $\omega \in [0, 1]$ äquivalent:

$$\prod_{j=j_0}^{\infty} m(2^{-j}\omega) > 0 \; ,$$

$$\prod_{j=j_0}^{\infty} m(2^{-j}\omega) \;\text{ konvergiert eigentlich,}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} (m(2^{-j}\omega) - 1) \text{ ist konvergent.}$$

Also ist (7) äquivalent dazu, dass $\sum_{j=1}^{\infty} (m(2^{-j}\omega) - 1)$ für fast alle $\omega \in [0, 1]$ divergiert.
Für $j \in \mathsf{N}^*$ sei $\nu_j \in \mathsf{N}$ die eindeutige Zahl mit $(\nu_j - 1)^2 < j \leq \nu_j^2$. Aus

$$\nu_j < \sqrt{j} + 1 \leq 2\sqrt{j} \;\text{ für alle } j \in \mathsf{N}^*$$

und

$$m(2^{-j}\omega) \le \frac{6}{\pi^2}\left[\sum_{\nu\neq\nu_j}\frac{1}{\nu^2}+\frac{\cos(2\pi\ 2^{\nu_j^2-j}\omega)}{\nu_j^2}\right] = 1+\frac{6}{\pi^2}\left(-\frac{1}{\nu_j^2}+\frac{\cos(2\pi\ 2^{\nu_j^2-j}\omega)}{\nu_j^2}\right)$$

folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-m(2^{-j}\omega)) \ge \frac{6}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1-\cos(2\pi\ 2^{\nu_j^2-j}\omega)}{4j}\right) . \tag{9}$$

Mit dieser Abschätzung lässt sich einfach die Divergenz von $\sum_{j=1}^{\infty}(1-m(2^{-j}\omega))$ für einzelne ω nachweisen. Ist z.B. $\omega = 1/3$, so folgt $2^{\nu_j^2-j}\cdot\frac{1}{3}\in\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}+\mathsf{N}^*$ (da $2^{\nu_j^2-j}$ nicht durch 3 teilbar ist), damit gilt für alle j

$$\cos(2\pi\, 2^{\nu_j^2-j}\cdot\frac{1}{3}) = \cos(2\pi\cdot\frac{1}{3})\ (=\cos(2\pi\cdot\frac{2}{3})\ ) \neq 1$$

und somit sind die Reihen in (9) bestimmt divergent gegen ∞ .

Für das allgemeine Resultat benötigen wir einen Satz über normale Zahlen, vgl Kuipers/Niederreiter [13]:

SATZ *Fast jede Zahl in* $[0,1]$ *ist normal bzgl. der Basis* 2 .

Dabei heißt $\omega\in[0,1[$ normal, wenn folgendes gilt: Ist $\omega=\sum_{\nu=1}^{\infty}\omega_\nu 2^{-\nu}$ mit $\omega_\nu\in\{0,1\}$ und $\omega_\nu<1$ für unendlich viele ν ,

$$B_k=(b_1,b_2,...,b_k)$$

ein Block von Ziffern aus $\{0,1\}$ der Länge k sowie $A(\omega,B_k,N)=A(\omega_1,\omega_2,...,\omega_N;B_k)$ die Anzahl des Auftretens von B_k in der Ziffernfolge $\omega_1,\omega_2,...,\omega_N$, so gilt

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}A(\omega,B_k,N)=2^{-k} .$$

Sei nun $\omega=\sum_{\nu=1}^{\infty}\omega_\nu 2^{-\nu}\in[0,1[$ normal und B einer der Blöcke $(0,1)$ oder $(1,0)$, so existiert ein $N_0>0$ mit

$$A(\omega_2,...,\omega_{N+2};B)\ge\frac{1}{8}N \tag{10}$$

für alle $N\ge N_0$. Für alle $\mu\in\mathsf{N}$ mit $(\omega_{\mu+1},\omega_{\mu+2})=(0,1)$ gilt

$$2^\mu\omega\ge\sum_{\nu=1}^{\mu}\omega_\nu 2^{\mu-\nu}+2^{\mu-(\mu+2)}=l+\frac{1}{4}$$

für ein $l\in\mathsf{N}$, und für $(\omega_{\mu+1},\omega_{\mu+2})=(1,0)$ folgt

$$2^\mu\omega\le\sum_{\nu=1}^{\mu}\omega_\nu 2^{\mu-\nu}+\frac{1}{2}+\sum_{\nu=\mu+3}^{\infty}2^{\mu-\nu}=l'+\frac{3}{4}$$

mit $l' \in \mathsf{N}$. Für $N \geq N_0$ erhält man also aus (10)

$$\#\{1 \leq \mu \leq N \mid \operatorname{dist}(2^\mu \omega, \mathsf{Z}) \geq \frac{1}{4}\} \geq \frac{N}{8} \,. \tag{11}$$

Ist $(k-1)^2 < \mu \leq k^2$, so ist $\nu_\mu = k$, und da $k^2 - (k-1)^2 - 1 = 2k-2$ folgt aus (9) und (11)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty}(1 - m(2^{-j}\omega)) &\geq \frac{3}{2\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1-\cos(2\pi\, 2^{\nu_j^2 - j}\omega)}{j} \right) \\
&= \frac{3}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mu=(k-1)^2+1}^{k^2} \left(\frac{1-\cos(2\pi\, 2^{k^2-\mu}\omega)}{\mu} \right) \\
&\geq \frac{3}{2\pi^2} \sum_{2k-2 \geq N_0} \frac{1}{(k-1)^2+1} \sum_{\nu=0}^{2k-2} (1-\cos(2\pi\, 2^\nu \omega)) \\
&\geq \frac{3}{2\pi^2} \sum_{2k-2 \geq N_0} \frac{1}{(k-1)^2+1} (2k-1) \frac{1}{8} (1-\cos(2\pi \frac{1}{4})\,) \\
&= \frac{3}{2\pi^2} \sum_{2k-2 \geq N_0} \frac{1}{8} \frac{2k-1}{(k-1)^2+1} = \infty \,.
\end{aligned}$$

BEMERKUNG Für das Symbol

$$m = 2 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \cos(2\pi\, 2^{\nu^2} \cdot)$$

erhält man mit der gleichen Rechnung, dass $\sum_{j=1}^{\infty}(1 - m(2^{-j}\omega))$ für alle normalen $\omega \in [0,1[$ divergiert, da $m(\omega) \geq 1$ folgt in diesem Fall

$$\prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\omega) = \infty \;\text{ fast überall.}$$

Das zweite Beispiel ist elementar:

BEISPIEL 2 Sei

$$m = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin(2\pi k \cdot)}{k} \,.$$

Dann ist (vgl. z.B. N. Bari [1] Vol.I, p.118))

$$m(\omega) = 1 + \omega \text{ für } |\omega| < 1/2 \,,$$

also gelten die Voraussetzungen von Lemma 2 (a) und die Fourierkoeffizienten sind nicht in l^1 .

BEMERKUNG Aus der Abschätzung (3) von $\widehat{\phi}$ im Satz 1 erhält man in einfacher Weise die "Brûte-Force-Abschätzungen" von $\widehat{\phi}$, vgl. Daubechies [4] und

Hampel [9] : Sei für $\nu \in \mathsf{N}^*$

$$M_\nu := \prod_{j=1}^{\nu} m(B^{j-1}\cdot) \ ,$$

so erfüllt M_ν die Voraussetzungen von Satz 1 mit der Dilatationmatrix $A_\nu := A^\nu$. Da

$$\widehat{\phi_\nu} := \prod_{i=1}^{\infty} M_\nu(B_\nu^{-i}\cdot) = \widehat{\phi}$$

und $\rho(A_\nu^{-1}) = \rho(A^{-1})^\nu$ folgt aus (3): Für $r \in]1, 1/\rho(A^{-1})[$ (bzw. $r = \rho(A^{-1})$ im diagonalisierbaren Fall) gilt

$$\left|\widehat{\phi}\right| \leq C(1 + \|\cdot\|^{\frac{\ln\|M_\nu\|_\infty}{\nu\cdot\ln r}}) \ . \tag{12}$$

Da die Exponenten in (12) stets nichtnegativ sind, ist die Abschätzung (12) nur nützlich, wenn m geeignet faktorisiert werden kann. Beipiele dazu finden sich in Daubechies [4] und Dahlke et al. [3].

3 Der Träger der Skalierungsfunktion

Im den folgenden Sätzen werden Aussagen über den Träger von ϕ für Symbole mit endlicher Maske gemacht. Zur Vorbereitung dient das nächste einfache Lemma, mit dem sich der Ansatz des Beweises von Daubechies [4], Lemma 6.2.2 auf den mehrdimensionalen Fall übertragen lässt.

Für $p \in \mathsf{Z}^n$ sei

$$m_p := e_p \cdot m = \sum_{k \in \mathsf{Z}^n} h_k e_{p-k} = \sum_{k \in \mathsf{Z}^n} h_{k+p} e_{-k} \ ,$$

$h_p = (h_{k+p})_{k \in \mathsf{Z}^n}$ sei die Maske zu m_p und $q := \sum_{j=1}^{\infty} A^{-j} p$.

LEMMA 3 *Gilt für m die Voraussetzung (2) von Satz 1, so erfüllt m_p ebenfalls diese Voraussetzung und für die von m und m_p erzeugten Skalierungsfunktionen ϕ und ϕ_p gilt*

$$\phi_p = \phi(\cdot + q) \ .$$

Beweis: Nach Lemma 2 (a) ist $\prod_{j=1}^{\infty} e_p(B^{-j}\cdot)$ konvergent und

$$\prod_{j=1}^{\infty} e_p(B^{-j}\omega) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} 2\pi i \left\langle p | B^{-j}\omega \right\rangle\right) = \exp\left(2\pi i \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} A^{-j} p | \omega \right\rangle\right) = e_q(\omega) \ .$$

Also gelten auch für m_p die Voraussetzungen von Satz 1 und aus

$$\widehat{\phi}_p := \prod_{j=1}^{\infty} e_p(B^{-j}\cdot)\, m(B^{-j}\cdot) = e_q \cdot \widehat{\phi}$$

folgt die Behauptung. ¤

Im Weiteren sei

$$m = \sum_{k\in\mathsf{Z}^n} h_k e_{-k} \text{ mit } \quad m(0) = 1 \text{ und } (h_k) \text{ endlich} \tag{13}$$

und

$$K_h := \sum_{j=1}^{\infty} A^{-j}(\operatorname{supp} h) := \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} A^{-j} k_j \mid k_j \in \operatorname{supp} h \right\} . \tag{14}$$

LEMMA 4 *Mit den Bezeichnungen aus Lemma 3 gilt*

(a) K_h *ist kompakt,*

(b) $K_{h_p} = -q + K_h$.

Beweis a) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm mit $\|A^{-1}\| \le 1/r < 1$ und

$$\operatorname{supp} h \subset B_R(0) .$$

K_h ist beschränkt, da für $x \in K_h$ gilt

$$\|x\| \le \sum_{j=1}^{\infty} \left\|A^{-j}\right\| \cdot R \le \sum_{j=1}^{\infty} r^{-j} \cdot R = \frac{1}{r-1} R ,$$

demnach liegt K_h in der Kugel $B_{\frac{1}{r-1}R}(0)$.

K_h ist abgeschlossen: Sei $x^\nu = \sum_{j=1}^{\infty} A^{-j} k_j^\nu \in K_h$ mit $x^\nu \to x \in \mathsf{R}^n$. Da $\operatorname{supp} h$ endlich, hat (k_1^ν) eine konstante Teilfolge $(k_1^{\nu_1})$, $(k_2^{\nu_1})$ eine konstante Teilfolge $(k_2^{\nu_2})$ und induktiv für alle $j \in \mathsf{N}^*$ $(k_j^{\nu_{j-1}})$ eine konstante Teilfolge $(k_j^{\nu_j})$. Sei k_j jeweils der Wert der Teilfolge $(k_j^{\nu_j})$ und $y := \sum_{j=1}^{\infty} A^{-j} k_j$, so gilt für alle $i \in \mathsf{N}^*$

$$\begin{aligned} \|y - x_{\nu_i}\| &= \left\| \sum_{j=i+1}^{\infty} A^{-j}(k_j - k_j^\nu) \right\| \\ &\le \sum_{j=i+1}^{\infty} r^{-j} \cdot 2R = \frac{r^{-i}}{r-1} 2R . \end{aligned}$$

Also ist $y = x \in K_h$.

b) *Da*

$$\operatorname{supp} h_p = \{k \mid k + p \in \operatorname{supp} h\} = -p + \operatorname{supp} h$$

folgt

$$K_{h_p} = \sum_{j=1}^{\infty} A^{-j}(-p + \operatorname{supp} h) = -q + \sum_{j=1}^{\infty} A^{-j}(\operatorname{supp} h) = -q + K_h \,. \tag{15}$$

¤

BEMERKUNG In den folgenden beiden Sätzen wird K_h zur Abschätzung des Trägers von ϕ benutzt. Mengen der Form $\sum_{j=1}^{\infty} A^{-j}M \cap \mathsf{Z}^n$ mit $M \subset \mathsf{Z}^n$ endlich sind auch in anderem Zusammenhang in der Wavelet-Theorie wohlbekannt, nämlich als zulässige Mengen in den Subdivision-Schemes bzw. beim Transfer-Operator T_m, vgl. z.B. Han/Jia [10] und Gromes/Saßmannshausen [8] . In der ersten Arbeit ist auch auf andere Weise die Abgeschlossenheit von $\sum_{j=1}^{\infty} A^{-j}M$ gezeigt worden.

SATZ 2 *Gelten die Voraussetzungen in (13), so ist*

$$\widehat{\phi} := \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\cdot)$$

eine ganze Funktion, in $\mathcal{S}'$ und ϕ hat kompakten Träger. Genauer gilt: Ist $K \subset \mathsf{R}^n$ konvex, kompakt mit $K_h \subset K$, so ist $\operatorname{supp} \phi \subset K$.

Beweis Nach Voraussetzung ist m eine ganze Funktion, aus dem Mittelwertsatz folgt insbesondere

$$|m(z) - m(0)| \leq C \; \|z\| \text{ für } z \in \mathsf{C}^n \text{ mit } \|z\| \leq 1 \,.$$

Nach der Bemerkung zu Lemma 2 konvergiert $\prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\cdot)$ gleichmäßig auf Kompakta des C^n und somit ist $\widehat{\phi}$ ganz.

a) Man kann Œ $0 \in \operatorname{supp} h$ voraussetzten: Andernfalls gilt mit obigen Bezeichnungen für $p \in \operatorname{supp} h$:

$0 \in \operatorname{supp} h_p$ und ist $K \subset \mathsf{R}^n$ konvex, kompakt mit $K_h \subset K$, so ist nach (15)

$$K_{h_p} \subset -q + K =: K_p \,,$$

und K_p ist konvex und kompakt. Gilt die Satzaussage für ϕ_p , ist also $\operatorname{supp} \phi_p \subset K_p$, so folgt aus Lemma 3

$$\operatorname{supp} \phi = q + \operatorname{supp} \phi_p \subset K \,.$$

b) Sei $0 \in \operatorname{supp} h$ und sei wie im Satz 1 eine Norm $\|\cdot\|$ auf C^n gewählt mit $\|B^{-1}\| \leq 1/r < 1$, sei

$$C := \sup_{\|z\| \leq r} \left| \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}z) \right|$$

und für (festes) $z \in \mathsf{C}$

$$j_z := \min\{j \in \mathsf{N} \mid \|z\| \leq r^{j+1}\} \,.$$

Ferner sei K wie in der Satzformulierung gegeben und

$$I_K : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R} \ , \ \zeta \longmapsto \sup_{x \in K} \langle x | \zeta \rangle$$

die *Indikatorfunktion* von K .

Für $j_z > 0$ wird zunächst eine Abschätzung von $m(B^{-j} z)$ benötigt:

Mit $\zeta = \operatorname{Im} z$ ist

$$\left| e_{-k}(B^{-j} z) \right| = \exp \operatorname{Re}(-2\pi i \left\langle A^{-j} k | z \right\rangle) = \exp(2\pi \left\langle A^{-j} k \,| \zeta \right\rangle) \ ,$$

und somit

$$\begin{aligned} \left| m(B^{-j} z) \right| \ &\leq \ \sum_{k \in \mathsf{Z}^n} |h_k| \ \exp(2\pi \left\langle A^{-j} k \,| \zeta \right\rangle) \\ &\leq \ \|h\|_1 \ \exp(2\pi \left\langle A^{-j} k_j | \zeta \right\rangle) \end{aligned}$$

für ein $k_j \in \operatorname{supp} h$.

Wie in (5) folgt damit für $j_z > 0$

$$\begin{aligned} \left| \widehat{\phi}(z) \right| \ &\leq \ C \ \|h\|_1^{j_z} \cdot \prod_{j=1}^{j_z} \exp(2\pi \left\langle A^{-j} k_j | \zeta \right\rangle) \\ &\leq \ C \ \|z\|^{\frac{\ln \|h\|_1}{\ln r}} \cdot \exp \left(2\pi \left\langle \sum_{j=1}^{j_z} A^{-j} k_j | \zeta \right\rangle \right) \ . \end{aligned}$$

Da $0 \in \operatorname{supp} h$ und $k_j \in \operatorname{supp} h$ gilt

$$\sum_{j=1}^{j_z} A^{-j} k_j \in \sum_{j=1}^{\infty} A^{-j} (\operatorname{supp} h) \subset K \ ,$$

und damit folgt

$$\left| \widehat{\phi}(z) \right| \leq C \, \|z\|^{\frac{\ln \|h\|_1}{\ln r}} \cdot \exp 2\pi I_K(\zeta) \ .$$

Ist $j_z = 0$, so ist $\|z\| \leq r$, und da $I_K(\zeta) \geq 0$ gilt dann

$$\left| \widehat{\phi}(z) \right| \leq C \leq C \exp 2\pi I_K(\zeta) \ .$$

Aus dem Satz von Paley-Wiener in der Version von Hörmander [11], Vol. I, Th. 7.3.1 folgt somit $\operatorname{supp} \widehat{\phi} \subset K$. ¤

BEMERKUNG Ist $n = 1$, $A = 2$ und $N_1 = \inf \operatorname{supp} h$, $N_2 = \sup \operatorname{supp} h$, so folgt, indem man z.B. das Intervall $[N_1, N_2]$ auf das Einheitsintervall $[0, 1]$ transformiert

$$K_h = [N_1, N_2] \ .$$

Das Resultat $\operatorname{supp} \phi \subset [N_1, N_2]$ findet sich bereits bei Daubechies [4], Lemma 6.22, es lässt sich im allgemeinen auch nicht verbessern: Für

$$m = \frac{1}{2} e_{-N_1} + \frac{1}{2} e_{-N_2}$$

mit $N_1 < N_2$ erhält man durch direktes Nachprüfen, indem man $x \in [N_1, \frac{N_1+N_2}{2}[$ und $x \in [\frac{N_1+N_2}{2}, N_2[$ betrachtet, dass

$$\phi = \frac{1}{N_2 - N_1} \cdot 1_{[N_1,N_2[}$$

die Skalierungsgleichung (S) erfüllt und demnach die eindeutige (vgl. Hampel [9]) Skalierungsfunktion mit kompaktem Träger zu m ist.

Die Menge K_h ist im allgemeinen jedoch nicht konvex, ein Beispiel dazu ist der Twin-Dragon, der sich für $n = 2$, die Maske $h_{(0,0)} = 1/2$, $h_{(1,0)} = 1/2$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ergibt, vgl. z.B. Hampel [9], Abs. 2.C. Resultate von Gröchenig/Madych [6], Deslauriers et al. [5] und der "Kaskadenalgorithmus" (vgl. Daubechies [4], Sec. 6.5) deuten darauf hin, dass in Satz 2 die schärfere Aussage $\operatorname{supp}(\phi) \subset K_h$ gilt. Dies wird im nächsten Satz gezeigt, die Beweismethode ist eine Übertragung des Kaskadenalgorithmus.

SATZ 3 *Unter den Vorausetzungen in (13) gilt*

$$\operatorname{supp}(\phi) \subset K_h \; .$$

Beweis: Es sei wieder Œ $0 \in \operatorname{supp} h$ und sei $\widehat{\phi_\nu} := \prod_{j=1}^{\nu} m(B^{-j} \cdot)$.
Mit $\langle k | B^{-j}\omega \rangle = \langle A^{-j}k \,|\, \omega \rangle$ folgt

$$\begin{aligned} \widehat{\phi_\nu} &= \sum_{k_1,\dots,k_\nu \in \operatorname{supp} h} h_{k_1} \exp(-2\pi i \left\langle A^{-1}k_1 \,|\cdot \right\rangle) \cdot \ldots \cdot h_{k_\nu} \exp(-2\pi i \left\langle A^{-\nu}k_\nu \,|\cdot \right\rangle) \\ &= \sum_{k_1,\dots,k_\nu \in \operatorname{supp} h} h_{k_1} \cdot \ldots \cdot h_{k_\nu} \exp\left(-2\pi i \left\langle \sum_{j=1}^{\nu} A^{-j}k_j \,|\cdot \right\rangle \right) \; . \end{aligned}$$

Da $\widehat{\delta_x} = e_{-x}$ erhält man daraus

$$\phi_\nu = \sum_{k_1,\dots,k_\nu \in \operatorname{supp} h} h_{k_1} \cdot \ldots \cdot h_{k_\nu} \cdot \delta_{\sum_{j=1}^{\nu} A^{-j}k_j} \tag{16}$$

und wegen $0 \in \operatorname{supp} h$ folgt

$$\operatorname{supp} \phi_\nu \subset \sum_{j=1}^{\nu} A^{-j}(\operatorname{supp} h) \subset K_h \; .$$

Nach Lemma 2 konvergiert $\widehat{\phi_\nu}$ gegen $\widehat{\phi}$, also auch ϕ_ν gegen ϕ in $\mathcal{S}'$, also gilt für $\varphi \in \mathcal{S}$ mit $\operatorname{supp} \varphi \cap K_h = \emptyset$

$$\phi(\varphi) = \lim \phi_\nu(\varphi) = 0 \; ,$$

und damit die Behauptung. ¤

BEMERKUNG Ist $\mathcal{R} = \{\kappa_0, ..., \kappa_{a-1}\}$ ein Repräsentanten-System von $\mathsf{Z}^n/A\mathsf{Z}^n$ und $h_k = 1/a$ für $k \in \mathcal{R}$ und Null sonst, so ist $\sum_{j=1}^{\infty} A^{-j}\mathcal{R}$ die "Radix-Darstellung" von K_h und $\phi = 1_{K_h}$ ist die zugehörige Skalierungsfunktion, vgl Gröchenig/Madych [6], insbesondere ist $\operatorname{supp}\phi = K_h$.

Das folgende Beispiel zeigt andererseits, dass auch für $n = 1$ der Träger von ϕ nicht konvex sein muss. Es widerlegt nach der Bemerkung zu Satz 2 damit die zunächst naheliegende Vermutung, dass stets $\operatorname{supp}\phi = K_h$ gilt.

BEISPIEL 3 Sei $n = 1$, $A = 2$, so ist

$$\phi := \frac{1}{3}\left(1_{[0,1[} + 1_{[2,3[} + 1_{[4,5[}\right)$$

Skalierungsfunktion zur Maske

$$h_0 = h_1 = h_4 = h_5 = \frac{1}{2}\ , \quad h_2 = h_3 = -\frac{1}{2}\ , \quad h_k = 0 \ \text{ sonst.}$$

Die Maske erfüllt die Bedingungen in (13) und aus

$$1_{[l,l+1[}(2\cdot - k) = 1_{[\frac{l+k}{2},\frac{l+k+1}{2}[} =: 1_{l+k}$$

folgt

$$\begin{aligned} 2\sum h_k\phi(2\cdot -k) &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} [1_0 + 1_2 + 1_4] + [1_1 + 1_3 + 1_5] - [1_2 + 1_4 + 1_6] \\ -[1_3 + 1_5 + 1_7] + [1_4 + 1_6 + 1_8] + [1_5 + 1_7 + 1_9] \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\left([1_0 + 1_1] + [1_4 + 1_5] + [1_8 + 1_9]\right) = \phi\ . \end{aligned}$$

BEMERKUNG Setzt man

$$b_l^\nu := \sum_{k_1,...,k_\nu \in \mathsf{Z}^n,\, \sum_{j=1}^{\nu} A^{\nu-j}k_j = l} h_{k_1}\cdot ... \cdot h_{k_\nu}\ ,$$

so folgt aus (16)

$$\phi_\nu = \sum_{k_1,...,k_\nu \in \mathsf{Z}^n} h_{k_1}\cdot ... \cdot h_{k_\nu}\cdot \delta_{A^{-\nu}(\sum_{j=1}^{\nu} A^{\nu-j}k_j)} = \sum_{l\in \mathsf{Z}^n} b_l^\nu \delta_{A^{-\nu}l}\ , \tag{17}$$

und mit der Substitution $Ak + k_{\nu+1} = l$ erhält man

$$\begin{aligned} \phi_{\nu+1} &= \sum_{k_1,...,k_\nu,k_{\nu+1}\in \mathsf{Z}^n} h_{k_1}\cdot ... \cdot h_{k_\nu}\cdot h_{k_{\nu+1}}\cdot \delta_{A^{-(\nu+1)}(A(\sum_{j=1}^{\nu} A^{\nu-j}k_j)+k_{\nu+1})} \\ &= \sum_{k_{\nu+1}\in \mathsf{Z}^n}\sum_{k\in \mathsf{Z}^n} b_k^\nu \cdot h_{k_{\nu+1}}\cdot \delta_{A^{-(\nu+1)}(Ak+k_{\nu+1})} \\ &= \sum_{k\in \mathsf{Z}^n}\sum_{l\in \mathsf{Z}^n} b_k^\nu \cdot h_{l-Ak}\cdot \delta_{A^{-(\nu+1)}l}\ . \end{aligned}$$

Also gilt

$$b_l^{\nu+1} = \sum_{k \in \mathsf{Z}^n} b_k^\nu \cdot h_{l-Ak} \ .$$

Dies ist für $n = 1$ bis auf einen Normierungsfaktor genau die Koeffizientenformel aus dem Kaskadenalgorithmus bei Daubechies [4], (6.5.7), sie findet sich auch im Zusammenhang mit den Subdivision Schemes, vgl. z.B. Deslauriers et al. [5] und den Filterschemata beim Mallat-Algorithmus: Die Folge b_l^ν entsteht gerade durch sukzessive Anwendung des Filters $H_A : c \mapsto \sum_{k \in \mathsf{Z}^n} c_k \cdot h_{\cdot - Ak}$ auf die Anfangsfolge $(c^0) = (\delta_{0,k})$.

Aus der Darstellung in (17) erhält man auch eine weitere Verbesserung der Abschätzung von $\operatorname{supp} \phi$. Definiert man Q_h als Abschluss von

$$\{x \in A^{-\nu}\mathsf{Z}^n \,|\, b_{A^\nu x}^\nu \neq 0 \text{ für } \nu \geq \nu_0\} \ ,$$

so gilt nach (16) und (17)

$$\operatorname{supp} \phi \subset Q_h \subset K_h \ .$$

Eine elementare Rechnung zeigt, dass im Beispiel 4 gerade $\operatorname{supp} \phi = Q_h$ gilt.

Literatur

[1] N. K. Bary. *A Treatise on Trigonometric Series, Vol. I,II.* Pergamon Press, Oxford, 1964.

[2] A. Cohen. *Ondelettes, analyses multirésolutions et traitement numérique du signal.* PhD thesis, Université Paris IX Dauphine, 1990.

[3] S. Dahlke, K. Gröchenig, and P. Maass. A new approach to interpolating scaling functions. *Appl. Anal.*, 72:485–500, 1999.

[4] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets.* Number 61 in CBMS-NSF Series in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, 1992.

[5] G. Deslauriers, J. Dubois, and S. Dubuc. Multidimensional iterative interpolation. *Can. J. Math.*, 43(2):297–312, 1991.

[6] K. Gröchenig and W.R.Madych. Multiresolution analysis, Haar bases, and self-similiar tilings of R^n. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 38:556–568, 1992.

[7] W. Gromes and N. Saßmannshausen. Bemerkungen zum Cohen-Kriterium. Philipps-Universität Marburg, Fachbereich Mathematik, Bericht Nr. 86, 2001.

[8] W. Gromes and N. Saßmannshausen. Positivität und Spektrum des Übergangsoperators T_m. Philipps-Universität Marburg, Fachbereich Mathematik, Bericht

Nr. 84, 2001.

[9] R. Hampel. *Sampling-Theorie und Interpolierende Skalierungsfunktionen in höheren Dimensionen*. PhD thesis, Philipps-Universität Marburg, 2000.

[10] B. Han and R.-Q. Jia. Multivariate refinement equations and convergence of subdivision schemes. *SIAM J. Math. Anal.*, 29:1177–1199, 1998.

[11] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Vol. I-IV*. Springer, Berlin, 1983-1985.

[12] K. Knopp. *Theorie und Anwendung der Unendlichen Reihen*. Springer, Berlin, 5. edition, 1964.

[13] L. Kuipers and N. Niederreiter. *Uniform Distribution of Sequences*. Wiley, New York, 1974.

[14] A. K. Louis, P. Maaß, and A. Rieder. *Wavelets: Theorie und Anwendungen*. Teubner, Stuttgart, 1994.

[15] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw Hill, Inc., 1973.