Bemerkungen zum Cohen-Kriterium

Wolfgang Gromes Nils Saßmannshausen

13. November 2001

Abstract

In this paper we investigate the connection between Cohen's condition for a multivariate symbol m and three conditions concerning the behavior of the scaling function Φ induced by m and a general dilation matrix $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. The main result is for a nonnegative symbol the equivalence of Cohen's condition to the following zero-condition: The periodisation $\bar{\omega}(\hat{\Phi})$ of $\hat{\Phi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (which is a trigonometric polynomial) has no zeros. In special cases this equivalence was proved by Cohen, see [1], [2]. The conclusion from the zero-condition to Cohen's condition in the general case is postulated in Cohen et al. [3], but the proof seems to be incomplete and our arguments differ from those in the papers cited above. As a consequence we obtain the converse of a result of Lemarié-Rieusset on interpolating scaling functions, see [7], [10].

1 Einleitung

Es sei

- m ein trigonometrisches Polynom in $\mathbb{R}^n$ (das Symbol) mit $m(0) = 1$, $m = \sum h_k e_{-k} \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$, wobei für $k \in \mathbb{Z}^n$

  $$e_k : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C},\ \omega \mapsto e^{2\pi i < k|\omega >}$$

  der k-te Charakter und $\mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ der Raum der trigonometrischen Polynome auf $\mathbb{R}^n$ sei,

- $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ eine Dilatationsmatrix, B die Transponierte von A, $a := |\det A|$ und $\{\rho_0, \ldots, \rho_{a-1}\}$ ein Repräsentantensystem von ${}^{\mathbb{Z}^n}/_{B\mathbb{Z}^n}$ mit $\rho_0 = 0$,

- Φ die zugehörige Skalierungsfunktion, die durch

  $$\hat{\Phi} := \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\cdot) \tag{1.1}$$

  definiert ist.

Bekanntlich ist $\hat{\Phi} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und eine ganze Funktion von exponentiellem Typ, also ist $\Phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution mit kompaktem Träger, $\Phi \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ (vgl. z.B. Hampel [6], Satz 3.20).

Das nach A. Cohen benannte Kriterium wurde von Cohen in [1] eingeführt, um für $B = 2E$, wobei E die $n \times n$-Einheitsmatrix ist, diejenigen Symbole m zu charakterisieren, für welche die $\mathbb{Z}^n$-Translatierten von Φ eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R}^n)$ bilden. In allgemeiner Form besagt es folgendes:

(C0) Es existiert ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$, so daß gilt:

1. K enthält eine Umgebung des Ursprungs,
2. K ist $\mathbb{Z}^n$-Kachel,
3. $m(\omega) \neq 0$ für alle $\omega \in \bigcup_{j=1}^{\infty} B^{-j}K$.

Dabei heißt $K \subset \mathbb{R}^n$ eine $\mathbb{Z}^n$-Kachel, wenn

1. $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n}(k + K)$ fast überall,
2. $(k + K) \cap K = \emptyset$ fast überall für alle $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$.

Zwei äquivalente Ausagen zu (C0) wurden für $n = 1$ von Lemarié [9] bzw. Villemoes [12] aufgestellt, wobei auch Ideen von Cohen benutzt wurden. Diese Kriterien lauten:

(C1) $\hat{\Phi}$ hat in $\mathbb{R}^n$ keine $\mathbb{Z}^n$-periodischen Nullstellen.

(C2) Es existiert kein $\omega \in \mathbb{R}^n$ mit $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e_{-k}(\omega)\Phi(k - \cdot) = 0$ (in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)'$).

Für $\hat{\Phi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ betrachten wir als drittes Kriterium

(C3) $\bar{\omega}(\hat{\Phi})$ hat keine Nullstellen.

Dabei stimmt für $\hat{\Phi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ die Periodisierung $\bar{\omega}(\hat{\Phi}) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\Phi}(\cdot - k)$ nach der Poisson-Formel fast überall mit dem trigonometrischen Polynom $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \Phi(k)e_{-k}$ überein, vgl. Lemma 3.17 aus Hampel [6]:

$$\bar{\omega}(\hat{\Phi}) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\Phi}(\cdot - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \Phi(k)e_{-k} \text{ fast überall.} \tag{1.2}$$

Aussagen wie (C3) beziehen sich im folgenden stets auf diesen stetigen Repräsentanten.
Für den Spezialfall $\hat{\Phi} = |\hat{\Phi}_0|^2$ besagt (C3), daß $\Phi_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ stabil ist, d.h. die $\mathbb{Z}^n$-Translatierten von Φ_0 bilden eine Riesz-Basis von $L^2(\mathbb{R}^n)$. In diesem Fall wurde für ein orthogonales Symbol m, d.h. für

$$\sum_{i=0}^{a-1} |m(\cdot - B^{-1}\rho_i)|^2 = 1, \tag{1.3}$$

von Cohen gezeigt, daß (C0) auch zu (C3) äquivalent ist, vgl. [1], [2]. Die Aussage, daß auch im allgemeinen (C3) das Cohen-Kriterium impliziert, findet sich in Cohen et al. [3]. Der dort angebene Beweis scheint jedoch unvollständig zu sein.

In der vorliegenden Arbeit wird die Äquivalenz der vier Aussagen (C0) bis (C3) gezeigt und dabei die oben genannten Ergebnisse auf den mehrdimensionalen Fall übertragen. Dabei wird eine Beweislücke beim Schritt von (C1) nach (C0) geschlossen und die Aussage (C3)⇒(C1) ohne Zusatzvoraussetzungen bewiesen. Neben den orthogonalen Symbolen sind die interpolierenden Symbole m, d.h. Symbole mit

$$\sum_{i=0}^{a-1} m(\cdot - B^{-1}\rho_i) = 1 \tag{1.4}$$

von besonderem Interesse. Ein Satz von Lemarié-Rieusset, vgl. [7], [10], besagt, daß für ein nichtnegatives interpolierendes Symbol auch die zugehörige Skalierungsfunktion interpolierend ist, falls m das Cohen-Kriterium erfüllt. Dabei heißt Φ interpolierend, wenn Φ stetig ist und $\Phi(k) = \delta_{0,k}$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ gilt.

Eine Umkehrung dieser Aussage ist ebenfalls richtig. In Satz 4.1 wird ohne weitere Voraussetzungen an m gezeigt, daß das Symbol einer interpolierenden Skalierungsfunktion stets das Cohen-Kriterium erfüllt.

2 Die Kriterien (C1), (C2), (C3)

Wir zeigen in diesem Abschnitt die Äquivalenz dieser Kriterien. Dabei wird die Voraussetzung, daß Φ durch m erzeugt wird und damit eine Skalierungsfunktion ist, nicht benötigt. Es sei demnach zunächst nur $\Phi \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ vorausgesetzt.

Die Äquivalenz von (C1) und (C2) geht auf die, im Falle $n = 1$ bereits von Villemoes [12] benutzte Formel (2.1) zurück. Zur Vorbereitung benötigen wir zwei Hilfsätze. Dabei seien die Distributionsgrundräume $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)(= \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n))$ wie üblich (vgl. z.B. Donoghue [4]) definiert.

Lemma 2.1. *Für $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert $\bar{\omega}(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(\cdot - k)$ in $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ und die Abbildung $\bar{\omega} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ ist linear und stetig, $\bar{\omega} \in \mathcal{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \mathscr{E}(\mathbb{R}^n))$.*

Beweis: Für $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gibt es für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ein c_α mit

$$|\partial^\alpha \varphi(x - k)| \leq \frac{c_\alpha}{1 + |x - k|^{n+1}} \leq \frac{2^{n+1} c_\alpha}{|k|^{n+1}}$$

für alle $x \in I^n := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ und $k \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}$. Da $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n-\{0\}} c_\alpha/|k|^{n+1}$ konvergiert, folgt mit dem Majorantenkriterium, daß $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \partial^\alpha \varphi(x - k)$ für alle Multiindizes α gleichmäßig und absolut auf I^n konvergiert. Diese Aussage läßt sich wegen der $\mathbb{Z}^n$-Periodizität der obigen Reihen auf den gesamten $\mathbb{R}^n$ ausdehnen. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz lassen sich Differentiation und Summation vertauschen, also ist $\bar{\omega}(\varphi) \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\partial^\alpha(\bar{\omega}(\varphi)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \partial^\alpha \varphi(\cdot - k).$$

Es seien nun endliche Mengen $K_i \subset \mathbb{Z}^n$ mit $K_i \subset K_{i+1}$ und $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i = \mathbb{Z}^n$ gegeben. Da $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig und dicht in $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ eingebettet ist, ist

$$\bar{\omega}_i : \varphi \mapsto \sum_{k \in K_i} \varphi(\cdot - k)$$

in $\mathcal{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \mathscr{E}(\mathbb{R}^n))$. Nach den obigen Ausführungen konvergiert $\bar{\omega}_i(\varphi)$ in $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ gegen $\bar{\omega}(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Mit dem Satz von Banach-Steinhaus, vgl. Rudin [11] Theorem 2.8, folgt damit $\bar{\omega} \in \mathcal{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \mathscr{E}(\mathbb{R}^n))$. $\square$

Damit läßt sich die Periodisierung einer Distribution $\eta \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ durch

$$<\bar{\omega}(\eta), \varphi> := <\eta, \bar{\omega}(\varphi)> \text{ für alle } \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

definieren und es gilt $\bar{\omega} \in \mathscr{L}(\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n), \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n))$. Zudem sei die temperierte Distribution $\eta(\cdot - k)$ durch

$$<\eta(\cdot - k), \varphi> := <\eta, \varphi(\cdot + k)> \text{ für alle } \varphi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$$

definiert. Da $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\cdot - k)$ nach Lemma 2.1 in $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert, folgt

$$\begin{aligned} <\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \eta(\cdot - k), \varphi> &:= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} <\eta(\cdot - k), \varphi> = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} <\eta, \varphi(\cdot + k)> \\ &= <\eta, \bar{\omega}(\varphi)> = <\bar{\omega}(\eta), \varphi> \end{aligned}$$

und somit gilt $\bar{\omega}(\eta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \eta(\cdot - k)$ in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 2.2. *Für $\eta \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ gilt in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$*

$$\bar{\omega}(\eta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \eta(\cdot - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\eta}(k) e_k.$$

Beweis: Die erste Ausage ist bereits gezeigt. Für $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert die Fourierreihe der $\mathbb{Z}^n$-periodischen $\mathscr{C}^\infty$-Funktion $\bar{\omega}(\varphi)$ in $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$, vgl. Khoan [8], pp 68. Zudem stimmt nach der Poisson-Formel der k-te Fourierkoeffizient von $\bar{\omega}(\varphi)$ mit $\hat{\varphi}(k)$ überein. Da $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\varphi}(k) e_k$ somit in $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert, folgt

$$\begin{aligned} <\bar{\omega}(\eta), \varphi> &= <\eta, \bar{\omega}(\varphi)> = <\eta, \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\varphi}(k) e_k> = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} <\eta, e_k> \hat{\varphi}(k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\eta}(-k) <\varphi, e_{-k}> = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} <\hat{\eta}(k) e_k, \varphi>, \end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, daß für $\eta \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$< \eta, e_{-\omega} >= \hat{\eta}(w) \text{ für alle } \omega \in \mathbb{R}^n,$$

vgl. z.B. Donoghue [4], pp 148.
Es gilt also auch $\bar{\omega}(\eta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{\eta}(k)e_k$ in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. □

Folgerung 2.3. *Ist $\Phi \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, so gilt für alle $\omega \in \mathbb{R}^n$ in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$:*

$$e_\omega \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e_{-k}(\omega)\Phi(k-\cdot) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{\Phi}(\omega-k)e_k. \tag{2.1}$$

Beweis: Für die spezielle Wahl $\eta = e_\omega\Phi(-\cdot) \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\omega \in \mathbb{R}^n$ fest, gilt

$$\hat{\eta} = (e_\omega\Phi(-\cdot))\hat{} = (\Phi(-\cdot))\hat{}(\cdot-\omega) = \hat{\Phi}(\omega-\cdot) \tag{2.2}$$

und $\eta(\cdot-k) = e_{-k}(\omega)e_\omega\Phi(k-\cdot)$. Die Gleichung (2.1) folgt also aus Lemma 2.2. □

Satz 2.4. *Ist $\Phi \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, so ist* (C1) *äquivalent zu* (C2).

(C1)⇒(C2): Gilt (C2) nicht, so existiert nach Folgerung 2.3 ein $\omega \in \mathbb{R}^n$ mit $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{\Phi}(w-k)e_k = 0$ in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Wähle für $l \in \mathbb{Z}^n$ ein $\varphi_l \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi_l(k) = \delta_{k,l}$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}(w-l) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{\Phi}(w-k)\delta_{k,l} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{\Phi}(w-k)\delta_k(\varphi_l)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{\Phi}(w-k)e_k(\hat{\varphi}_l) =< \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{\Phi}(w-k)e_k, \hat{\varphi}_l >= 0,\end{aligned}$$

und dies gilt für jedes $l \in \mathbb{Z}^n$. $\hat{\Phi}$ besitzt also die $\mathbb{Z}^n$-periodische Nullstelle ω, d.h. (C1) gilt nicht.
(C2)⇒(C1) folgt direkt aus Folgerung 2.3. □

Den Zusammenhang mit (C3) gibt

Satz 2.5. *Sei $\Phi \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{\Phi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (und $\bar{\omega}(\hat{\Phi})$ das trigonometrische Polynom $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Phi(k)e_{-k}$, vgl.* (1.2)*), so gilt*

1. (C3)⇒(C1).

2. *Ist $\hat{\Phi} \geq 0$, so gilt auch* (C1)⇒(C3).

Beweis: 1. Sei $\hat{\Phi}(\omega - k) = 0$ für ein $\omega \in \mathbb{R}^n$ und alle $k \in \mathbb{Z}^n$. Da $\hat{\Phi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist Φ stetig mit kompaktem Träger, das gleiche gilt dann auch für $\Psi := \Phi(-\cdot)e_\omega$. Aus der Poisson-Formel und (2.2) folgt zunächst

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Psi(\cdot - k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{\Psi}(k)e_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{\Phi}(\omega - k)e_k = 0 \text{ fast überall,} \tag{2.3}$$

da die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Psi(\cdot - k)$ als lokal-endlich Summe stetiger Funktionen selbst stetig ist, gilt (2.3) überall in $\mathbb{R}^n$, also insbesondere auch im Nullpunkt. Insgesamt folgt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Phi(k)e_{-k}(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Phi(k)e_\omega(-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Psi(-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Psi(0-k) = 0.$$

Somit gilt $\bar{\omega}(\hat{\Phi})(\omega) = 0$.
2. Nach Voraussetzung gibt es für alle $\omega \in \mathbb{R}^n$ ein $k_\omega \in \mathbb{Z}^n$ mit $\hat{\Phi}(w - k_\omega) \neq 0$. Da $\hat{\Phi}$ stetig und nichtnegativ ist, existiert zu ω eine Umgebung U_ω und eine Konstante c_ω mit $\hat{\Phi}(\cdot - k_\omega) \geq c_\omega > 0$ in U_ω. Da $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{\Phi}(\cdot - k)$ fast überall gegen $\bar{\omega}(\hat{\Phi})$ konvergiert, gilt also wegen $\hat{\Phi} \geq 0$

$$\bar{\omega}(\hat{\Phi}) \geq c_w > 0 \text{ fast überall in } U_\omega. \tag{2.4}$$

Aus der Stetigkeit von $\bar{\omega}(\hat{\Phi})$ folgt, daß (2.4) in ganz U_ω gilt, man erhält also insbesondere $\bar{\omega}(\hat{\Phi})(\omega) > 0$. □

3 Die Äquivalenz zum Cohen-Kriterium (C0)

In diesem Abschnitt sei wie in der Einleitung Φ die Skalierungsfunktion, die von m und A erzeugt wird. In einem ersten Schritt wird (C0)⇒(C1) gezeigt. Wir geben zunächst elementare Umformulierungen der Bedingung 3. des Cohen-Kriteriums.

Bemerkung 3.1. Aus den Voraussetzungen an m folgt, daß $\prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\cdot)$ lokal gleichmäßig gegen die analytische Funktion $\hat{\Phi}$ konvergiert, vgl. Hampel [6], Satz 3.20. Da ein konvergentes unendliches Produkt genau dann Null ist, wenn mindestens ein Faktor gleich Null ist, folgt: Für ein Kompaktum K ist die Forderung 3. des Cohen-Kriteriums (C0) gleichbedeutend zu den folgenden äquivalenten Bedingungen

1. $m(B^{-j}\omega) \neq 0$ für alle $\omega \in K$ und $j \in \mathbb{N}$.
2. $\hat{\Phi}(\omega) \neq 0$ für alle $\omega \in K$.
3. Es gibt ein $c > 0$ mit $|\hat{\Phi}(\omega)| \geq c$ für alle $\omega \in K$.

Satz 3.2. *Aus dem Cohen-Kriterium* (C0) *folgt das Kriterium* (C1) *über die periodischen Nullstellen.*

Beweis: Erfüllt m das Cohen-Kriterium und gibt es ein $\omega \in \mathbb{R}^n$ mit $\hat{\Phi}(\omega-k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$, so gilt nach Bemerkung 3.1, 2.

$$K \cap (\omega - \mathbb{Z}^n) = \emptyset. \tag{3.1}$$

Sei nun $(\omega_i) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{\omega\}$ eine Folge mit $\omega_i \to \omega$ und $\omega_i = l_i + \kappa_i$ mit $l_i \in \mathbb{Z}^n$ und $\kappa_i \in K$. Eine solche Darstellung existiert, da K nach Voraussetzung eine $\mathbb{Z}^n$-Kachel ist. Wegen der Kompaktheit von K existiert eine konvergente Teilfolge (κ_{i_j}) mit $\kappa_{i_j} \to \kappa \in K$. Insgesamt folgt

$$\kappa = lim_{j\to\infty}\kappa_{i_j} = lim_{j\to\infty}\omega_{i_j} - lim_{j\to\infty}l_{i_j} = \omega - l \in K \cap (\omega - \mathbb{Z}^n)$$

und dies steht im Widerspruch zu (3.1). □

Für die Umkehrung von Satz 3.2 benötigen wir noch ein mengentheoretisches Lemma. Für meßbare Mengen A, $B \in \mathbb{R}^n$ sei

$$A \cong B \;:\Leftrightarrow\; A = B \text{ fast überall.}$$

Ferner sei $|A|$ das Lebesgue-Maß von A, $\overline{A}$ der topologische Abschluß und ∂A der Rand von A.

Lemma 3.3. 1. *Es seien $A_i \subset I^n$ meßbare Mengen mit $|\partial A_i| = 0$ für $i = 0, \ldots, N$ und $\bigcup_{i=0}^N A_i = I^n$. Sei*

$$S_0 := A_0,\; S_i := A_i \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} A_j \text{ für } i = 1, \ldots, N,$$

so ist $(S_i)_{i=0}^N$ eine meßbare Partition von I^n mit $|\partial S_i| = 0$.
2. *Ist $(S_i)_{i=0}^N$ eine meßbare Partition von I^n mit $|\partial S_i| = 0$, $k_i \in \mathbb{Z}^n$, $i = 0, \ldots, N$, so ist $K := \bigcup_{i=0}^N \overline{k_i + S_i}$ eine kompakte $\mathbb{Z}^n$-Kachel.*

Beweis: 1. Nach Definition ist (S_i) eine meßbare Partition von I^n. Da für A, $B \subset \mathbb{R}^n$

$$\partial A = \partial(\mathcal{C}A) \text{ und } \partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B,$$

gilt für $S := A \cap B$

$$\begin{aligned}\partial S = \partial(\mathcal{C}S) &= \partial(\mathcal{C}(A \cap B)) = \partial(\mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B)\\ &\subset \partial(\mathcal{C}A) \cup \partial(\mathcal{C}B) = \partial A \cup \partial B,\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\partial S_i = \partial(A_i \cap \mathcal{C}\bigcup_{j=0}^{i-1} A_j) \subset \partial A_i \cup \partial(\mathcal{C}\bigcup_{j=0}^{i-1} A_j))\\ = \partial A_i \cup \partial(\bigcup_{j=0}^{i-1} A_j) \subset \bigcup_{j=0}^{i} \partial A_j.\end{aligned}$$

Somit folgt $|\partial S_i| \leq \sum_{j=0}^{i} |\partial A_j| = 0$.
2. Als endliche Vereinigung von kompakten Mengen ist K kompakt. Zu $\omega \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $k \in \mathbb{Z}^n$ mit $\omega - k \in I^n$. Damit liegt $\omega - k$ in einem S_i, d.h

$$\omega \in (k - k_i) + k_i + S_i \subset (k - k_i) + K.$$

Es folgt $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^n}(k + K)$. Ferner ist

$$|\overline{k_i + S_i} \cap \overline{k_j + S_j}| \leq |(k_i + I^n) \cap (k_j + I^n)| = 0 \text{ für } k_i \neq k_j$$

und da $|\partial S_i| = 0$ gilt

$$|\overline{k + S_i} \cap \overline{k + S_j}| = |\overline{S_i} \cap \overline{S_j}| = |S_i \cap S_j| = 0 \text{ für } i \neq j \text{ und } k \in \mathbb{Z}^n.$$

Damit erhält man

$$|K| = \sum_{i=0}^{N} |\overline{k_i + S_i}| = \sum_{i=0}^{N} |\overline{S_i}| = \sum_{i=0}^{N} |S_i| = |I^n| = 1.$$

Für $\mathbb{R}^n \cong \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^n}(k+K)$ ist dies nach Lemma 1 aus Gröchenig/Madych [5] äquivalent zur zweiten Kachel-Eigenschaft, also ist $(k+K)\cap K \cong \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$. □

Satz 3.4. *Aus dem Kriterium* (C1) *folgt das Cohen-Kriterium* (C0).

Beweis: Es gelte (C1), für alle $\omega \in I^n$ gibt es also ein k_ω mit $\hat{\Phi}(\omega - k_\omega) \neq 0$, wegen $\hat{\Phi}(0) = 1$ kann man $k_\omega = 0$ für $\omega = 0$ wählen. Da $\hat{\Phi}$ stetig ist, gibt es für alle $\omega \in I^n$ eine offene Umgebung U_ω von ω mit

$$|\hat{\Phi}(\cdot - k_\omega)| \geq c_\omega > 0 \text{ in } U_\omega.$$

Die $(U_\omega)_{\omega\in I^n}$ bilden eine offene Überdeckung des Kompaktums K, es existieren also $\omega_0(=0), \omega_1, \dots, \omega_N$ mit $I^n \subset \bigcup_{i=0}^{N} U_{\omega_i}$. Im weiteren sei $k_i := k_{\omega_i}$, $i = 0, \dots, N$. Ist $0 < c \leq \min\{c_{\omega_0}, \dots, c_{\omega_N}\}$, so sind die Mengen

$$A_i := \{\omega \in \mathbb{R}^n : |\hat{\Phi}(\omega - k_i)| \geq c\} \cap I^n \quad i = 0, \dots, N.$$

meßbar und es gilt $\bigcup_{i=0}^{N} A_i = I^n$.
Da nach dem Lemma von Sard, siehe z.B. Zeidler [13] Proposition 4.55, die regulären Werte der $\mathscr{C}^\infty$-Funktion $|\hat{\Phi}|^2$ dicht in $\mathbb{R}$ liegen, kann c ferner so gewählt werden, daß c^2 regulärer Wert von $|\hat{\Phi}|^2$ ist.
Das Urbild von c^2 unter $|\hat{\Phi}|^2$ ist entweder leer oder eine $(n-1)$-dimensionale $\mathcal{C}^\infty$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, vgl. Zeidler [13], Theorem 4.J. In beiden Fällen ist diese Menge vom Maß Null. Da für alle $i = 0, \ldots, N$

$$\begin{aligned}\partial A_i &\subset \{\omega \in \mathbb{R}^n : |\hat{\Phi}(\omega - k_i)| = c\} \cup \partial I^n \\ &= (k_i + (|\hat{\Phi}|^2)^{-1}\{c^2\}) \cup \partial I^n,\end{aligned}$$

gilt dann $|\partial A_i| = 0$ für $i = 0, \ldots, N$. Somit sind für die A_i alle Voraussetzungen aus Lemma 3.3, 1. erfüllt. Definiert man also die Mengen S_i wie in Lemma 3.3, so ist $(S_i)_{i=0}^N$ eine meßbare Partition von I^n mit $|\partial S_i| = 0$ und $K := \bigcup_{i=0}^{N} \overline{k_i + S_i}$ ist nach Lemma 3.3, 2. eine kompakte $\mathbb{Z}^n$-Kachel.
Zu zeigen bleibt, daß dieses K auch die anderen Bedingungen aus (C0) erfüllt. K enthält mit $S_0 (= A_0)$ eine Umgebung der Null und nach Definition der A_i und da $S_i \subset A_i$ gilt $|\hat{\phi}(\omega)| \geq c$ für alle $\omega \in K$. Letzteres ist nach Bemerkung 3.1 gleichbedeutend zur Forderung 3. von (C0). □

Folgerung 3.5. *Es sei $m \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ mit $m(0) = 1$, für die erzeugte Skalierungsfunktion Φ gelte $\Phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann ist jede der Bedingungen* (C0)-(C2) *dazu äquivalent, daß Φ stabil ist.*

Beweis: Φ ist genau dann stabil (vgl. Satz 3.10 aus Hampel [6]), wenn Konstanten $0 < a \leq b < \infty$ existieren mit

$$a \leq \bar{\omega}(|\hat{\Phi}|^2) \leq b \text{ fast überall.}$$

Da $\bar{\omega}(|\hat{\Phi}|^2)$ stetig und $\mathbb{Z}^n$-periodisch ist, ist dies gleichbedeutend dazu, daß $\bar{\omega}(|\hat{\Phi}|^2)$ nullstellenfrei ist. Da

$$(\Phi * \overline{\Phi(-\cdot)})\hat{} = \hat{\Phi} \cdot (\overline{\Phi(-\cdot)})\hat{} = \hat{\Phi} \cdot \overline{\hat{\Phi}} = |\hat{\Phi}|^2, \tag{3.2}$$

ist nach (1.1) $\Phi * \overline{\Phi(-\cdot)}$ die Skalierungsfunktion zum Symbol $|m|^2$, für $\Phi * \overline{\Phi(-\cdot)}$ gelten also die Voraussetzungen von Satz 2.5. Somit ist die Stabilität von Φ nach den Ergebnissen aus Kapitel 2 zu den Bedingungen (C1) und (C2) äquivalent. Da m zudem genau dann das Cohen-Kriterium erfüllt, wenn dies auch für $|m|^2$ zutrifft, folgt mit Satz 3.2 und 3.4 auch die Äquivalenz zu (C0). □

4 Interpolierende und orthogonale Symbole

Für interpolierende Symbole (vgl. (1.4)) können wir jetzt u.a. die in der Einleitung erwähnte Unkehrung des Satzes von Lemarié-Rieusset zeigen. Es sei in diesem Abschnitt Φ stets durch m und A erzeugt.

Satz 4.1. 1. *Ist m interpolierend, erfüllt das Cohen-Kriterium und gilt $\hat{\Phi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist Φ interpolierend.*
2. *Ist Φ interpolierend, so ist m interpolierend und erfüllt das Cohen-Kriterium.*

Beweis: 1. Sei K die kompakte $\mathbb{Z}^n$-Kachel aus dem Cohen-Kriterium und sei für $j \in \mathbb{N}$

$$\hat{\Phi}_j := \prod_{i=1}^{j} m(B^{-i}\cdot) 1_{B^j K}. \tag{4.1}$$

Da K eine Umgebung der Null enthält, konvergiert $\hat{\Phi}_j$ punktweise gegen $\hat{\Phi}$. Nach Bemerkung 3.1 gibt es ein $c > 0$ mit $1_K \leq |\hat{\Phi}|/c$. Es gilt demnach

$$\begin{aligned}
|\hat{\Phi}_j| &= |\prod_{i=1}^{j} m(B^{-j}\cdot) 1_K(B^{-j}\cdot)| \\
&\leq \frac{1}{c} |\prod_{i=1}^{j} m(B^{-j}\cdot)\hat{\Phi}(B^{-j}\cdot)| = \frac{1}{c}|\hat{\Phi}| \in L^1(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Lebesgue konvergiert $\hat{\Phi}_j$ also in $L^1(\mathbb{R}^n)$ gegen $\hat{\Phi}$. Die Interpolationsbedingung an m ist äquivalent dazu, daß für den Übergangsoperator

$$T_m : \; L^2(\mathbb{T}^n) \mapsto L^2(\mathbb{T}^n), \; T_m f := \sum_{i=0}^{a-1} (mf)(B^{-1}(\cdot + \rho_i))$$

$T_m 1 = 1$ gilt. Damit folgt mit Satz 3.66 aus Hampel [6]

$$\int_{B^j I^n} \prod_{i=1}^{j} m(B^{-i}\omega) e_{-k}(\omega) d\omega =< T_m^j 1 | e_{-k} >_{\mathbb{T}^n} =< 1 | e_{-k} >= \delta_{0,k}. \tag{4.2}$$

Beachtet man, daß für eine stetige $\mathbb{Z}^n$-periodische Funktion f und eine kompakte $\mathbb{Z}^n$-Kachel K stets $\int_K f(\omega) d\omega = \int_{I^n} f(\omega) d\omega$ gilt, so erhält man für den k-ten Fourier-Koeffizienten von $\bar{\omega}(\hat{\Phi}_j)$:

$$\begin{aligned}
c_k(\bar{\omega}(\hat{\Phi}_j)) &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\Phi}_j(\omega) e_{-k}(\omega) d\omega = \int_{B^j K} \prod_{i=1}^{j} m(B^{-i}\omega) e_{-k}(\omega) d\omega \\
&= a^j \int_K \prod_{i=1}^{j} m(B^{j-i}\omega) e_{-k}(B^j\omega) d\omega \\
&= a^j \int_{I^n} \prod_{i=1}^{j} m(B^{j-i}\omega) e_{-k}(B^j\omega) d\omega = \delta_{0,k}
\end{aligned}$$

Mit $\hat{\Phi}_j \to \hat{\Phi}$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, der Stetigkeit der Fourier-Transformation auf $L^1(\mathbb{T}^n)$ und von $\bar{\omega} : L^1(\mathbb{R}^n) \mapsto L^1(\mathbb{T}^n)$ gilt für den k-ten Fourier-Koeffizienten von $\bar{\omega}(\hat{\Phi})$ ebenfalls $c_k(\bar{\omega}(\hat{\Phi})) = \delta_{0,k}$. Nach (1.2) ist dies äquivalent dazu, daß Φ interpolierend ist.
2. Ist das Cohen-Kriterium nicht erfüllt, so gibt es nach Satz 2.4 ein $\omega \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e_{-k}(\omega)\Phi(k-\cdot) = 0 \quad \text{in } \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Φ kann also nicht interpolierend sein, da ansonsten

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e_{-k}(\omega)\Phi(k) = \Phi(0) = 1$$

gelten würde.
Da Φ interpolierend ist, folgt aus der Skalierungsgleichung

$$\delta_{0,k} = \Phi(k) = a\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} h_l\Phi(Ak-l) = ah_{Ak} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}^n,$$

und dies ist äquivalent dazu, daß m interpolierend ist, vgl. Hampel [6], Lemma 3.29. □

Bemerkung 4.2. Ist $m \geq 0$ interpolierend, so ist $\hat{\Phi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$: Definiert man die Φ_j wie in (4.1) (mit $K = I^n$), so konvergieren die $\hat{\Phi}_j$ wieder punktweise gegen $\hat{\Phi}$. Es gilt zudem $\hat{\Phi}_j \geq 0$ und somit folgt analog wie in (4.2)

$$\|\hat{\Phi}_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{B^jI^n} \prod_{i=1}^{j} m(B^{-i}\omega)d\omega =< T_m^j 1|1 >_{\mathbb{T}^n}= 1.$$

Mit dem Lemma von Fatou folgt also $\hat{\Phi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Für den orthogonalen Fall erhalten wir damit einfach die Verallgemeinerung der Aussage von Cohen [1]. Sei m orthogonal, also $|m|^2$ interpolierend. Da

$$|\hat{\Phi}|^2 = \prod_{j=1}^{\infty}|m|^2(B^{-1}\cdot),$$

ist nach Bemerkung 4.2 $|\hat{\Phi}|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, also $\hat{\Phi} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, und da nach (3.2)

$$(\Phi * \overline{\Phi(-\cdot)})\hat{} = |\hat{\Phi}|^2$$

folgt aus Satz 4.1: $\Phi * \overline{\Phi(-\cdot)}$ ist interpolierend, genau wenn $|m|^2$ das Cohen-Kriterium erfüllt. Letzteres ist äquivalent dazu, daß m das Cohen-Kriterium erfüllt, und da

$$(\Phi * \overline{\Phi(-\cdot)})(k) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(k-x)\overline{\Phi(-x)}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x+k)\overline{\Phi(x)}dx$$

ist $\Phi * \overline{\Phi(-\cdot)}$ interpolierend, genau wenn die $\left\{\Phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}^n\right\}$ ein Orthonormalsystem bilden. Es gilt also die

Folgerung 4.3. *m sei orthogonal. Dann ist äquivalent:*

1. *m erfüllt das Cohen-Kriterium bzgl. A.*
2. *Die $\mathbb{Z}^n$-Translatierten von Φ bilden eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Literatur

[1] A. Cohen. Ondelettes, analyses multirésolution et filtres miroirs en quadrature. *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse non lineaire*, 7:439–459, 1990.

[2] A. Cohen. *Ondelettes, analyses multirésolutions et traitement numérique du signal.* PhD thesis, Université Paris IX Dauphine, 1990.

[3] A. Cohen, I. Daubechies, and J. Feauveau. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 45:485–560, 1992.

[4] W. Donoghue. *Distributions and Fourier transforms.* Academic Press, New York, 1969.

[5] K. Gröchenig and W.R.Madych. Multiresolution analysis, Haar bases, and self-similiar tilings of $\mathbb{R}^n$. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 38:556–568, 1992.

[6] R. Hampel. *Sampling-Theorie und Interpolierende Skalierungsfunktionen in höheren Dimensionen.* PhD thesis, Philipps-Universität Marburg, 2000.

[7] J.-P. Kahane and P.-G. Lemarié-Rieusset. *Fourier Series and Wavelets.* Gordon and Breach Science Publishers, Luxembourg, 1995.

[8] V. Khoan. *Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles*, volume 2. Librairie Vuibert, Paris, 1972.

[9] P.G. Lemarié. Fonctions a support compact dans les analyses multirèsolutions. *Revista Mat. Iberoamericana*, 7:157–182, 1991.

[10] P.-G. Lemarié-Rieusset. Polynômes de bernstein en théorie des ondelettes. *C. R. Acad Sci. Paris*, 319, 1994.

[11] Walter Rudin. *Functional Analysis.* McGraw Hill, Inc., 1973.

[12] L. F. Villemoes. Wavelet analysis of refinement equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 25:1419–1460, 1994.

[13] E. Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications I.* Springer, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris , Tokyo, 1986.