Positivität und Spektrum des Übergangsoperators T_m

Wolfgang Gromes Nils Saßmannshausen

21. November 2001

Abstract

We present a systematic study of the transfer operator T_m for a nonnegative in general multivariate and nonseparable symbol m with positive Strang-Fix order L. The main result is that the spectrum of T_m separates in an algebraic part, where the eigenvalues are powers of the eigenvalues of the dilation matrix A and the eigenfunctions have zero order smaller than L. The other part contains a positive, algebraicially simple eigenvalue with a eigenfunction interior to K_L, the positive cone. Several examples are given, where the necessary conditions for m are fulfilled.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Der enge Zusammenhang zwischen dem Übergangsoperator T_m eines Symbols m und der von m erzeugten Skalierungsfunktion Φ bzgl. einer Dilationsmatrix A ist in mehreren Arbeiten, z.B von Cohen et al. [4], Cohen/Daubechies [3], Jia [12], Lawton et al. [14] untersucht worden, weitere Literaturhinweise finden sich in diesen Arbeiten.
Zentral sind dabei die Spektraleigenschaften von T_m, insbesondere der Eigenraum zum Eigenwert 1 und der Spektralradius von $T_m|_{E_L}$ auf geeigneten invarianten Unterräumen E_L, aus dem sich sich der Sobolevexponent von Φ ergibt, vgl. Cohen et al. [4], Theorem 3.1, Theorem 3.2.

In dieser Arbeit untersuchen wir systematisch das Spektrum von T_m für ein nichtnegatives, im Allgemeinen multidimensionales und nichtisotropes Symbol $m \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$. Nichtnegative Symbole treten bei vielen konkreten Konstuktionen auf, vgl. Kapitel 8, sie eröffnen die Anwendung der Theorie positiver Operatoren, die schon in Cohen/Daubechies [3] benutzt werden. Die Resultate enthalten in direkter Weise entsprechende Ergebnisse über nicht notwendig positive Symbole, vgl. Bemerkung 2.12.

Ausgangspunkt der Arbeit ist die Übertragung und teilweise Verallgemeinerung von Resultaten aus Cohen et al. [4] auf den Fall $m \geq 0$ und damit die L^1-Theorie: Ist $m \geq 0$ und $\bar{\omega}(\hat{\Phi})$ die Periodisierung von $\hat{\Phi}$, so ist äquivalent (vgl Satz 2.9)

1. $\hat{\Phi} \in L^1$ mit $\bar{\omega}(\hat{\Phi}) > 0$.

2. $\hat{\Phi} \in L^1$ und m erfüllt das Cohen-Kriterium.

3. 1 ist algebraisch einfacher Eigenwert von T_m mit Eigenfunktion $f_1 > 0$,

wobei man $f_1 = \bar{\omega}(\hat{\Phi})$ wählen kann, falls eine der obigen Bedingung gilt. Das Resultat wird in den Kapiteln 6 und 7 für Symbole mit Strang-Fix-Ordnung L in zwei Richtungen verallgemeinert:
Ist E_L ein T_m-invarianter Unterraum der Nullstellenordnung L, so gilt unter geeigneten Voraussetzungen an E_L und m, daß $T_m|_{E_L}$ stark positiv ist und somit der Spektralradius ϱ_{E_L} vom $T_m|_{E_L}$ wieder ein algebraisch einfacher Eigenwert mit einer Eigenfunktion im Inneren des zugehörigen Positivitätskegels ist.
In Kapitel 7 wird gezeigt, daß die Eigenwerte zu Eigenfunktionen mit Nullstellenordnung kleiner als L Potenzen der Eigenwerte von A sind, und daß für hinreichend reguläres Φ zugehörige Eigenfunktionen existieren, die eine konkrete Darstellung ähnlich der in 3. haben.

Die Kapitel 3 bis 5 dienen im wesentlichen der Vorbereitung des Kapitels 6. In Kapitel 3 werden Regularitätsaussagen für Φ hergeleitet und daraus gefolgert, wann der Spektralradius unabhängig von E_L ist. In Kapitel 4 werden Struktur

und Dimension T_m-invarianter Unterräume trigonometrischer Polynome untersucht, Kapitel 5 stellt die wesentlichen Sätze über positve Operatoren auf geordneten Banachräumen bereit. Im letzten Kapitel werden Standardbeispiele positiver Symbole diskutiert und nachgewiesen, daß dafür stets die Voraussetzungen aus Kapitel 6 erfüllt sind.
Für das folgende legen wir noch einige Bezeichnungen fest:
Es seien für $k \in \mathbb{Z}^n$

$$e_k : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C},\ \omega \mapsto e^{2\pi i <k|\omega>}$$

die Charaktere, $\mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ sei der Raum der trigonometrischen Polynome auf dem $\mathbb{R}^n$. $m = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} h_k e_{-k} \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ mit $m(0) = 1$ das Symbol, $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ die Dilationsmatrix, d.h. alle Eigenwerte von A haben Betrag größer als 1, $B := A^t$, $\{\rho_0 = 0, \ldots, \rho_{a-1}\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem von ${}^{\mathbb{Z}^n}/_{B\mathbb{Z}^n}$ und Φ die Skalierungsfunktion bzgl. m und A, wobei $\hat{\Phi} := \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\cdot)$ ist. Bei der Integration wird der Torus $\mathbb{T}^n$ mit dem Einheitsquadrat $I^n = [-1/2, 1/2]^n$ identifiziert. $|\cdot|$ bezeichne die 1-Norm auf dem $\mathbb{R}^n$.

2 Der Eigenwert 1 des Übergangsoperators

Definition 2.1.

$$T_m : \ \mathscr{P}(\mathbb{T}^n) \ni f \mapsto \sum_{i=0}^{a-1} (mf)(B^{-1}(\cdot + \rho_i))$$

heißt der *Übergangsoperator* bzgl. m.

Der folgende Satz stellt die grundlegende Eigenschaften des Übergangsoperators zusammen; zum Beweis vgl. z.B.Hampel [10], Satz 3.66.

Satz 2.2. *Es seien f, $g \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ mit $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k e_{-k}$. Dann gilt:*

1. *$T_m f$ ist wiederum ein trigonometrisches Polynom, genauer gilt:*

$$T_m f = a \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} h_k c_{Al-k} \Big) e_{-l}.$$

2. *Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt*

$$< T^j f | g >_{\mathbb{T}^n} := \int_{\mathbb{T}^n} T^j f \bar{g} = \int_{B^j I^n} \Big(\prod_{i=1}^{j} m(B^{-i}\omega) \Big) f(B^{-j}\omega) \bar{g}(\omega) d\omega.$$

Lemma 2.3. *Für $\hat{\Phi} \in L^1$ ist $\bar{\omega}(\hat{\Phi}) \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ und $\bar{\omega}(\hat{\Phi})$ ist eine Eigenfunktion von T_m zum Eigenwert 1. Zudem gilt $\bar{\omega}(\hat{\Phi})(0) = 1$.*

Bemerkung 2.4. $\bar{\omega}(\hat{\Phi})$ ist für $\hat{\Phi} \in L^1$ zunächst nur ein Element aus $L^1(\mathbb{T}^n)$. Die Aussage, daß $\bar{\omega}(\hat{\Phi})$ ein trigonometrisches Polynom ist, bedeutet, daß $\bar{\omega}(\hat{\Phi})$ einen Repräsentanten besitzt, der ein trigonometrische Polynom ist (wobei im Allgemeinen $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{\Phi}(\cdot - k)$ fast überall gegen diesen Repräsentanten konvergiert). Analog sind Aussagen wie $\bar{\omega}(\hat{\Phi})$ ist stetig, $\bar{\omega}(\hat{\Phi}) > 0$ oder $\bar{\omega}(\hat{\Phi})(0) = 1$ zu verstehen.

Beweis: Nach Lemma 3.17 aus Hampel [10] ist $\bar{\omega}(\hat{\Phi})$ für $\hat{\Phi} \in L^1$ ein trigonometrisches Polynom mit $\bar{\omega}(\hat{\Phi}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Phi(k)e_{-k}$. Damit folgt mit Satz 2.2 1. und der Skalierungseigenschaft von Φ

$$\begin{aligned} T_m\bar{\omega}(\hat{\Phi}) &= T_m\big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Phi(k)e_{-k}\big) = a\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} h_k\Phi(Al-k)\Big)e_{-l} \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \Phi(l)e_{-l} = \bar{\omega}(\hat{\Phi}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Nach Hampel [10], Folgerung 3.28, gilt $\hat{\Phi}(k) = \delta_{0,k}$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$. Aus der Poisson-Formel folgt also

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Phi(\cdot - k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{\Phi}(k)e_k(\cdot) = 1 \text{ fast überall.} \tag{2.2}$$

Wegen $\Phi \in \mathscr{C}_c$ konvergiert $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Phi(\cdot - k)$ sogar punktweise überall und ist als lokal-endliche Summe stetiger Funktionen selbst stetig. Also gilt (2.2) sogar für alle $x \in \mathbb{R}^n$, insbesondere auch für $x = 0$. Somit folgt

$$\bar{\omega}(\hat{\Phi})(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Phi(k)e_{-k}(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Phi(-k) = 1.$$

Also ist $\bar{\omega}(\hat{\Phi}) \neq 0$ nach (2.1) demnach eine Eigenfunktion von T_m zum Eigenwert 1. $\square$

Lemma 2.5. *Es sei $m \geq 0$, $\hat{\Phi} \in L^1$ und $\bar{\omega}(\hat{\Phi}) > 0$. Dann gilt für alle f, $g \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$:*

$$< T_m^j f | g >_{\mathbb{T}^n} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{\Phi}(\omega)}{\bar{\omega}(\hat{\Phi})(B^{-j}\omega)} f(B^{-j}\omega)\bar{g}(\omega)d\omega.$$

Bemerkung 2.6. Da nach Lemma 2.3 $\bar{\omega}(\hat{\Phi})$ ein trigonometrisches Polynom ist, gilt $\bar{\omega}(\hat{\Phi}) > 0$ genau dann, wenn $\inf \bar{\omega}(\hat{\Phi}) > 0$ ist.

Beweis: Nach Voraussetzung und der obigen Bemerkung gilt $w := \hat{\Phi}/\bar{\omega}(\hat{\Phi}) \in L^1$ und nach Definition der Periodisierung ist $\bar{\omega}(w) = 1$. Aus Satz 2.2 folgt also für alle f, $g \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$

$$< T_m^j f | g >_{\mathbb{T}^n} = \int\limits_{B^j I^n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{\hat{\Phi}(B^{-j}\omega - k)}{\bar{\omega}(\hat{\Phi})(B^{-j}\omega)} \Big(\prod_{i=1}^{j} m(B^{-i}\omega)\Big) f(B^{-j}\omega)\bar{g}(\omega)d\omega.$$

Wegen $m \geq 0$ ist auch $\hat{\Phi} \geq 0$ und demnach ist

$$\sum_{|k| \leq N} \frac{\hat{\Phi}(B^{-j}\omega - k)}{\bar{\omega}(\hat{\Phi})(B^{-j}\omega)} \prod_{i=1}^{j} m(B^{-i}\omega) \leq 1 \cdot \hat{\Phi}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$. Somit erhält man mit dem Satz von Lebesgue und der $\mathbb{Z}^n$-Periodizität von m, f, g und $\bar{\omega}(\hat{\Phi})$

$$\begin{aligned}
< T_m^j f | g >_{\mathbb{T}^n} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int\limits_{B^j I^n} \frac{\hat{\Phi}(B^{-j}\omega - k)}{\bar{\omega}(\hat{\Phi})(B^{-j}\omega)} \Big(\prod_{i=1}^{j} m(B^{-i}\omega) \Big) f(B^{-j}\omega) \bar{g}(\omega) d\omega \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int\limits_{B^j I^n - B^j k} \frac{\hat{\Phi}(B^{-j}\omega)}{\bar{\omega}(\hat{\Phi})(B^{-j}\omega)} \Big(\prod_{i=1}^{j} m(B^{-i}\omega) \Big) f(B^{-j}\omega) \bar{g}(\omega) d\omega \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{\Phi}(\omega)}{\bar{\omega}(\hat{\Phi})(B^{-j}\omega)} f(B^{-j}\omega) \bar{g}(\omega) d\omega.
\end{aligned}$$

□

Die folgende Definition liefert für $\hat{\Phi} \in L^1$ und $m \geq 0$ ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, daß $\bar{\omega}(\hat{\Phi}) > 0$ erfüllt ist.

Definition 2.7 (Cohen-Kriterium). Das Symbol m erfüllt das Cohen-Kriterium (bzgl. A), falls ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ existiert, so daß gilt:

1. K enthält eine Umgebung des Ursprungs.
2. K ist $\mathbb{Z}^n$-Kachel, d.h. es gilt
   i) $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in Z^n} (k + K)$.
   ii) $(k + K) \cap K$ ist eine Nullmenge für alle $k \neq 0$.
3. $m(\omega) \neq 0$ für alle $\omega \in \bigcup_{j=1}^{\infty} B^{-j} K$.

Bemerkung 2.8. 1. Die $\mathbb{Z}^n$-Kachel Eigenschaft von K besagt eigentlich nur, daß $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} (k + K)$ mit $\mathbb{R}^n$ bis auf eine Menge vom Maß Null übereinstimmt, vgl. z.B Gröchenig/Madych [8]. Ist K jedoch kompakt, so gilt sogar Gleichheit überall: Es sei dazu $\omega \in \mathbb{R}^n$ und $(\omega_i) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{\omega\}$ eine Folge mit $\omega_i \to \omega$ und $\omega_i = l_i + \kappa_i$ mit $l_i \in \mathbb{Z}^n$ und $\kappa_i \in K$. Eine solche Folge existiert, da K nach Voraussetzung eine $\mathbb{Z}^n$-Kachel ist. Wegen der Kompaktheit von K existiert eine konvergente Teilfolge (κ_{i_j}) mit $\kappa_{i_j} \to \kappa \in K$. Somit muß auch (l_{i_j}) gegen ein $l \in \mathbb{Z}^n$ konvergieren. Insgesamt folgt

$$\omega = \lim_{j \to \infty} w_{i_j} = l + \kappa \in l + K,$$

d.h. $\omega \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} (k + K)$.

2. Besitzt m z.B. nur Nullstellen in den Punkten $B^{-1}\rho_i + \mathbb{Z}^n$, $i = 1, \ldots, a-1$, so erfüllt m die Cohen-Bedingung mit $K = I^n = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$. Die Bedingungen 1. und 2. aus Definition 2.7 sind trivialerweise erfüllt. Nach Voraussetzung hat m zudem in der Null keine Nullstelle. Zum Nachweis von 3. betrachte man also $\omega \in K \setminus \{0\}$ und $j \in \mathbb{N}^*$. In diesem Fall ist ω nicht aus $\mathbb{Z}^n$ und insbesondere kein Element von $B^{j-1}\rho_i + B^j\mathbb{Z}^n$ für $i \neq 0$. Folglich ist $B^{-j}\omega \notin B^{-1}\rho_i + \mathbb{Z}^n$ für alle $i = 1, \ldots, a-1$. Es gilt also $m(B^{-j}\omega) \neq 0$ und somit auch 3. aus Definition 2.7.

Satz 2.9. *Es sei $m \geq 0$ und $E \subset \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ ein endlich-dimensionler, T_m-invarianter Unterraum, der alle Eigenfunktionen vom T_m zum Eigenwert 1 enthält, die trigonometrische Polynome sind. Dann ist äquivalent:*

1. *$\hat{\Phi} \in L^1$ mit $\bar{\omega}(\hat{\Phi}) > 0$.*
2. *$\hat{\Phi} \in L^1$ und m erfüllt das Cohen-Kriterium.*
3. *1 ist Eigenwert von $T_m|_E$ der algebraischen Vielfachheit 1 und es existiert eine Eigenfunktion $f_1 > 0$ zum Eigenwert 1.*

Gilt eine der obigen äquivalenten Bedingungen, so kann man $f_1 = \bar{\omega}(\hat{\Phi})$ wählen.

Beweis: Für 1. $\Leftrightarrow$ 2. vgl. Gromes/Saßmannshausen [9] und die dort angegebene Literatur.
3. $\Rightarrow$ 2.: Es sei o.E. $f_1(0)$=1. Setzt man für $j \in \mathbb{N}$

$$\hat{\Phi}_j := \prod_{i=1}^{j} m(B^{-i}\cdot) 1_{B^j I^n} f_1(B^{-j}\cdot),$$

so ist $\hat{\Phi}_j \geq 0$ und $\hat{\Phi}_j \in L^1$. Es sei ein $\omega \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben. Da der Spektralradius $\varrho(B^{-1}) > 1$ ist, gilt $B^{-j}\omega \to 0$, insbesondere existiert ein $J(\omega)$ mit $\omega \in B^j I^n$ für $j > J(\omega)$. Damit folgt

$$\hat{\Phi}_j(\omega) = \prod_{i=1}^{j} m(B^{-i}\omega) f_1(B^{-j}\omega) \to \hat{\Phi}(\omega) f_1(0) = \hat{\Phi}(\omega) \text{ für } j \to \infty,$$

d.h $\hat{\Phi}_j$ konvergiert punktweise gegen $\hat{\Phi}$. Außerdem gilt nach Voraussetzung und Satz 2.2 2.

$$< f_1|1 >_{\mathbb{T}^n} = < T_m^j f_1|1 >_{\mathbb{T}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\Phi}_j(\omega) d\omega = \|\hat{\Phi}_j\|_{L^1}.$$

Da $\hat{\Phi} \geq 0$ ist, erhält man mit dem Lemma von Fatou insgesamt $\hat{\Phi} \in L^1$ und $\|\hat{\Phi}\|_{L^1} =< f_1|1 >_{\mathbb{T}^n}$.
Nach Lemma 2.3 und da $m \geq 0$ ist $\bar{\omega}(\hat{\Phi})$ eine nichtnegative Eigenfunktion zum Eigenwert 1 mit $\bar{\omega}(\hat{\Phi})(0) = 1$. Nach 3. folgt also $\bar{\omega}(\hat{\Phi}) = f_1 > 0$.

2. $\Rightarrow$ 1.: Nach Lemma 2.3 ist $f_1 := \bar{\omega}(\hat{\Phi})$ Eigenfunktion zum Eigenwert 1 mit $\bar{\omega}(\hat{\Phi})(0) = 1$. Damit gilt für alle $f, g \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ und $j \to \infty$

$$\frac{f(B^{-j}\cdot)}{\bar{\omega}(\hat{\Phi})(B^{-j}\cdot)}\hat{\Phi}\bar{g} \to f(0)\hat{\Phi}\bar{g} \in L^1 \text{ punktweise.}$$

Nach 1. ist $f(B^{-j}\cdot)\bar{g}/\bar{\omega}(\hat{\Phi})(B^{-j}\cdot)$ beschränkt, da $\hat{\Phi} \in L^1$ folgt mit dem Satz von Lebesgue und Lemma 2.5 für alle $f, g \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} < T_m^j f | g >_{\mathbb{T}^n} &= \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{\Phi}(\omega)}{\bar{\omega}(\hat{\Phi})(B^{-j}\omega)} f(B^{-j}\omega)\bar{g}(\omega)d\omega \\
&= f(0) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\Phi}(\omega)\bar{g}(\omega)d\omega \\
&= f(0) < \bar{\omega}(\hat{\Phi}) | g >_{\mathbb{T}^n},
\end{aligned} \tag{2.3}$$

letzteres mit dem Satz von Beppo Levi nach Definition der Periodisierung von $\hat{\Phi}$. Es folgt also $f = f(0)\bar{\omega}(\hat{\Phi})$ für alle $f \in E$ mit $T_m f = f$, d.h. die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 1 von T_m ist 1.
Ist die algebraische Vielfachheit r des Eigenwerts 1 größer als 1, so existiert eine Basis $\{f_1, \ldots, f_r\}$ des Hauptraumes $H(1, T_m)$ mit $T_m f_k = f_k + f_{k-1}$ für $k = 2, \ldots, r$, o.E. sei $f_1 = \bar{\omega}(\hat{\Phi})$. Demnach ist $T_m^j f_2 = f_2 + j f_1$ für alle j, also auch

$$< T_m^j f_2 | f_1 >_{\mathbb{T}^n} = < f_2 | f_1 >_{\mathbb{T}^n} + j < f_1 | f_1 >_{\mathbb{T}^n} .$$

Wegen $< f_1 | f_1 >_{\mathbb{T}^n} \neq 0$ ist $\lim_{j\to\infty} |< T_m^j f_2 | f_1 >_{\mathbb{T}^n}| = \infty$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu (2.3), da

$$\lim_{j\to\infty} |< T_m^j f_2 | f_1 >_{\mathbb{T}^n}| = |f_2(0)| \; |< f_1 | f_1 >_{\mathbb{T}^n}| < \infty.$$

□

Korollar 2.10. *Es sei $m \geq 0$. Dann ist $\hat{\Phi}$ genau dann in L^1, falls ein nichtnegatives $f_1 \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ mit $T_m f_1 = f_1$ und $f_1(0) \neq 0$ existiert.*

Beweis: Ist $\hat{\Phi} \in L^1$, so ist $f_1 := \bar{\omega}(\hat{\Phi})$ nach Lemma 2.3 und wegen $m \geq 0$ nichtnegative Eigenfunktion von T_m zum Eigenwert 1 mit $f_1(0) = 1$. Existiert umgekehrt ein solches f_1, so folgt $\hat{\Phi} \in L^1$ direkt aus dem ersten Teil des Beweises von Satz 2.9.

Korollar 2.11. *Es sei $m \geq 0$ und $\hat{\Phi} \in L^1$ mit $\bar{\omega}(\Phi) > 0$. Ist $f \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ eine Eigenfunktion von T_m zum Eigenwert λ, so gilt entweder $f(0) \neq 0$ und $\lambda = 1$ oder $f(0) = 0$ und $|\lambda| < 1$.*

Beweis: Nach Voraussetzung gilt $< T_m^j f|g >_{\mathbb{T}^n} = \lambda^j < f|g >_{\mathbb{T}^n}$ für alle $g \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$. Da ein g existiert mit $< f|g >_{\mathbb{T}^n} \neq 0$, konvergiert nach (2.3) die Folge $(\lambda^j)_{j\in\mathbb{N}}$ für $j \to \infty$ gegen eine reelle Zahl c. Man hat also entweder $|\lambda| < 1$ und $c = 0$ oder $\lambda = 1$ und $c = 1$. Außerdem gilt für alle $g \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$

$$c < f|g >_{\mathbb{T}^n} = \lim_{j\to\infty} \lambda^j < f|g >_{\mathbb{T}^n} = \lim_{j\to\infty} < T_m^j f|g >_{\mathbb{T}^n} = f(0) < \bar{\omega}(\hat{\Phi})|g >_{\mathbb{T}^n} .$$

Es folgt $f(0)\bar{\omega}(\hat{\Phi}) = cf$ und damit wegen $\bar{\omega}(\hat{\Phi}) > 0$ und $f \neq 0$ die Behauptung. □

Bemerkung 2.12. 1. Ist $m_0 \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ ein Symbol mit zugehöriger Skalierungsfunktion Φ_0 und hat $m := |m_0|^2$ die Skalierungsfunktion Φ, so gilt $\hat{\Phi} = |\hat{\Phi}_0|^2$. Der Satz 2.9 bzw. die Korollare 2.10 und 2.11 gelten also auch dann, wenn man in ihrer Formulierung $\hat{\Phi}$ durch $\hat{\Phi}_0$ und L^1 durch L^2 ersetzt. Dies ist der Inhalt des Theorems 3.1 bzw. der daran anschließenden Korollare aus Cohen et al. [4]. Satz 2.9 und sein Beweis ist eine direkte Übertragung dieses Ergebnisses auf die L^1-Situation und stellt insofern eine Verallgemeinerung dar, da aus ihm direkt die Ergebnisse aus [4] folgen.
2. Die Grundvoraussetzung $\hat{\Phi} \in L^1$ ist nur in Spezialfällen direkt am Symbol m ablesbar: Ist $m \geq 0$ interpolierend, d.h. gilt $\sum_{i=0}^{a-1} m(\cdot + B^{-1}\rho_i)) = 1$, so folgt daraus $\hat{\Phi} \in L^1$ (vgl. z.B. Hampel [10]). Der Beweis zeigt, daß auch die Bedingung $\sum_{i=0}^{a-1} m(\cdot + B^{-1}\rho_i)) \leq 1$ dafür hinreichend ist. Letzteres ist z.B auch für die Symbole m^N, $N \in \mathbb{N}$, erfüllt, wenn $m \geq 0$ interpolierend ist.

3 Regularität

In diesem Kapitel wird ein weiterer für das Verhalten von Φ wichtiger Eigenwert von T_m, der Spektralradius ϱ_E von $T_m|_E$ untersucht. Unter geeigneten Voraussetzungen liefert ϱ_E den exakten Sobolevexponenten von $\hat{\Phi}$, vgl. Folgerung 3.6.

Bezeichnung 3.1. Es sei ϱ_A der Spektralradius der Dilatationsmatrix und ϱ_E für einen endlich-dimensionalen T_m-invarianten Unterraum der Spektralradius von $T_m|_E$.

Satz 3.2 (Regularität nach Littlewood-Paley). *Sei $m \geq 0$ und $E \subset \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ ein endlich-dimensionaler, T_m-invarianter Unterraum. Es existiere ein nichtnegatives $f \in E$ mit $f > 0$ in einer punktierten Umgebung des Nullpunkts. Dann gilt:*

$$\varrho_E < 1 \textit{ und } s < -\frac{\ln \varrho_E}{\ln \varrho_A} \quad \Rightarrow \quad \hat{\Phi}(1 + |\cdot|)^s \in L^1.$$

Beweis: Siehe Hampel [10], Satz 3.69. Der Satz ist dort für den speziellen endlich-dimensionalen T_m-invarianten Unterraum

$$E_f := \operatorname{span}\{T_m^j f : j \in \mathbb{N}\}$$

(mit f wie in Satz 3.2) formuliert, vgl. auch Abschnitt 4. Der Beweis überträgt sich aber wortwörtlich auf die Situation in Satz 3.2. $\square$

Definition 3.3. 1. $f \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ besitzt in $\omega \in \mathbb{R}^n$ eine *Nullstelle der Ordnung* L, falls

$$\big(\partial^\alpha f\big)(\omega) = 0 \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ mit } |\alpha| < L.$$

Es sei $N_\omega(f)$ die Nullstellenordnung von $f \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ in $\omega \in \mathbb{R}^n$,

$$N_\omega(f) := \max\Big\{L \in \mathbb{N} : (\partial^\alpha f)(\omega) = 0 \text{ für alle } |\alpha| < L\Big\}.$$

Für $\omega = 0$ sei $N(f) = N_0(f)$. Ein Unterraum E von $\mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ habe die *Nullstellenordnung* L, falls für alle $f \in E$ gilt $N(f) \geq L$.
2. $m \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ erfüllt die *Strang-Fix-Bedingungen der Ordnung* L, falls m für $i = 1, \ldots, a-1$ in $B^{-1}\rho_i$ eine Nullstelle der Ordnung L besitzt, d.h es gilt

$$\big(\partial^\alpha m\big)(B^{-1}\rho_i) = 0 \text{ für } |\alpha| < L \text{ und } i = 1, \ldots, a-1.$$

$SF(m)$ sei die Strang-Fix-Ordnung von m,

$$SF(m) := \min_{i=1}^{a-1}\Big\{N_{B^{-1}\rho_i}(m)\Big\}.$$

Der folgende Satz gibt eine teilweise Umkehrung von Satz 3.2.

Satz 3.4. *Es sei $m \geq 0$, $\hat{\Phi}(1+|\cdot|)^s \in L^1$ für ein $s \geq 0$, ferner sei $\bar{\omega}(\hat{\Phi}) > 0$ und A isotrop, d.h A ist komplex diagonalisierbar und alle Eigenwerte von A haben den gleichen Betrag. Dann gilt:*

1. *m erfüllt die Strang-Fix-Bedingungen der Ordnung $[s]+1$, d.h es gilt $SF(m) \geq [s]+1$.*

2. *Ist E_L ein endlich-dimensionaler T_m-invarianter Unterraum der Nullstellenordnung $L \geq [s]+1$, so ist $s < -\frac{\ln \varrho_{E_L}}{\ln \varrho_A}$.*

Beweis: 1. Siehe Hampel [10], Satz 3.80. Die Aussage von Satz 3.4 1. ist geringfügig allgemeiner als die bei Hampel. Dort wird $\bar{\omega}(\hat{\Phi}) = 1$ vorausgesetzt. Eine Analyse des Beweises zeigt jedoch, daß lediglich $\bar{\omega}(\hat{\Phi}) > 0$ verwendet wird.
2. Nach Voraussetzung gibt es C, $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$, D diagonal, mit $B = A^t = CDC^{-1}$. Man definiere eine Norm $\|\cdot\|$ auf dem $\mathbb{R}^n$ durch $\|\cdot\| := |C^{-1}\cdot|$. Dann gilt für alle $\omega \in \mathbb{R}^n$ und $\xi = C^{-1}\omega$

$$\|B\omega\| = |C^{-1}B\omega| = |DC^{-1}\omega| = |D\xi| = \varrho_A|\xi| = \varrho_A\|\omega\| \tag{3.1}$$

In der von dieser Norm erzeugten Matrixnorm gilt $\|B^{-1}\| = 1/\varrho_A < 1$. Es sei nun $g \in E_L$ eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ mit $|\lambda| = \varrho_{E_L}$. Nach Voraussetzung hat g in Null eine Nullstelle der Ordnung $L \geq [s]+1$, d.h insbesondere gilt $g(\omega) = o(\|\cdot\|^s)$. Damit ist die durch

$$q(\omega) := \begin{cases} \dfrac{g(\omega)}{\|\omega\|^s} & \omega \neq 0, \\ 0 & \omega = 0 \end{cases}$$

definierte Funktion q stetig auf $\mathbb{R}^n$ und wegen $g \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ dort auch beschränkt. Mit Lemma 2.5 und (3.1) folgt für $j \geq 1$

$$\begin{aligned} \lambda^j \int\limits_{\mathbb{T}^n} |g|^2(\omega) d\omega = < T_m^j g | g >_{\mathbb{T}^n} &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{\Phi}(\omega)}{\bar{\omega}(\hat{\Phi})(B^{-j}\omega)} g(B^{-j}\omega)\bar{g}(\omega) d\omega \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{\Phi}(\omega)}{\bar{\omega}(\hat{\Phi})(B^{-j}\omega)} q(B^{-j}\omega)\|B^{-j}\omega\|^s \bar{g}(\omega) d\omega \\ &= \varrho_A^{-js} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{\Phi}(\omega)}{\bar{\omega}(\hat{\Phi})(B^{-j}\omega)} q(B^{-j}\omega)\|\omega\|^s \bar{g}(\omega) d\omega \\ &\leq c\ \varrho_A^{-js} ||g||_\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\Phi}(\omega)\|\omega\|^s |q|(B^{-j}\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also mit einer Konstanten c'

$$(\lambda \varrho_A^s)^j \leq c' \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\Phi}(\omega)\|\omega\|^s |q|(B^{-j}\omega) d\omega \text{ für } j \geq 1. \tag{3.2}$$

Da q stetig und beschränkt ist, gilt für alle j

$$\hat{\Phi}\|\cdot\|^s |q|(B^{-j}\cdot) \leq c'' \hat{\Phi}\|\cdot\|^s \in L^1$$

und wegen der punktweisen Konvergenz von $B^{-j}\omega$ gegen Null gilt für alle $\omega \in \mathbb{R}^n$ und $j \to \infty$

$$\hat{\Phi}(\omega)\|\omega\|^s |q|(B^{-j}\omega) \to \hat{\Phi}(\omega)\|\omega\|^s |q|(0) = 0.$$

Aus (3.2) folgt somit aus dem Satz von Lebesgue $(\lambda \varrho_A^s)^j \to 0$. Also ist $|\lambda \varrho_A^s| < 1$ und damit folgt die Behauptung. □

Die Zusammenfassung der Sätze 3.2 und 3.4 ergibt die exakte Charakterisierung der Regularitätsordnung von $\hat{\Phi}$ durch den Spektralradius von $T_m|_{E_L}$.

Satz 3.5. *Es sei $m \geq 0$ und $\hat{\Phi} \in L^1$ mit $\bar{\omega}(\hat{\Phi}) > 0$. Zusätzlich sei A isotrop. E_L sei ein endlich-dimensionaler T_m-invarianter Unterraum der Nullstellenordnung $L \geq SF(m)$. Es existiere ein nichtnegatives $f \in E_L$ mit $f > 0$ in einer punktierten Umgebung des Nullpunkts. Dann gilt:*

$$\hat{\Phi}(1+|\cdot|)^s \in L^1 \quad \Leftrightarrow \quad s < -\frac{\ln \varrho_{E_L}}{\ln \varrho_A}.$$

Beweis: Es sei $\hat{\Phi}(1+|\cdot|)^s \in L^1$. Mit Satz 3.4 erhält man $L \geq SF(m) \geq [s]+1$ und folglich $s < -\ln \varrho_{E_L} / \ln \varrho_A$. Für die Umkehrung dieser Aussage ist noch $\varrho_{E_L} < 1$ zu zeigen, den Rest liefert dann Satz 3.2. Aus $\hat{\Phi} \in L^1$ folgt nach Satz 3.4, daß m die Strang-Fix-Bedingungen der Ordnung 1 erfüllt, d.h $L \geq SF(m) \geq 1$. Ist $f \in E_L$ nun eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ, so gilt $f(0) = 0$ und damit nach Korollar 2.11 auch $|\lambda| < 1$. Der Spektralradius von $T_m|_{E_L}$ muß also ebenfalls kleiner Eins sein. $\square$

Folgerung 3.6. *Definiert man den Sobolev-Exponenten von* Φ *durch*

$$s_1(\Phi) := \sup\left\{s \geq 0 : \hat{\Phi}(1+|\cdot|)^s \in L^1\right\}, \tag{3.3}$$

so gilt unter den Voraussetzungen von Satz 3.5

1. $s_1(\Phi) = -\ln \varrho_{E_L} / \ln \varrho_A$, *wobei das Supremum in* (3.3) *nicht durch das Maximum ersetzt werden kann.*

2. *Der Spektralradius* $\varrho_{E_L} = \varrho_A^{-s_1(\Phi)}$ *ist unabhängig von* E_L.

4 Endlich-dimensionale T_m-invariante Unterräume mit vorgegeben Nullstellenordnung

In den beiden vorangegangenen Abschnitten war das Spektrum des Übergangsoperators auf geeigneten endlich-dimensionalen Unterräumen von Interesse. In diesem Kapitel wird die Struktur solcher Unterräume untersucht. Wir betrachten zunächst Unterräume ohne Nullstellenbedingungen, vgl. Satz 2.9.

Bezeichnung 4.1. Es sei soweit nichts anderes gesagt wird, $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, so daß für die zugehörige Matrixnorm $||A^{-1}|| < 1$ gilt, vgl. Bemerkung 4.2. Für $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k e_{-k} \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ sei dann

$$S_f := \left\{k \in \mathbb{Z}^n : c_k \neq 0\right\}$$

der Träger der Fourierkoeffizienten von f und

$$R_f := \max_{k\in S_f} \|k\|.$$

Ferner sei

$$E_f := \operatorname{span}\left\{T_m^j f : j \in \mathbb{N}\right\}$$

und für $R \geq 0$

$$E^R := \left\{f \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n) : R_f \leq R\right\}.$$

Bemerkung 4.2. Nach Zeidler [18], p.795, existiert zu jedem $\epsilon > 0$ eine Norm $||\cdot||_\epsilon$ auf dem $\mathbb{R}^n$, so daß für die zugehörige Matrixnorm gilt

$$\rho(A^{-1}) \leq ||A^{-1}||_\epsilon \leq \rho(A^{-1}) + \epsilon$$

Wegen $\rho(A^{-1}) < 1$ existiert also insbesndere eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$, so daß für die zugehörige Matrixnorm $\|A^{-1}\| < 1$ gilt.

Ähnliche Fassungen des nachfolgenden Satz finden sich auch bei Cohen et al. [4] und Lawton et al. [14].

Satz 4.3. *Sei $f := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k e_{-k} \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ und $R_A := R_m \|A^{-1}\|/\big(1 - \|A^{-1}\|\big)$, so gilt für alle $j \geq 1$*

1. $S_{T_m^j f} \subset \Big(\sum_{i=1}^j A^{-i}\Big) S_m + A^{-j} S_f$
2. $R_{T_m^j f} \leq \max(R_A, R_f)$
3. *Ist $f \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ Eigenfunktion von T_m zum Eigenwert $\lambda \neq 0$, so ist $f \in E^{R_A}$*

Beweis: 1. Nach Satz 2.2 1. ist $g := T_m^{j-1} f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g_k e_{-k}$ wiederum ein trigonometrisches Polynom und es gilt mit $m = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} h_k e_{-k}$

$$T_m g = a \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} (\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} h_k g_{Al-k}) e_{-l}.$$

Zu $l \in S_{T_m^j f}$ gibt es zumindest ein $k \in \mathbb{Z}^n$ mit $h_k g_{Ak-l} \neq 0$, es gilt also $k \in S_m$ und $Al - k \in S_{T_m^{j-1} f}$. Aus $l = A^{-1}(k + (Al - k))$ erhält man demnach für $j \geq 1$

$$S_{T_m^j f} \subset A^{-1}(S_m + S_{T_m^{j-1} f})$$

und induktiv die Aussage 1.
2. Nach 1. ist

$$\begin{aligned} R_{T_m^j f} &\leq \sum_{i=1}^{j} \|A^{-1}\|^i R_m + \|A^{-1}\|^j R_f \\ &= \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|}\big(1 - \|A^{-1}\|^j\big) R_m + \|A^{-1}\|^j R_f \\ &= \big(1 - \|A^{-1}\|^j\big) R_A + \|A^{-1}\|^j R_f. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Daraus folgt 2.
3. Da $f = T_m^j f/\lambda^j$ für alle $j \in \mathbb{N}$, ist nach (4.1)

$$R_f = R_{T_m^j f} \leq R_A + \|A^{-1}\|^j R_f$$

und damit gilt 3. □

Bemerkung 4.4. Aus Satz 4.3 2. folgt, daß E_f endlich-dimensional (und nach Definition T_m-invariant) ist, und daß für $R \geq R_A$ auch E^R T_m-invariant ist. Nach 4. kann T_m auf einen endlich-dimensionalen Unterraum eingeschränkt werden, ohne Informationen über das Spektrum zu verlieren.

Im weiteren werden Unterräume mit Nullstellenbedingungen untersucht. Dazu zunächst

Bezeichnung 4.5. Für $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^q)$, ω, $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} j_\xi^p f(\omega) &= \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{\partial^\alpha f(\xi)}{\alpha!} \omega^\alpha = \sum_{j=0}^{p} \sum_{|\alpha|=j} \frac{\partial^\alpha f(\xi)}{\alpha!} \omega^\alpha \\ &=: \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{j!} D_\xi^j f(\omega). \end{aligned}$$

der p-Jet oder das p-te Taylorpolynom von f in ξ.

Für den p-Jet gelten folgende Rechenregeln, die im nächsten Lemma zusammengefaßt sind.

Lemma 4.6. *Für f, $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ξ, $b \in \mathbb{R}^n$ gilt:*

1. $j_\xi^p(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 j_\xi^p(f) + \lambda_2 j_\xi^p(g)$ *für* λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.
2. $j_\xi^p(fg) = j_0^p(j_\xi^p(f) j_\xi^p(g))$
3. $j_\xi^p(f \circ h) = j_0^p(j_{h(\xi)}^p f \circ (j_\xi^p h - h(u)))$.
4. $j_\xi^p(f \circ (C \cdot + b)) = \left(j_{C\xi+b}^p f\right) \circ C$.
5. *Ist $N_\xi(f) \geq p$ und $N_\xi(g) \geq p'$, so gilt*

$$j_\xi^{p+p'}(fg) = \frac{1}{(p+p')!} D_\xi^{p+p'}(fg) = \frac{1}{p!} D_\xi^p f \frac{1}{p'!} D_\xi^{p'} g.$$

Beweis: Zum Beweis von 1.-3. vgl. Bröcker [1] Abschnitt 3.2.
4. ergibt sich als Spezialfall von 3. (oder durch direktes Nachrechnen). In diesem Falle ist $j_\xi^p h - h(\xi) = C$, und der p-Jet eines p-ten Taylorpolynoms ist wieder das Taylorpolynom.
5. Aus $N_\xi(f) \geq p$ und $N_\xi(g) \geq p'$ folgt, daß fg in ξ eine Nullstelle der Ordnung $p + p'$ besitzt. Somit gilt

$$j_\xi^{p+p'}(fg) = \frac{1}{(p+p')!} D_\xi^{p+p'}(fg)$$

und nach 3.

$$j_\xi^{p+p'}(fg) = j_0^{p+p'}(j_\xi^{p+p'}(f)j_\xi^{p+p'}(g))$$

Das Taylorpolynom $j_0^{p+p'}(j_\xi^{p+p'}(f)j_\xi^{p+p'}(g))$ hat nur dann Koeffizienten ungleich Null, wenn f p-fach und g p'-fach differenziert wird, d.h.

$$j_0^{p+p'}(j_\xi^{p+p'}(f)j_\xi^{p+p'}(g)) = j_0^{p+p'}\big(\frac{1}{p!}D_\xi^p f \frac{1}{p'!}D_\xi^{p'} g\big),$$

und letzteres stimmt als Taylorpolynom vom Grad $p+p'$ eines Polynoms vom gleichen Grad mit diesem überein, also folgt

$$j_\xi^{p+p'}(fg) = \frac{1}{(p+p')!}D_\xi^{p+p'}(fg) = \frac{1}{p!}D_\xi^p f \frac{1}{p'!}D_\xi^{p'} g.$$

□

Bezeichnung 4.7. Für $R \geq 0$ und $L \in \mathbb{N}$ sei

$$E_L^R = E_L^R(\|\cdot\|) := \Big\{ f = \sum_{\|k\| \leq R} c_k e_{-k} : N(f) \geq L \Big\},$$
$$\mathscr{P}(\mathbb{T}^n)_L := \Big\{ f \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n) : N(f) \geq L \Big\}.$$

Lemma 4.8. *Sei $f \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)_L$, so gilt für $p \leq \min\big(L, SF(m)\big)$*

$$\begin{aligned} j_0^p(T_m f)(\omega) &= \frac{1}{p!}D_0^p T_m f(\omega) \\ &= \frac{1}{p!}D_0^p f(B^{-1}\omega) + \frac{1}{p!}\sum_{i=1}^{a-1} f(B^{-1}\rho_i) D_{B^{-1}\rho_i}^p m(B^{-1}\omega). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also

1. *Ist $L \leq SF(m)$, so ist $\mathscr{P}(\mathbb{T}^n)_L$ invariant unter T_m.*
2. *Ist $L < SF(m)$, so ist*

$$j_0^L(T_m f)(\omega) = \frac{1}{L!}D_0^L f(B^{-1}\omega).$$

Beweis: Nach Lemma 4.6 1. und 4. gilt

$$\begin{aligned} j_0^p(T_m f)(\omega) &= \sum_{i=0}^{a-1} j_0^p(mf(B^{-1}(\cdot + \rho_i)))(\omega) = \sum_{i=0}^{a-1} j_{B^{-1}\rho_i}^p(mf)(B^{-1}\omega) \\ &= j_0^p(mf)(B^{-1}\omega) + \sum_{i=1}^{a-1} j_{B^{-1}\rho_i}^p(mf)(B^{-1}\omega). \end{aligned}$$

Da $N(f) \geq L \geq p$ und $SF(m) = \min_{i=1}^{a-1} N_{B^{-1}\rho_i}(m) \geq p$ folgt aus Lemma 4.6 5. mit $p' = 0$ und wegen $m(0) = 1$

$$j_0^p(T_m f)(\omega) = \frac{1}{p!} D_0^p f(B^{-1}\omega) + \frac{1}{p!} \sum_{i=1}^{a-1} f(B^{-1}\rho_i) D_{B^{-1}\rho_i}^p m(B^{-1}\omega).$$

$j_0^p(T_m f)$ ist also ein Polynom, in dem keine Terme der Ordnung kleiner als p vorkommen. Es gilt also

$$j_0^p(T_m f) = \frac{1}{p!} D_0^p(T_m f).$$

Für $L \leq SF(m)$ folgt insbesondere $N(T_m f) \geq L$ und damit $T_m f \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)_L$. Für $L < SF(m)$ ist $D_{B^{-1}\rho_i}^L m = 0$ für $i = 1, \ldots, a-1$, d.h. es gilt 2. □

Für konkrete Rechnungen (vgl. Kapitel 8) ist es nützlich, die Dimension (und eine Basis) von T_m-invarianten Unterräumen einer gegebenen Nullstellenordnung zu kennen. Eine allgemeine Aussage über die Räume E_f ist nicht möglich, Satz 4.3 liefert lediglich eine Abschätzung der Dimension des Raumes E_f. Dagegen ist für E_L^R zu vorgegebenen L und dazu passendem R eine exakte Dimensionsaussage möglich. Dazu zuerst zwei vorbereitende Lemmata:

Lemma 4.9. *Für n, $N \in \mathbb{N}^*$ gilt*

$$p(N) = p(n, N) := \#\{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq N\} = \binom{n+N}{n}.$$

Beweis durch Induktion nach n:
Für $n = 1$ ist

$$p(1, N) = N + 1 = \binom{1+N}{1}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$. Es gelte die Aussage nun für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} p(n+1, N) &= \sum_{q=0}^{N} \#\{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1} : \alpha_1 = N - q \text{ und } \sum_{j=2}^{N} \alpha_j \leq q\} \\ &= \sum_{i=0}^{N} p(n, q) = \sum_{i=0}^{N} \binom{n+q}{q} = \binom{n+1+N}{n+1}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Es folgt also die Aussage für $n+1$, wobei sich die letzte Gleichung in (4.2) induktiv aus

$$\begin{aligned} \binom{n+N}{n+1} + \binom{n+N}{N} &= \binom{n+N}{n+1} + \binom{n+N}{n} \\ &= \binom{n+1+N}{n+1} \end{aligned}$$

ergibt. □

Lemma 4.10. *Für beliebiges $L \in \mathbb{N}^*$ ist die Matrix $A_L := ((-2\pi i k)^\alpha)_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|<L \\ k\in\mathbb{N}^n, |k|<L}}$ invertierbar.*

Beweis: A_L entsteht aus der Matrix $\tilde{A}_L := (k^\alpha)_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|<L \\ k\in\mathbb{N}^n, |k|<L}}$ durch Multiplikation der Zeilen mit Zahlen $\neq 0$. Es genügt also $\tilde{A}_L$ zu betrachten. Definiert man die Matrix $B_L := (b_{\alpha k})_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|<L \\ k\in\mathbb{N}^n, |k|<L}}$ durch

$$b_{\alpha k} := \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=0}^{\alpha_j - 1} (k_i - i),$$

so erhält man durch Ausmultiplizieren des Produktes

$$b_{\alpha k} = k^\alpha + \sum_{\substack{0\le\beta_i\le\alpha_i \\ \beta\neq\alpha}} c_\beta k^\beta.$$

Wegen $|\beta| < L$ für alle in der obigen Summe vorkommenden Indizes entsteht B_L also aus $\tilde{A}_L$ durch elementare Zeilentransformationen. Demnach ist $\tilde{A}_L$ genau dann invertierbar, wenn B_L invertierbar ist. Es sei nun $\mathbb{N}^n$ lexikographisch geordnet, insbesondere folgt dann für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ aus $\alpha < \beta$, daß ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\alpha_i < \beta_i$ existiert. Es gilt also in dieser Ordnung

$$b_{\alpha k} = \begin{cases} 0 & \alpha < k, \\ \neq 0 & \alpha = k. \end{cases}$$

Damit ist B_L, also auch $\tilde{A}_L$ invertierbar. □

Satz 4.11. *Es sei $||\cdot||$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $L \in \mathbb{N}^*$, $R > 0$, so daß*

$$|k| < L \Rightarrow ||k|| \le R \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}^n. \tag{4.3}$$

Dann gilt

$$\dim E_L^R = \dim E^R - p(L-1). \tag{4.4}$$

Setzt man für $j = 1, \ldots, \dim E_L^R$

$$\varphi^j := \sum_{||k||\le R} c_{kj} e_{-k} \in E_L^R \text{ und } c^j := (c_{kj})_{||k||\le R},$$

so gilt

$$\begin{gathered} \left\{\varphi^j : j = 1, \ldots, \dim E_L^R\right\} \text{ ist Basis von } E_L^r \\ \Leftrightarrow \\ \left\{c^j : j = 1, \ldots, \dim E_L^R\right\} \text{ ist Basis von } \operatorname{Kern} M_L, \end{gathered} \tag{4.5}$$

wobei $M_L := ((-2\pi i k)^\alpha)_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|<L \\ k\in\mathbb{Z}^n, ||k||\le R}}$.

Beweis: Nach (4.3) ist A_L eine Untermatrix von $M_L \in \mathbb{C}^{p(L-1)\times \dim E^R}$ mit gleicher Zeilenzahl, da A_L nach Lemma 4.10 invertierbar ist, folgt mit Lemma (4.9)

$$\operatorname{Rang} M_L = \operatorname{Rang} A_L = p(L-1).$$

Also ist wegen der linearen Unabhängigkeit der Charaktere e_k

$$\dim \operatorname{Kern} M_L = \dim E^R - p(L-1). \tag{4.6}$$

Für $\varphi := \sum_{||k||\le R} c_k e_{-k}$ gilt

$$\varphi \in E_L^R \Leftrightarrow \partial^\alpha \varphi(0) = \sum_{||k||\le R} c_k \partial^\alpha (e_{-k})(0) = \sum_{||k||\le R} c_k(-2\pi i k)^\alpha = 0 \text{ für } |\alpha| < L,$$

also ist

$$\varphi \in E_L^R \Leftrightarrow c = (c_k)_{||k||\le R} \in \operatorname{Kern} M_L.$$

Die lineare Abbildung

$$S : \operatorname{Kern} M_L \ni c \mapsto \sum_{||k||\le R} c_k e_{-k} \in E_L^R$$

ist demnach surjektiv. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\{e_{-k} : ||k|| \le R\}$ ist S auch injektiv, also insgesamt ein Isomorphismus. Aus (4.6) folgt damit (4.4) und mit $Sc^j = \varphi^j$ auch (4.5). □

Bemerkung 4.12. Zur Konstruktion eines T_m-invarianten Unterraums mit vorgegebener Nullstellenordnung $L \le SF(m)$ und bekannter Dimension ist also zu einer Norm mit $||A^{-1}|| < 1$ ein $R \ge R_A$ zu wählen, so daß sowohl die Voraussetzungen aus Bemerkung 4.4 als auch die aus Satz 4.11 erfüllt sind.

Bemerkung 4.13. Explizite Formeln für die Dimension von E^R, also die Anzahl der Gitterpunkte in der Normkugel vom Radius R, sind nur für spezielle Normen bekannt. Für die 1-Norm erhält man induktiv, ähnlich zu Lemma 4.9

$$\#\{k \in \mathbb{Z}^n : |k| \le N\} = \sum_{q=0}^{n} (-1)^{n-q} 2^q \binom{n}{q} p(q,N).$$

Ähnlich strukturierte asymptotische Formeln sind für allgemeine Normen von Ewald [7] aufgestellt worden.

Im weiteren sei für einen Unterraum E von $\mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ der reelle Raum $E(\mathbb{R})$ über

$$E(\mathbb{R}) := \{f \in E : f(\omega) \in \mathbb{R} \text{ für alle } \omega \in \mathbb{R}^n\}$$

definiert. Um die Resultate der Spektraltheorie positiver Operatoren auf geordneten Banachräumen anwenden zu können, die für reelle Banachräume bzw. deren Komplexifizierung formuliert sind, vgl. Kapitel 5, benötigt man in Kapitel 6 Unterräume E von $\mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$, die die Komplexifizierung der reellen Räume $E(\mathbb{R})$ sind. Für E_f ist dies trivialerweise erfüllt, falls f selbst reellwertig ist. Für Teilraüme von $\mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$, die durch den Träger der diskreten Fouriertransformation ihrer Elemente definiert sind, wie z.B. E^R, gilt:

Lemma 4.14. *Für $M \subset \mathbb{Z}^n$ sei*

$$E_M := \left\{ f \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n) : S_f \subset M \right\}.$$

Dann ist E_M genau dann die Komplexifizierung von $E_M(\mathbb{R})$, d.h. es gilt

$$E_M = E_M(\mathbb{R}) + iE_M(\mathbb{R}),$$

wenn $M = -M$.

Beweis: Für das weitere sei

$$\cos_k := \cos 2\pi < k|\cdot >= \mathrm{Re}(e_k), \qquad \sin_k := \sin 2\pi < k|\cdot >= \mathrm{Im}(e_k).$$

Es gilt

$$e_k \in E_M(\mathbb{R}) + iE_M(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \cos_k, \sin_k \in E_M(\mathbb{R}). \tag{4.7}$$

Es sei zunächst E_M die Komplexifizierung von $E_M(\mathbb{R})$ und $k \in M$. Nach (4.7) ist $\cos_k \in E_M(\mathbb{R})$. Es gilt

$$e_{-k} = 2\cos_k + e_k \in E_M$$

und somit $-k \in M$, also folgt $M = -M$.
Für $M = -M$ ist

$$\cos_k = \frac{1}{2}(e_k + e_{-k}), \;\; \sin_k = \frac{1}{2i}(e_k - e_{-k}) \in E_M(\mathbb{R})$$

für alle $k \in M$. Nach (4.7) ist also $e_k \in E_M(\mathbb{R}) + iE_M(\mathbb{R})$ für alle $k \in M$. Die Komplexifizierung von $E_M(\mathbb{R})$ ist ein komplexer Vektorraum, also folgt

$$\sum_{k \in M} c_k e_k \in E_M(\mathbb{R}) + iE_M(\mathbb{R}).$$

Somit erhält man $E_M \subset E_M(\mathbb{R}) + iE_M(\mathbb{R})$. $E_M(\mathbb{R}) + iE_M(\mathbb{R}) \subset E_M$ gilt trivialerweise, also ist $E_M = E_M(\mathbb{R}) + iE_M(\mathbb{R})$. □

5 Geordnete Banachräume und Spektraltheorie positiver Operatoren

In diesem Kapitel werden die für die Anwendung auf T_m wichtigen Eigenschaften positiver Operatoren zusammengestellt.

Definition 5.1. Es sei E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, der mit einer Ordnungsstruktur R versehen ist, die von einer reflexiven, transitiven und anti-symmetrischen binären Relation $\leq$ erzeugt wird. Man nennt E einen *geordneten Vektorraum* über $\mathbb{R}$, falls für f, g, $h \in E$ und $\lambda > 0$ gilt

1. Aus $f \leq g$ folgt $f + h \leq g + h$.
2. Aus $f \leq g$ folgt $\lambda f \leq \lambda g$.

Die Mengen

$$K := \{f \in E : f \geq 0\} \text{ und } K' := \{\eta \in E' : \eta(f) \geq 0 \text{ für alle } f \in K\}$$

bezeichnet man als *positiven* bzw. als *dualen positiven Kegel* des geordneten Vektorraums E und die Elemente aus K bzw. K' als positiv. Gilt sogar $\eta(f) > 0$ für alle $f \in K \setminus \{0\}$, so heißt $\eta \in E'$ streng positiv.
Ist E ein reeller topologischer Vektorraum und gilt zusätzlich zu 1., 2.

3. K ist abgeschlossen,

so nennt man E einen *geordneten topologischen Vektorraum*. Weiterhin heißt die Menge $[f, g] := \{h \in E : f \leq h \leq g\}$ das *Ordnungsintervall* von f, $g \in E$.

Beispiel 5.2. *Es sei $X \neq \emptyset$ und E ein Unterraum von*

$$B(X) := \{f : X \mapsto \mathbb{R} : \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Definiert man auf E die Relation $\leq$ über

$$f \leq g :\Leftrightarrow f(\omega) \leq g(\omega) \text{ für alle } \omega \in X,$$

so ist E ein geordneter normierter Raum.

Definition 5.3. 1. Eine Teilmenge F des topologischen Vektorraums E heißt *erzeugend* (bzw. *total*), wenn $\operatorname{span} F = E$ (bzw. wenn der $\operatorname{span} F$ dicht in E liegt).
2. Ein Element $f \geq 0$ des geordneten topologischen Vektorraums E heißt quasi-innerer Punkt des positiven Kegels K, falls das Ordnungsintervall $[0, f]$ total ist.

Bemerkung 5.4. Der positive Kegel K ist z.B dann total, wenn ein quasi-innerer Punkt f von K existiert. Nach Definition ist dann $[0, f] \subset K$ und damit insbesondere auch K selbst total. Besitzt K ein nichtleeres Inneres $\mathrm{int}(K)$, so gilt $E = \mathrm{int}(K) - \mathrm{int}(K)$, vgl. Krein/Rutman [13]. Letzteres ist dazu äquivalent, daß $\mathrm{int}(K)$ erzeugend ist, somit ist in diesem Fall K ebenfalls erzeugend.

Definition 5.5. E sei ein geordneter Banachraum mit positiven Kegel $K \neq \{0\}$
1. $T \in \mathscr{L}(E)$ heißt *positiv*, falls T den positiven Kegel invariant läßt, d.h aus $f \geq 0$ folgt stets $Tf \geq 0$.
2. $T \in \mathscr{L}(E)$ heißt *stark positiv*, falls T positiv ist und für alle $f \geq 0$ mit $f \neq 0$ ein $j = j(f)$ existiert, so daß $T^j f$ ein innerer Punkt von K ist.
3. $T \in \mathscr{L}(E)$ heißt *irreduzibel*, falls T positiv ist und für alle $f \geq 0$ mit $f \neq 0$ und $\lambda > \varrho(T)$

$$TR_\lambda(T)f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{-j} T^j f$$

ein quasi-innerer Punkt von K ist. Dabei ist $R_\lambda(T)$ die Resolvente von T im Punkt λ.

Bemerkung 5.6. 1. Existiert für einen geordneten Banachraum E mit positiven Kegel K ein irreduzibler Operator, so ist nach Bemerkung 5.4 K notwendigerweise total.
2. Für einen geordneten topologischen Vektorraum, dessen positiver Kegel K ein nichtleeres Inneres $\mathrm{int}(K)$ besitzt, ist $f \in K$ nach Schäfer [16] genau dann ein innerer Punkt von K, wenn f ein quasi-innerer Punkt von K ist, d.h falls $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$ liegt $TR_\lambda(T)f$ für irreduzibles T und $\lambda > \varrho(T)$ im Inneren von K. Außerdem ist in diesem Fall jeder stark positive Operator auch irreduzibel.

Satz 5.7. *Es sei E ein geordneter Banachraum mit totalem positiven Kegel K und T ein kompakter positiver Operator mit $\varrho(T) > 0$. Dann ist $\varrho(T)$ ein Eigenwert von T und es existieren zu $\varrho(T)$ positive Eigenvektoren von T und vom dualen Operator T'.*

Beweis: siehe Krein/Rutman [13].

Satz 5.8. *Es sei E ein geordneter Banachraum mit positiven Kegel K, dessen Inneres nichtleer ist. T sei ein kompakter stark positiver Operator. Dann gilt*

1. *T besitzt einen Eigenvektor im Inneren von K. Dieser ist (bis auf Multiplikation mit einer Konstanten) der einzige Eigenvektor von T in K. Der zugehörige Eigenwert ist $\varrho(T)$ und ist positiv und algebraisch einfach.*

2. *T' besitzt einen streng positiven Eigenvektor. Dieser ist (bis auf Multiplikation mit einer Konstanten) der einzige Eigenvektor von T' in K'. Der zugehörige Eigenwert ist $\varrho(T)$ und dieser ist algebraisch einfach.*

3. *Für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$ *aus dem Spektrum von* T *mit* $\lambda \neq \varrho(T)$ *gilt* $|\lambda| < \varrho(T)$.

Erfüllt umgekehrt ein kompakter positiver Operator die Bedingungen 1. – 3., *so ist er stark positiv.*

Beweis: siehe Krein/Rutman [13].

Die Voraussetzungen unter denen die Bedingungen 1., 2. gelten, können abgeschwächt werden. Es gilt nämlich

Satz 5.9. *Es sei* E *ein geordneter Banachraum mit positiven Kegel* K *und* T *ein irreduzibler Operator, dessen Spektralradius* $\varrho(T)$ *ein Pol der Resolvente ist. Dann gilt*

1. $\varrho(T) > 0$ *und* $\varrho(T)$ *ist ein Pol erster Ordnung.*

2. *Zu* $\varrho(T)$ *existieren positive Eigenvektoren von* T *bzw.* T'. *Jeder positive Eigenvektor von* T *zu* $\varrho(T)$ *ist ein quasi-innerer Punkt von* K *und jeder positive Eigenvektor von* T' *ist eine streng positive Linearform.*

3. *Gilt entweder* $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$ *oder ist die Vielfachheit von* $\varrho(T)$ *endlich, dann ist die Vielfachheit von* $\varrho(T)$ *gleich* 1.

Beweis: siehe Schäfer [16] bzw. [17].

Bemerkung 5.10. 1. In der Formulierung von Satz 5.9 3. muß nicht zwischen geometrischer und algebraischer Vielfachheit von $\varrho(T)$ unterschieden werden, weil für einen einfachen Pol der Resolvente Eigenraum und Hauptraum übereinstimmen, siehe z.B. Satz 101.2 aus Heuser [11].
2. Ist $\mathrm{int}(K) \neq 0$, so kann nach Bemerkung 5.6 in Satz 5.9 2. quasi-innerer Punkt durch innerer Punkt ersetzt werden,

Korollar 5.11. *Es sei* E *ein geordneter Banachraum mit positivem Kegel* K, *dessen Inneres nichtleer ist.* T *sei ein kompakter irreduzibler Operator mit* $\varrho(T) > 0$. *Dann ist* $\varrho(T)$ *ein algebraisch einfacher Eigenwert von* T *und von* T'. *Die zugehörigen Eigenvektoren liegen im Innern von* K *bzw. sind streng positiv.*

Beweis: Nach Satz 5.7 ist $\varrho(T)$ ein Eigenwert des kompakten Operators T, also insbesondere ein Pol der Resolvente von T. Satz 5.9 kann also angewandt werden. Unter Beachtung von Bemerkung 5.10 folgt die Behauptung. □

Bemerkung 5.12. Mit ähnlichen Argumenten wie im Beweis von Satz 5.8 in Krein/Rutman [13] kann man zeigen, daß unter den Voraussetzungen von Korollar 5.11 sogar die Aussagen 1., 2. aus Satz 5.8 gelten, d.h. für einen kompakten positiven Operator T mit $\varrho(T) \neq 0$ gilt:

$$T \text{ ist stark positiv} \;\Leftrightarrow\; T \text{ ist irreduzibel und es gilt 3. aus Satz 5.8.}$$

6 Spektraleigenschaften des Übergangsoperators

Die abstrakten Sätze aus Kapitel 5 werden in diesem Kapitel auf $T_m|_{E_L(\mathbb{R})}$ angewandt. Dazu wird zunächst das Innere des Positivitätskegels $K_L \subset E_L(\mathbb{R})$ charakterisiert und dann Kriterien für die Positivitätseigenschaften von $T_m|_{E_L(\mathbb{R})}$ hergeleitet. Zentral ist der Satz 6.19, in dem einfach nachzuprüfende Bedingungen an m angegeben werden (vgl. auch Kapitel 8), so daß $T_m|_{E_L(\mathbb{R})}$ stark positiv ist.
Im weiteren sei das Symbol $m \geq 0$ mit $m(0) = 1$ und E_L ein T_m-invarianter endlich-dimensionaler Unterraum von $\mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ der Nullstellenordnung L, der die Komplexifizierung des reellen Raumes

$$E_L(\mathbb{R}) := \left\{ f \in E_L : f(\omega) \in \mathbb{R} \text{ für alle } \omega \in \mathbb{R}^n \right\}$$

ist, und sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Nach Beispiel 5.2 ist $E_L(\mathbb{R})$ bzgl. der kanonischen Ordnung und der Supremumsnorm ein geordneter normierter Raum mit abgeschlossenem positiven Kegel

$$K_L := \left\{ f \in E_L(\mathbb{R}) : f \geq 0 \right\}$$

Als endlich-dimensionaler Raum ist $E_L(\mathbb{R})$ ein Banachraum und da m reellwertig ist genau dann T_m-invariant, wenn E_L T_m-invariant ist. Als Operator mit endlich-dimensionalem Definitionsbereich ist $T_m|_{E_L(\mathbb{R})}$ trivialerweise kompakt und wegen $m \geq 0$ ist für $f \in K_L$ auch

$$T_m f = \sum_{i=0}^{a-1} m f(B^{-1}(\cdot + \rho_i)) \in K_L,$$

$T_m|_{E_L(\mathbb{R})}$ ist also positiv. Wegen $m(0) = 1$ existiert zudem eine Umgebung U der Null mit $m(\omega) > 0$ für alle $\omega \in U$. Für alle $f \geq 0$ mit $T_m f = 0$ folgt aus

$$T_m f(B\omega) = \sum_{i=0}^{a-1} m f(\cdot + B^{-1}\rho_i) \geq m(\omega) f(\omega) \geq 0$$

stets $f(\omega) = 0$ für alle $\omega \in U$. Nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen mehrerer Veränderlicher muß $f = 0$ gelten. T_m bildet somit $K_L \setminus \{0\}$ auf $K_L \setminus \{0\}$ ab. Für alle $f \in K_L \setminus \{0\}$ und für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt damit $T_m^j f \neq 0$. Für $K_L \neq \{0\}$ ist $T_m|_{E_L(\mathbb{R})}$ folglich nicht nilpotent, der Spektralradius

$$\varrho_{E_L} := \varrho(T_m|_{E_L(\mathbb{R})})$$

ist also nicht Null. Zusammenfassend gilt

Lemma 6.1. *Für $m \geq 0$ ist $T_m|_{E_L(\mathbb{R})}$ ein kompakter positiver Operator. Ist zusätzlich $K_L \neq \{0\}$, so gilt $\varrho_{E_L} > 0$.*

Bezeichnung 6.2. Eine homogenes Polynom $Q : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ heißt positiv (semi)definit, falls $Q(\omega) > 0$ (≥ 0) für alle $\omega \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt. Q heißt negativ (semi)definit, falls $-Q$ positiv (semi)definit ist.

Bemerkung 6.3. 1. Da $D_\xi^L f$ ein homogenes Polynom vom Grad L ist und da

$$S_1(0) := \{\omega \in \mathbb{R}^n : \|\omega\| = 1\}$$

kompakt ist, ist $D_\xi^L f$ genau dann positiv definit, wenn eine Konstante c existiert mit

$$D_\xi^L f(\omega) \geq c > 0 \text{ für alle } \omega \in \xi + S_1(0).$$

2. $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ habe in $\xi \in \mathbb{R}^n$ eine Nullstelle der Ordnung L. Dann gilt: Ist $f \geq 0$ in einer Umgebung von ξ, so ist $D_\xi^L f$ positiv semidefinit.

Die zweite Aussage folgt analog zum bekannten Fall $L = 2$, vgl. z.B. Bröcker [1], aus 1. und der Taylorformel

$$f(\xi + \omega) = \frac{1}{L!} D_\xi^L f(\omega) + o(\|\omega\|^L).$$

Um die Sätze aus Abschnitt 6 anwenden zu können, ist eine Charakterisierung des Inneren $\text{int}(K_L)$ von K_L nötig. Dies liefert der folgende Satz.

Satz 6.4. *Sei*

$$P_L := \left\{ f \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)_L : f > 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n \text{ und } D_0^L f \text{ positiv definit} \right\}, \tag{6.1}$$

so gilt

$$P_L \cap E_L \subset \text{int}(K_L).$$

Ist $P_L \cap E_L \neq \emptyset$, so ist

$$P_L \cap E_L = \text{int}(K_L).$$

Beweis: Es sei $f \in P_L \cap E_L$. Nach Bemerkung 6.3 existiert eine Konstante c mit

$$D_0^L f(\omega) \geq c > 0 \text{ für alle } \omega \in S_1(0).$$

$E_L(\mathbb{R})$ ist nach Voraussetzung endlich-dimensional, insbesondere ist die lineare Abbildung

$$E_L(\mathbb{R}) \ni g \mapsto D_0^L g|_{S_1(0)}$$

stetig. Es gibt also ein $\delta > 0$, so daß für $g \in E_L(\mathbb{R})$ mit $\|g\|_\infty < \delta$ gilt

$$-\frac{c}{2} \leq D_0^L g(\omega) \leq \frac{c}{2} \text{ für alle } \omega \in S_1(0).$$

Für $\omega \in S_1(0)$ folgt demnach

$$D_0^L(f + g)(\omega) = D_0^L f(\omega) + D_0^L g(\omega) \geq c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} > 0, \tag{6.2}$$

d.h nach Bemerkung 6.3 ist $D_0^L(f+g)$ ebenfalls positiv definit.
Nach der Taylorformel gilt für alle $\omega \in \mathbb{R}^n$

$$|(f+g)(\omega) - \frac{1}{L!} D_0^L(f+g)(\omega)| \leq \frac{1}{(L+1)!} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |D_\xi^{L+1}(f+g)(\omega)| \tag{6.3}$$

Da $E_L(\mathbb{R})$ endlich-dimensional, ist die lineare Abbildung

$$\partial^\alpha : E_L \mapsto \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ stetig. Ferner ist $\|\omega\|_\infty \leq c'\|\omega\|$, somit läßt sich die rechte Seite von (6.3) wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned} \frac{1}{(L+1)!} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |D_\xi^{L+1}(f+g)(\omega)| &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\sum_{|\alpha|=L+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha (f+g)(\xi) \omega^\alpha| \\ &\leq (c')^{L+1} \sum_{|\alpha|=L+1} \frac{1}{\alpha!} \|\partial^\alpha (f+g)\|_\infty \|w\|^{L+1} \\ &\leq c''(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)\|\omega\|^{L+1}. \end{aligned}$$

Es gibt also ein $r > 0$, so daß für alle $\|\omega\| \leq r$ und für $\|g\| \leq \delta$ gilt

$$\begin{aligned} |(f+g)(\omega) - \frac{1}{L!} D_0^L(f+g)(\omega)| &\leq c''(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)\|\omega\|^{L+1} \\ &\leq c''(\|f\|_\infty + \delta)\|\omega\|^{L+1} \\ &\leq \frac{c}{4L!}\|\omega\|^L. \end{aligned}$$

Mit (6.2) folgt

$$\begin{aligned} (f+g)(\omega) &= \frac{1}{L!} D_0^L(f+g)\big(\frac{\omega}{\|\omega\|}\big)\|\omega\|^L - \big(\frac{1}{L!} D_0^L(f+g)(\omega) - (f+g)(\omega)\big) \\ &\geq \frac{1}{L!}\big(\frac{c}{2} - \frac{c}{4}\big)\|\omega\|^L = \frac{c}{4L!}\|\omega\|^L > 0 \end{aligned}$$

für alle $0 < \|\omega\| \leq r$ und $\|g\|_\infty \leq \delta$, wobei verwendet wurde, daß $D_0^L(f+g)$ ein homogenes Polynom vom Grad L ist.
Nach Voraussetzung ist $f(\omega) > 0$ für $\omega \notin \mathbb{Z}^n$. Es existiert also ein $0 < \delta' \leq \delta$ mit $f(\omega) > \delta'$ für alle $\omega \in I^n$ mit $\|w\| \geq r$. Somit gilt für $\|g\|_\infty \leq \delta'$ und $\omega \in I^n$ mit $\|w\| \geq r$

$$(f+g)(\omega) \geq f(\omega) - \delta' > 0.$$

Wegen der $\mathbb{Z}^n$-Periodizität folgt damit insgesamt $f+g > 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n$. Also ist $f+g$ für $g \in E_L(\mathbb{R})$ mit $\|g\|_\infty \leq \delta'$ in K_L, d.h $f \in \operatorname{int}(K_L)$.
Für die zweite Behauptung sei nun $h \in P_L \cap E_L$.
Hat f eine Nullstelle ω_0 außerhalb von $\mathbb{Z}^n$, so ist $(f - \epsilon h)(\omega_0) < 0$ für alle $\epsilon > 0$, d.h $f - \epsilon h \notin K_L$ für alle $\epsilon > 0$.

Ist $D_0^L f$ nicht positiv definit, so gibt es ein $\omega \in S_1(0)$ mit $D_0^L f(\omega_0) \leq 0$. Also folgt für alle $\epsilon > 0$

$$D_0^L\big(f - \epsilon h\big)(\omega_0) \leq -\epsilon D_0^L h(\omega_0) < 0,$$

d.h $D_0^L(f - \epsilon h)$ ist nicht positiv semidefinit. Nach Bemerkung 6.3 2. gilt auch in diesem Fall $f - \epsilon h \notin K_L$ für alle $\epsilon > 0$.
In beiden Fällen kann f also nicht in Inneren von K_L liegen. □

Bemerkung 6.5. Für die Räume $E_L = E_L^R$ aus Bezeichnung 4.7 gilt

$$\operatorname{int}(K_L) = P_L \cap E_L \text{ und } \operatorname{int}(K_L) \neq \emptyset \Leftrightarrow L \text{ gerade},$$

vgl. Saßmannshausen [15]. Enthält jedoch E_L keine trignometrische Polynome der Nullstellenordnung L, so kann $P_L = \emptyset$, aber $\operatorname{int}(K_L) \neq \emptyset$ gelten.

Satz 6.4 zeigt insbesondere, daß das Innere von K_L nichtleer ist, falls $P_L \cap E_L \neq \emptyset$. In diesem Fall besteht K_L nicht nur aus der Null und ist nach Bemerkung 5.4 erzeugend. Damit sind nach Lemma 6.1 alle Voraussetzungen von Satz 5.7 erfüllt. Es gilt also

Satz 6.6. *Es sei $m \geq 0$ und $P_L \cap E_L \neq \emptyset$. Dann ist ϱ_{E_L} ein positiver Eigenwert von T_m und es existieren positive Eigenfunktionen von $T_m|_{E_L(\mathbb{R})}$ und $(T_m|_{E_L(\mathbb{R})})'$.*

Es sollen nun Kriterien für die starke Positivität bzw. die Irreduzibilität von $T_m|_{E_L(\mathbb{R})}$ hergeleitet werden.

Lemma 6.7. *Es sei $m \geq 0$ und $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte $\mathbb{Z}^n$-Kachel mit $m(B^{-1}\omega) > 0$ für $\omega \in K$. Ist $L \leq SF(m)$, so ist $T_m(P_L) \subset P_L$, insbesondere bildet T_m das Innere von K_L auf sich selbst ab, falls $P_L \cap E_L \neq \emptyset$.*

Beweis: Es sei $f \in P_L$. Da K kompakte $\mathbb{Z}$-Kachel, gibt es für alle $\omega \in \mathbb{R}^n$ ein $\omega' \in K$ und ein $k \in \mathbb{Z}^n$ mit $\omega = \omega' - k$, siehe Definition 2.7. Zudem besitzt k die Darstellung $k = \rho' + Bl$ mit $\rho' \in \{\rho_0, \ldots, \rho_{a-1}\}$ und $l \in \mathbb{Z}^n$. Damit folgt mit der $\mathbb{Z}^n$-Periodizität von m

$$m(B^{-1}(\omega + \rho')) = m(B^{-1}\omega' - l) = m(B^{-1}\omega') > 0$$

und somit

$$\sum_{i=0}^{a-1} m(B^{-1}(\omega + \rho_i)) > 0 \text{ für alle } \omega \in \mathbb{R}^n. \tag{6.4}$$

Ist $B^{-1}(\omega + \rho_i) = k \in \mathbb{Z}^n$, so ist auch $\omega = Bk - \rho_i \in \mathbb{Z}^n$, d.h für $w \notin \mathbb{Z}^n$ ist auch $B^{-1}(w + \rho_i) \notin \mathbb{Z}^n$. Es gilt also $f(B^{-1}(\omega + \rho_i)) > 0$ für alle $\omega \notin \mathbb{Z}^n$, $i \in \{0, \ldots, a-1\}$ und folglich nach (6.4)

$$T_m f(\omega) = \sum_{i=0}^{a-1} mf(B^{-1}(\omega + \rho_i)) > 0 \text{ für alle } \omega \notin \mathbb{Z}^n. \tag{6.5}$$

Nach Lemma 4.8 gilt zudem für alle $\omega \in \mathbb{R}^n$

$$D_0^L(T_m f)(B\omega) = D_0^L f(\omega) + \sum_{i=1}^{a-1} f(B^{-1}\rho_i) D^L_{B^{-1}\rho_i} m(\omega). \tag{6.6}$$

$D_0^L f$ ist nach Voraussetzung positiv definit. Der rechte Summand aus (6.6) ist nach Bemerkung 6.3 2. wegen $m, f \geq 0$ positiv semidefinit. Damit ist $D_0^L(T_m f) \circ B$ positiv definit. Wegen der Invertierbarkeit von B ist dies äquivalent dazu, daß $D_0^L(T_m f)$ positiv definit ist. Zusammen mit (6.5) folgt $T_m f \in P_L$. Ist $P_L \cap E_L \neq \emptyset$, so bildet T_m also nach Satz 6.4 das Innere von K_L auf sich selbst ab. □

Bemerkung 6.8. Die Voraussetzung $m(B^{-1}\omega) > 0$ für alle $\omega \in K$ ist eine schwache Version des Cohen-Kriterium, vgl. Definition 2.7.

Lemma 6.9. *Es sei $p \leq \min(L, SF(m))$ und $f \in E_L$. Dann gilt für alle $j \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \mathbb{R}^n$*

$$D_0^p(T_m^j f)(\omega) = D_0^p f(B^{-j}\omega) + \sum_{\nu=0}^{j-1} \sum_{i=1}^{a-1} T_m^\nu f(B^{-1}\rho_i) D^p_{B^{-1}\rho_i} m(B^{-j+\nu}\omega).$$

Beweis: (durch vollständige Induktion)
Für $j = 1$ gilt die Behauptung nach Lemma 4.8. Aus der Behauptung für $j \in \mathbb{N}^*$ folgt wieder mit Lemma 4.8

$$\begin{aligned}
D_0^p(T_m(T_m^j f))(\omega) &= D_0^p(T_m^j f)(B^{-1}\omega) + \sum_{i=1}^{a-1} (T_m^j f)(B^{-1}\rho_i) D^p_{B^{-1}\rho_i} m(B^{-1}\omega) \\
&= D_0^p f(B^{-(j+1)}\omega) + \sum_{\nu=0}^{j-1} \sum_{i=1}^{a-1} T_m^\nu f(B^{-1}\rho_i) D^p_{B^{-1}\rho_i} m(B^{-(j+1)+\nu}\omega) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{a-1} (T_m^j f)(B^{-1}\rho_i) D^p_{B^{-1}\rho_i} m(B^{-1}\omega) \\
&= D_0^p f(B^{-(j+1)}\omega) + \sum_{\nu=0}^{j} T_m^\nu f(B^{-1}\rho_i) D^p_{B^{-1}\rho_i} m(B^{-(j+1)+\nu}\omega)
\end{aligned}$$

□

Satz 6.10. *Es sei $m \geq 0$, $L = SF(m)$ und $K_L \neq \{0\}$. Zudem gebe es eine kompakte $\mathbb{Z}^n$-Kachel K mit $m(B^{-1}\omega) > 0$ für alle $\omega \in K$ und*

$$D_0^L\Big(\sum_{i=1}^{a-1} m(\cdot + B^{-1}\rho_i)\Big) = \sum_{i=1}^{a-1} D^L_{B^{-1}\rho_i} m \text{ sei positiv definit.} \tag{6.7}$$

Zu $f \in K_L \setminus \{0\}$ existiere ein $j = j(f)$ mit $T_m^j f > 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n$. Dann ist

$$T_m^{j+1} f \in P_L \cap E_L = \mathrm{int}(K_L).$$

Gibt es für alle $f \in K_L \setminus \{0\}$ ein solches $j(f)$, so ist $T_m|_{E_L(\mathbb{R})}$ also stark positiv.

Bemerkung 6.11. Es sei $m \geq 0$ und $L = SF(m)$.
1. Nach Bemerkung 6.3, 2. ist $D^L_{B^{-1}\rho_i} m$ für alle $i \neq 0$ positiv semidefinit. $\sum_{i=1}^{a-1} D^L_{B^{-1}\rho_i} m$ ist also genau dann positiv definit, falls für jedes $\omega \neq 0$ ein $\rho \in \{\rho_1, \ldots, \rho_{a-1}\}$ mit $D^L_{B^{-1}\rho} m(B^{-1}\omega) > 0$ existiert.
2. Für $n = 1$ muß L gerade sein und ein $\rho \in \{\rho_1, \ldots, \rho_{a-1}\}$ existieren mit $m^{(L)}(B^{-1}\rho) > 0$. Es gilt also

$$\sum_{i=1}^{a-1} D^L_{B^{-1}\rho_i} m(\omega) = \sum_{i=1}^{a-1} m^{(L)}(B^{-1}\rho_i)\omega^L \geq m^{(L)}(B^{-1}\rho)\omega^L > 0.$$

Für $L = 0$ gibt es ein $\rho \in \{\rho_1, \ldots, \rho_{a-1}\}$ mit $m((B^{-1}\rho) > 0$. Somit folgt

$$\sum_{i=1}^{a-1} D^L_{B^{-1}\rho_i} m(\omega) = \sum_{i=1}^{a-1} m(B^{-1}\rho_i) \geq m(B^{-1}\rho) > 0.$$

In beiden Fällen folgt die Bedingung (6.7) also schon allein aus der Voraussetzung $m \geq 0$.
3. Es gilt

$$D_0^L(T_m 1(B\cdot) - m) = D_0^L(\sum_{i=1}^{a-1} m(\cdot + B^{-1}\rho_i)) = \sum_{i=1}^{a-1} D^L_{B^{-1}\rho_i} m,$$

Für interpolierendes m, d.h. für $T_m 1 = 1$, ist $\sum_{i=1}^{a-1} D^L_{B^{-1}\rho_i} m$ genau dann positiv definit, wenn $D_0^L(1-m)$ positiv definit ist, also genau dann wenn $D_0^L m$ negativ definit ist (da $(1-m)(0) = 0$, ist in diesem Fall $L > 0$).

Beweis: Sei $f \in K_L \setminus \{0\}$ mit $T_m^j f > 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n$. Nach dem Beweis von Lemma 6.7 gilt, vgl. (6.5)

$$T_m^{j+1} f = T_m(T_m^j f) > 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n. \tag{6.8}$$

Mit Bemerkung 6.3, 2. folgt aus f, $m \geq 0$ und der Invertierbarkeit von $B^{-j+\nu}$, daß $(D_0^L f) \circ B^{-(j+1)}$ und $(D^L_{B^{-1}\rho_i} m) \circ B^{-(j+1)+\nu}$ für $0 \leq \nu \leq j$ und $0 < i \leq a-1$ positiv semidefinit sind. Zu $\omega \neq 0$ wähle man ein ρ gemäß Bemerkung 6.11. Aus $T_m^\nu f(B^{-1}\rho_i) \geq 0$ erhält man also mit Lemma 6.9 und (6.8) (und da $B^{-1}\rho \notin \mathbb{Z}^n$)

$$\begin{aligned} D_0^L(T_m^{j+1} f)(\omega) &= D_0^L f(B^{-(j+1)}\omega) + \sum_{\nu=0}^{j} \sum_{i=1}^{a-1} T_m^\nu f(B^{-1}\rho_i) D^L_{B^{-1}\rho_i} m(B^{-(j+1)+\nu}\omega) \\ &\geq T_m^j f(B^{-1}\rho) D^L_{B^{-1}\rho} m(B^{-1}\omega) > 0 \text{ für } \omega \neq 0. \end{aligned}$$

$D_0^L(T_m^{j+1}f)$ ist also positiv definit. Zusammen mit (6.8) erhält man

$$T_m^{j+1}f \in P_L \cap E_L.$$

Satz 6.4 ergibt dann $T_m^{j+1}f \in \operatorname{int}(K_L)$. □

Eine Abschwächung der Voraussetzungen aus Satz 6.10 liefert

Satz 6.12. *Es sei $m \geq 0$, und es gelte $K_L \neq \{0\}$ und (6.7) für $L = SF(m)$. Zu $f \in K_L \setminus \{0\}$ existiere für jedes $w \notin \mathbb{Z}^n$ ein $j = j(\omega, f)$ mit $T_m^j f(\omega) > 0$. Dann ist*

$$T_m R_\lambda(T_m) f = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^{-p} T_m^p f \in P_L \cap E_L = \operatorname{int}(K_L)$$

für alle $\lambda > \varrho_{E_L}$.
Gibt es für alle $f \in K_L \setminus \{0\}$ und $\omega \notin \mathbb{Z}^n$ ein solches $j(\omega, f)$, so ist $T_m|_{E_L(\mathbb{R})}$ also irreduzibel.

Beweis: Für alle $\lambda > \varrho_{E_L}$ und $\omega \notin \mathbb{Z}^n$ folgt mit $j = j(\omega, f)$ aus der Neumann-Reihe

$$T_m R_\lambda(T_m) f(\omega) \geq \lambda^{-j} T_m^j f(\omega) > 0. \tag{6.9}$$

$E_L(\mathbb{R})$ ist endlich-dimensional, also ist die lineare Abbildung $D_0^L|_{E_L(\mathbb{R})}$ stetig, somit folgt

$$D_0^L(T_m R_\lambda(T_m) f)(\omega) = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^{-p} D_0^L(T_m^p f)(\omega).$$

$D_0^L(T_m^p f)$ ist nach Bemerkung 6.3 2. für alle $p \in \mathbb{N}$ positiv semidefinit ist. Insbesondere gilt für alle $p \in \mathbb{N}$

$$D_0^L(T_m R_\lambda(T_m) f)(\omega) \geq \lambda^{-(p+1)} D_0^L(T_m^{p+1} f)(\omega).$$

Wählt man zu $\omega \neq 0$ ein ρ gemäß Bemerkung 6.11, so folgt analog wie im Beweis von Satz 6.10

$$\begin{aligned} D_0^L(T_m^{j+1}f)(\omega) &= D_0^L f(B^{-(j+1)}\omega) + \sum_{\nu=0}^{j} \sum_{i=1}^{a-1} T_m^\nu f(B^{-1}\rho_i) D_{B^{-1}\rho_i}^L m(B^{-(j+1)+\nu}\omega) \\ &\geq T_m^j f(B^{-1}\rho) D_{B^{-1}\rho}^L m(B^{-1}\omega) > 0 \end{aligned}$$

und somit insgesamt

$$D_0^L(T_m R_\lambda(T_m) f)(\omega) > 0$$

für alle $\omega \neq 0$ und $\lambda > \varrho_{E_L}$. $D_0^L(T_m R_\lambda(T_m) f)$ ist also positiv definit für $\lambda > \varrho_{E_L}$. Zusammen mit (6.9) erhält man also $T_m R_\lambda(T_m) f \in P_L \cap E_L$ für $\lambda > \varrho_{E_L}$. Nach Satz 6.4 liegt damit $T_m R_\lambda(T_m) f$ im Inneren von K_L für alle $\lambda > \varrho_{E_L}$. □

Die nachfolgenden Hilfssätze dienen der Vorbereitung des Satzes 6.19, in dem ein direkt nachprüfbares Kriterium für die starke Positivität von T_m angegeben wird.

Lemma 6.13. *Für alle $g \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n) \setminus \{0\}$ gibt es ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so daß gilt: Für alle $j \geq j_0$ gibt es $\rho_{i_p} \in \{\rho_0, \dots, \rho_{a-1}\}$, $p = 1, \dots, j$, so daß*

$$g\big(B^{-j}(\omega + \rho_{i_1} + \cdots + B^{j-1}\rho_{i_j})\big) \neq 0$$

für alle $\omega \in I^n$.

Beweis: Da $g \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n) \setminus \{0\}$, existiert $\omega' \in \mathbb{R}^n$ mit $g(\omega') \neq 0$ und $\epsilon > 0$ mit $g(\omega) \neq 0$ für alle $\omega \in U_\epsilon(\omega')$. I^n ist $\mathbb{Z}^n$-Kachel, es gibt also für alle $j \in \mathbb{N}^*$ ein $\omega_j \in I^n$ und ein $k_j \in \mathbb{Z}^n$ mit $B^j\omega' = \omega_j + k_j$. Da $||B^{-j}||^{1/j} \to \rho(B^{-1})$, vgl. Zeidler [18] p.795, und somit $||B^{-j}|| \to 0$, gibt es ein $j_0 = j_0(\epsilon)$, so daß

$$2\|B^{-j}\| \max_{\omega \in I^N} \|\omega\| < \epsilon$$

für alle $j \geq j_0$. Für $\omega \in I^n$ gilt

$$\begin{aligned}
\|B^{-j}(\omega + k_j) - \omega'\| &\leq \|B^{-j}\omega\| + \|B^{-j}k_j - \omega'\| \\
&\leq \|B^{-j}\|\|\omega\| + \|B^{-j}\|\|k_j - B^j\omega'\| \\
&= \|B^{-j}\|\big(\|\omega\| + \|\omega_j\|\big) \\
&\leq 2\|B^{-j}\| \max_{\omega \in I^n} \|\omega\|.
\end{aligned}$$

und folglich

$$g(B^{-j}(\omega + k_j)) \neq 0 \tag{6.10}$$

für alle $j \geq j_0$ und $\omega \in I^n$.
Da $\{\rho_0, \dots, \rho_{a-1}\}$ ein Repräsentantensystem von ${}^{\mathbb{Z}^n}\!/_{B\mathbb{Z}^n}$ ist, gibt es für alle $j \in \mathbb{N}^*$ ein $l_j \in \mathbb{Z}^n$ und $\rho_{i_p} \in \{\rho_0, \dots, \rho_{a-1}\}$, $p = 1, \dots, j$, so daß

$$\begin{aligned}
k_j &= \rho_{i_1} + Bl_1 = \rho_{i_1} + B(\rho_{i_2} + Bl_2) = \rho_{i_1} + B\rho_{i_1} + B^2 l_2 \\
&= \cdots = \rho_{i_1} + \cdots + B^{j-1}\rho_{i_j} + B^j l_j.
\end{aligned}$$

Somit gilt wegen der $\mathbb{Z}^n$-Periodizität von g und nach (6.10)

$$\begin{aligned}
g\big(B^{-j}(\omega + \rho_{i_1} + \cdots + B^{j-1}\rho_{i_j})\big) &= g\big(B^{-j}(\omega + \rho_{i_1} + \cdots + B^{j-1}\rho_{i_j} + B^j l_j)\big) \\
&= g(B^{-j}(\omega + k_j)) \neq 0
\end{aligned}$$

für alle $j \geq j_0$ und $\omega \in I^n$. □

Lemma 6.14. *Es sei $f \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$. Dann gilt für alle $j \in \mathbb{N}^*$ und $\omega \in \mathbb{R}^n$*

$$T_m^j f(\omega) = \sum_{i_1, \dots, i_j = 0}^{a-1} M_{i_1, \dots, i_j}(\omega) f(B^{-j}(\omega + \rho_{i_1} + B\rho_{i_2} + \cdots + B^{j-1}\rho_{i_j}))$$

mit

$$M_{i_1, \dots, i_j}(\omega) := \prod_{\nu=1}^{j} m(B^{-\nu}(\omega + \rho_{i_1} + B\rho_{i_2} + \cdots + B^{\nu-1}\rho_{i_\nu})).$$

Beweis: (durch vollständige Induktion)
Für $j = 1$ gilt die Behauptung nach Definition von T_m. Aus der Induktionsvoraussetzung für $j \in \mathbb{N}^*$ folgt

$$T_m^{j+1} f(\omega) = T_m^j (T_m f)(\omega)$$
$$= \sum_{i_1,\ldots,i_j=0}^{a-1} M_{i_1,\ldots,i_j}(\omega)(T_m f)(B^{-j}(\omega + \rho_{i_1} + B\rho_{i_2} + \cdots + B^{j-1}\rho_{i_j})).$$

Mit

$$B^{-1}(B^{-j}(\omega + \rho_{i_1} + \cdots + B^{j-1}\rho_{i_j}) + \rho_{i_{j+1}}) = B^{-(j+1)}(\omega + \rho_{i_1} + \cdots + B^j \rho_{i_{j+1}}))$$

und

$$M_{i_1,\ldots,i_{j+1}}(\omega) = M_{i_1,\ldots,i_j}(\omega) m(B^{-(j+1)}(\omega + \rho_{i_1} + \cdots + B^j \rho_{i_{j+1}}))$$

folgt also

$$T_m^{j+1} f(\omega) = \sum_{i_1,\ldots,i_{j+1}=0}^{a-1} M_{i_1,\ldots,i_{j+1}}(\omega) f(B^{-(j+1)}(\omega + \rho_{i_1} + B\rho_{i_2} + \cdots + B^j \rho_{i_{j+1}}))$$

und somit die Behauptung. □

Lemma 6.15. *Für $m \geq 0$ gelte eine der folgenden Bedingungen:*

1. *$n = 1$ und m erfülle das Cohen-Kriterium.*
2. *$m(\omega) \neq 0$ für alle $\omega \notin B^{-1}\rho_i + \mathbb{Z}^n$, $i = 1, \ldots, a-1$.*

Dann gibt es für jedes $g \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n) \setminus \{0\}$, $g \geq 0$, ein $j = j(g)$ mit

$$T_m^j g(\omega) > 0 \text{ für alle } \omega \notin \mathbb{Z}^n.$$

Beweis: $T_m^j g$ ist $\mathbb{Z}^n$-periodisch für alle $j \in \mathbb{N}^*$. Deshalb sei o.E. $\omega \in I^n$, $\omega \neq 0$. Es gelte zunächst 1. In diesem Fall gilt o.E. $A = B = a$ und somit nach Lemma 6.14 und da m $\mathbb{Z}^n$-periodisch

$$T_m^j g(\omega) = \sum_{i_1,\ldots,i_j=0}^{a-1} \prod_{\nu=1}^{j} m(a^{-\nu}(\omega + \rho_{i_1} + \cdots + a^{\nu-1}\rho_{i_\nu})) g(a^{-j}(\omega + \rho_{i_1} + \cdots + a^{j-1}\rho_{i_j}))$$
$$= \sum_{i_1,\ldots,i_j=0}^{a-1} \prod_{\nu=1}^{j} m(a^{-\nu}(\omega + \rho_{i_1} + \cdots + a^{j-1}\rho_{i_j})) g(a^{-j}(\omega + \rho_{i_1} + \cdots + a^{j-1}\rho_{i_j})).$$

Da sich mit

$$\rho_{i_1} + a\rho_{i_2} + \cdots + a^{j-1}\rho_{i_j}, \; \rho_{i_p} \in \{0, \ldots, a-1\},$$

alle ganzen Zahlen zwischen 0 und $a^j - 1$ eindeutig darstellen lassen, folgt

$$T_m^j g(\omega) = \sum_{k=0}^{a^j-1} \prod_{\nu=1}^{j} m(a^{-\nu}(\omega + k))g(a^{-j}(\omega + k)).$$

Wegen der $\mathbb{Z}$-Periodizität von m bzw. g gilt

$$\sum_{a^{j-1}(a-1)}^{a^j-1} \prod_{\nu=1}^{j} m(a^{-\nu}(\omega+k))g(a^{-j}(\omega+k)) = \sum_{k=-a^{j-1}}^{-1} \prod_{\nu=1}^{j} m(a^{-\nu}(\omega+k))g(a^{-j}(\omega+k))$$

und damit insgesamt

$$T_m^j g(\omega) = \sum_{k=-a^{j-1}}^{a^{j-1}(a-1)-1} \prod_{\nu=1}^{j} m(a^{-\nu}(\omega + k))g(a^{-j}(\omega + k)).$$

Da $m \geq 0$ und erfüllt das Cohen-Kriterium erfüllt, existiert eine kompakte $\mathbb{Z}$-Kachel K, die eine Nullumgebung enthält, und eine positive Konstante c_K mit

$$m(a^{-\nu}\cdot) \geq c_K 1_K$$

für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Damit folgt

$$T_m^j g(\omega) \geq \sum_{k=-a^{j-1}}^{a^{j-1}(a-1)-1} c_K^j 1_K(w + k)g(a^{-j}(\omega + k)). \tag{6.11}$$

Da K eine $\mathbb{Z}$-Kachel ist, existiert zu jedem ω ein $\tilde{\omega}(\omega) \in K$ und ein $k(\omega) \in \mathbb{Z}^n$ mit

$$\omega + k(\omega) = \tilde{\omega}(\omega),$$

und da I und K beschränkt sind, ist

$$k_0 := \sup_{\omega \in I^n} |k(\omega)| < \infty.$$

Für $j \geq j_0 := [\log_a k_0] + 2$ gilt $k(\omega) \in [-a^{j-1}, a^{j-1}(a-1) - 1]$ für alle $\omega \in I$ und folglich nach (6.11)

$$T_m^j g(\omega) \geq c_K^j g(a^{-j}\tilde{w}(\omega)).$$

Da die Nullstellen der ganzen Funktion g nach dem Identitätssatz isoliert sind, existiert eine Umgebung U des Nullpunkts mit $g|_{U\setminus\{0\}} > 0$. Somit existiert ein $j_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$g(a^{-j}\tilde{w}) > 0 \text{ für alle } j \geq j_1 \text{ und } \tilde{\omega} \in K \setminus \{0\}.$$

Mit $\omega \in I \setminus \{0\}$ ist auch $\tilde{w}(\omega) \neq 0$. Für $j \geq \max(j_0, j_1)$ gilt also insgesamt

$$T_m^j g(\omega) > 0.$$

Es gelte nun 2. Nach Lemma 6.13 und wegen $g \geq 0$ gibt es ein $j \in \mathbb{N}^*$ und $\rho_{i_p} \in \{\rho_0, \dots, \rho_{a-1}\}$, $p = 1, \dots, j$ mit

$$g(B^{-j}(\omega + \rho_{i_1} + B\rho_{i_2} + \dots + B^{j-1}\rho_{i_j})) > 0$$

Wäre für ein $\nu \leq j$

$$B^{-\nu}(\omega + \rho_{i_1} + B\rho_{i_2} + \dots + B^{\nu-1}\rho_{i_\nu}) = B^{-1}\rho_{i'} + k$$

mit $i' \in \{1, \dots, a-1\}$, $k \in I^n$, so wäre

$$\omega = B^\nu k - \rho_{i_1} - B\rho_{i_2} - \dots - B^{\nu-1}\rho_{i_\nu} + B^{\nu-1}\rho_{i'} \in \mathbb{Z}^n.$$

Da m nur Nullstellen in $B^{-1}\rho_i + \mathbb{Z}^n$ besitzt, ist also

$$m(B^{-\nu}(\omega + \rho_{i_1} + B\rho_{i_2} + \dots + B^{\nu-1}\rho_{i_\nu})) \neq 0$$

für alle $\nu \leq j$ und somit ist

$$M_{i_1,\dots,i_j}(\omega) \neq 0.$$

Mit Lemma 6.14 erhält man

$$T_m^j g(\omega) \geq M_{i_1,\dots,i_j}(\omega) g(B^{-j}(\omega + \rho_{i_1} + B\rho_{i_2} + \dots + B^{j-1}\rho_j)) > 0.$$

□

Bemerkung 6.16. Für $SF(m) = 0$ gilt die Aussage von Lemma 6.15 nach Bemerkung 6.11 sogar für alle $\omega \in \mathbb{R}^n$. Im Falle $n = 1$ ist dies im wesentlichen die Aussage von Lemma 4.5 aus Cohen/Daubechies [3], wobei dort j auch von ω abhängt.

Definition 6.17. Es sei $P_L \neq \emptyset$. Das Symbol $m \geq 0$ heißt *stark positiv* (bzgl. B), falls für $L = SF(m)$ gilt:

1. m hat nur Nullstellen in $B^{-1}\rho_i + \mathbb{Z}^n$, $i = 1, \dots, a-1$.
2. $\sum_{i=1}^{a-1} D^L_{B^{-1}\rho_i} m$ ist positiv definit.

Bemerkung 6.18. $m \geq 0$ ist genau dann stark positiv, falls für $L = SF(m)$

$$T_m 1(B\cdot) - m = \sum_{i=1}^{a-1} m(\cdot + B^{-1}\rho_i) \in P_L.$$

Ist m interpolierend, d.h $T_m 1 = 1$, so ist m also genau dann stark positiv, falls $1 - m \in P_L$. Letzteres ist dazu äquivalent, daß gilt

1. $m(\omega) = 1$ genau für $\omega \in \mathbb{Z}^n$.

2. $D_0^L m$ ist negativ definit.

Allgemeine Konstruktionen von stark positiven Symbolen und konkrete Beispiele werden in Kapitel 8 behandelt.

Satz 6.19. *Für $m \geq 0$ gelte eine der folgenden Bedingungen:*

1. $n = 1$ und m erfülle das Cohen-Kriterium.

2. m sei stark positiv.

Dann ist $T_m|_{E_L(\mathbb{R})}$ stark positiv.

Beweis: Es sind lediglich die Voraussetzungen aus Satz 6.10 nachzuweisen. Nach Lemma 6.15 existiert für alle $f \in K_L \setminus \{0\}$ ein j mit $T_m^j f(\omega) > 0$ für alle $\omega \notin \mathbb{Z}^n$. Da nach Bemerkung 6.11 für $n = 1$ die Bedingung (6.7) stets erfüllt ist, folgt in diesem Falle daraus sofort die Behauptung. Im zweiten Falle kann man $K = I^n$ als kompakte $\mathbb{Z}^n$-Kachel wählen, da wegen $\rho_i \notin I^n$ trivialerweise $m(B^{-1}\omega) > 0$ für alle $\omega \in K$ gilt. Die noch fehlende Voraussetzung (6.7) aus Satz 6.10 ist nach Definition 6.17 erfüllt. □

Bemerkung 6.20. In Cohen/Daubechies [3] wird für $n = 1$, Symbole $m \in \mathscr{C}(\mathbb{T}^n)$ mit $SF(m) = 0$ und einer l^1-Maske sowie einen speziellen unendlichdimensionalen T_m-invarianten Unterraum E der Nullstellenordnung 0 nachgewiesen, daß $T_m|_E$ irreduzibel ist, falls m das Cohen-Kriterium erfüllt. In unserer endlichdimensionaler Situation ist Satz 6.19 auch für $n = 1$ eine Verschärfung von Lemma 4.6 aus Cohen/Daubechies [3]. Dort wird allerdings in einem separaten Beweisschritt gezeigt, daß der kompakte Operator $T_m|_E$ auf dem Spektralkreis keinen weiteren Eigenwert besitzt. Überträgt man dieses Ergebnis auf die endlich-dimensionale Situation, so ist nach Bemerkung 5.12 damit auch implizit gezeigt worden, daß $T_m|_E$ stark positiv ist.
Für $n > 1$ ist nicht klar, ob $T_m|_{E_L(\mathbb{R})}$ auch dann stark positiv (oder zumindest irreduzibel) ist, wenn man die Bedingung 2. aus Definition 6.17 durch eine schwächere Nullstellenbedingung an m ersetzt. Gegenbeispiele zeigen jedoch, daß anders als im Falle $n = 1$ im allgemeinen das Cohen-Kriterium allein nicht ausreicht.
Man betrachte das positive Symbol

$$m(\omega) = m(\omega_1, \omega_2) = \cos^2 \pi\omega_1 \cos^2 \pi\omega_2$$

bzgl. der Dilatationsmatrix $A = 2E$. m erfüllt das Cohen-Kriterium mit dem Kompaktum $K = I^2$ und hat die Strang-Fix Ordnung 2. Der zugehörige Transferoperator T_m besitzt eingeschränkt auf den Raum $E_2 = E_2^1(\|\cdot\|_\infty)$ als Spektralradius den zweifachen Eigenwert 1/2. Somit kann $T_m|_{E_2}$ nicht irreduzibel und damit auch nicht stark positiv sein.

Unter den Voraussetzungen von Satz 6.19 ist $T_m|_{E_L(\mathbb{R})}$ stark positiv, somit kann man Satz 5.8 anwenden. Damit erhält man die ersten drei Aussagen der

Folgerung 6.21. *Es gelten die Voraussetzungen aus Satz 6.19. Dann gilt*

1. *$T_m|_{E_L(\mathbb{R})}$ besitzt einen Eigenvektor im Inneren von K_L. Dieser ist (bis auf Multiplikation mit einer Konstanten) der einzige Eigenvektor von $T_m|_{E_L(\mathbb{R})}$ in K_L. Der zugehörige Eigenwert ist ϱ_{E_L} und ist algebraisch einfach.*

2. *$(T_m|_{E_L(\mathbb{R})})'$ besitzt einen streng positiven Eigenvektor. Dieser ist (bis auf Multiplikation mit einer Konstanten) der einzige Eigenvektor von $(T_m|_{E_L(\mathbb{R})})'$ in K_L'. Der zugehörige Eigenwert ist ϱ_{E_L} und ist algebraisch einfach.*

3. *Für alle komplexen λ aus dem Spektrum von $T_m|_{E_L(\mathbb{R})}$ mit $\lambda \neq \varrho_{E_L}$ gilt $|\lambda| < \varrho_{E_L}$.*

4. *Ist ϱ_A der Spektralradius von A, so gilt $\varrho_{E_L} \geq \varrho_A^{-L}$ und $\varrho_{E_L} > |\lambda|^{-L}$ für jeden reellen Eigenwert λ von A. Ist A (komplex) diagonalisierbar, so gilt sogar $\varrho_{E_L} > \varrho_A^{-L}$.*

Beweis: Es ist nur noch 4. zu zeigen: Zu $\epsilon > 0$ sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$, so daß für die zugehörige Matrixnorm gilt:

$$\|B\| \leq \varrho_B + \epsilon = \varrho_A + \epsilon.$$

Dann gilt $\|B\omega\| \leq (\varrho_A + \epsilon)\|\omega\|$ und damit

$$\|B^{-1}\omega\| \geq (\varrho_A + \epsilon)^{-1}\|\omega\|$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}^n$.
Nach 1. ist ϱ_{E_L} Eigenwert von $T_m|_{E_L}$ und es existiert eine zugehörige Eigenfunktion $f \in \operatorname{int}(K_L)$, insbesondere gilt $f(\omega) > 0$ für alle $\omega \notin \mathbb{Z}^n$. Aus Lemma 4.8 folgt

$$\begin{aligned} \varrho_{E_L} D_0^L f(\omega) &= D_0^L (T_m f)(\omega) \\ &= D_0^L f(B^{-1}\omega) + \sum_{i=1}^{a-1} f(B^{-1}\rho_i) D_{B^{-1}\rho_i}^L m(B^{-1}\omega). \end{aligned} \tag{6.12}$$

Da $\sum_{i=1}^{a-1} D_{B^{-1}\rho_i}^L m$ positiv definit ist, folgt also für $\|\omega\| = 1$

$$\begin{aligned} \varrho_{E_L} D_0^L f(\omega) &> D_0^L f(B^{-1}\omega) \\ &= \|B^{-1}\omega\|^L D_0^L f\Big(\frac{B^{-1}\omega}{\|B^{-1}\omega\|}\Big) \\ &\geq (\varrho_A + \epsilon)^{-L} D_0^L f\Big(\frac{B^{-1}\omega}{\|B^{-1}\omega\|}\Big), \end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, daß $D_0^L f$ ein homogenes Polynom vom Grad L in ω ist. Für $c_f := \max_{\|\omega\|=1} D_0^L f(\omega)$ folgt

$$\varrho_{E_L} c_f > (\varrho_A + \epsilon)^{-L} c_f. \tag{6.13}$$

Da $D_0^L f$ positiv definit ist, ist $c_f \neq 0$. Man erhält also

$$\varrho_{E_L} \geq \varrho_A^{-L}.$$

Ist A diagonalisierbar, so existiert eine Norm $\|\cdot\|$ auf dem $\mathbb{R}^n$ mit

$$\|B^{-1}\omega\| = \varrho_A^{-1}\|\omega\|$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}^n$. In diesem Fall gilt die Gleichung (6.13) mit $\epsilon = 0$ und somit ist $\varrho_{E_L} > \varrho_A^{-L}$.
Da λ und A reell sind, existiert ein reller Eigenvektor ξ zu λ. Aus (6.12) und der Homogenität der L-ten Ableitungen folgt

$$\begin{aligned}
\varrho_{E_L} D_0^L f(\xi) &= |D_0^L T_m f(\xi)| \\
&= \Big|\lambda^{-L}\Big(D_0^L f(\xi) + \sum_{i=1}^{a-1} f(B^{-1}\rho_i) D_{B^{-1}\rho_i}^L m(\xi)\Big)\Big| \\
&= |\lambda|^{-L}\Big(D_0^L f(\xi) + \sum_{i=1}^{a-1} f(B^{-1}\rho_i) D_{B^{-1}\rho_i}^L m(\xi)\Big) \\
&> |\lambda|^{-L} D_0^L f(\xi).
\end{aligned}$$

Aus $D_0^L f(\xi) > 0$ folgt also $\varrho_{E_L} > |\lambda|^{-L}$. □

Bemerkung 6.22. Es sei $SF(m) = L$.
1. Für die Abschätzung $\varrho_{E_L} \geq \varrho_A^{-L}$ genügt nach (6.13) die Existenz einer Eigenfunktion $f \in K_L$ zu ϱ_{E_L} mit $N(f) = L$.
2. Zusätzlich zu den Voraussetzungen aus Satz 6.19 sei $\hat{\Phi} \in L^1$ und A isotrop. Nach Bemerkung 2.8, 2. erfüllt m das Cohen-Kriterium. Somit sind nach Satz 2.9 alle Voraussetzungen von Folgerung 3.6 erfüllt und es gilt

$$\varrho_{E_L} = \varrho_A^{-s_1(\Phi)} > \varrho_A^{-L}.$$

Man erhält also $SF(m) > s_1(\Phi)$. Dies ist eine Verschärfung des Satzes 3.4.

7 Algebraische Eigenwerte und Eigenfunktionen

Die Resultate aus Kapitel 6 sind im wesentlichen auf $T_m|_{E_L}$ beschränkt, wobei L die Strang-Fix-Ordnung von m ist. Ist $0 \leq L' < L$ und $E_{L'}$ ein endlichdimensionaler, T_m-invarianter Unterraum, der ein $f \in K_{L'} \setminus \{0\}$ mit $D_0^{L'} f = 0$

enthält (dies ist z.B bei geeigneter Wahl von R für die Räume $E_{L'}^R$ aus Bezeichnung 4.7 erfüllt), so ist $T_m|_{E_{L'}^R}$ nicht irreduzibel und damit nicht stark positiv: Nach Lemma 4.8 gilt nämlich

$$D_0^{L'} T_m^j f = D_0^{L'} f(B^{-j}\cdot) \text{ für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Ist also $f \in E_{L'}$ mit $f \geq 0$, $f \neq 0$ und $D_0^{L'} f = 0$, so ist auch $D_0^{L'}(T_m R_\lambda(T_m) f) = 0$. Die Theorie der positiven Operatoren liefert also nur im Falle $L' = L$ substantielle Resultate.

In diesem Kapitel werden Formeln hergeleitet, die die Eigenwerte und teilweise auch die Eigenfunktionen beschreiben, welche bei T_m gegenüber $T_m|_{E_L}$ zusätzlich auftreten.

Bezeichnung 7.1. Für $f \in \mathscr{C}^p(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ und $x^j \in \mathbb{C}^n$, $j = 1, \ldots, p$, sei

$$\begin{aligned} \partial_{x^1,\ldots,x^p} f &:= f^{(p)}(\cdot)(x^1, \ldots, x^p) \\ &= \sum_{j_1,\ldots,j_p=1}^{n} x_{j_1}^1 \ldots x_{j_p}^p \partial_{j_1} \ldots \partial_{j_p} f, \end{aligned}$$

dabei sei $f^{(p)}(x)$ die p-te Fréchet-Ableitung von f in x, die man wie üblich als stetige p-Linearform auffaßt. Ferner sei

$$p_{x^1,\ldots,x^p}(\omega) := (2\pi i)^p \sum_{j_1,\ldots,j_p=1}^{n} x_{j_1}^1 \ldots x_{j_p}^p \omega_{j_1} \ldots \omega_{j_p}$$

Bemerkung 7.2. 1. Für $x = x^1 = \cdots = x^p$ gilt

$$\partial_{x,\ldots,x} f(\xi) = D_\xi^p f(x).$$

2. Für $p = 1$ ist $\partial_x f$ die Richtungsableitung von f in Richtung x.

Der nächste Satz liefert eine Verallgemeinerung von Lemma 2.3.

Satz 7.3. *Es sei $\Phi \in \mathscr{C}^p$ und für $j = 1, \ldots, p$ sei x^j Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert λ_j. Ist $p_{x^1,\ldots,x^p} \neq 0$, so ist*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (\partial_{x^1,\ldots,x^p} \Phi)(k) e_{-k}$$

Eigenfunktion von T_m zum Eigenwert $\prod_{j=1}^p \lambda_j$. Ist zusätzlich $p_{x^1,\ldots,x^p} \hat{\Phi} \in L^1$, so gilt

$$\bar{\omega}(p_{x^1,\ldots,x^p} \hat{\Phi}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (\partial_{x^1,\ldots,x^p} \Phi)(k) e_{-k}. \tag{7.1}$$

$\bar{\omega}(p_{x^1,\ldots,x^p} \hat{\Phi})$ ist also insbesondere ein trigonometrisches Polynom.

Beweis: Die Skalierungsfunktion Φ erfüllt die Zwei-Skalen-Relation

$$\Phi = a \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} h_l \Phi(A\cdot - l).$$

Nach der Kettenregel für die Fréchet-Ableitung gilt

$$\Phi^{(p)}(x) = a \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} h_l \Phi^{(p)}(Ax-l)(A\cdot,\dots,A\cdot).$$

Mit $Ax^j = 1/\lambda_j x^j$ folgt

$$\begin{aligned}\Phi^{(p)}(x)(x^1,\dots,x^p) &= a \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} h_l \Phi^{(p)}(Ax-l)(Ax^1,\dots,Ax^p)\\ &= a\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{\lambda_j}\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} h_l \Phi^{(p)}(Ax-l)(x^1,\dots,x^p).\end{aligned}$$

Somit erfüllt $\partial_{x^1,\dots,x^p}\Phi$ die Zwei-Skalen-Relation

$$\partial_{x^1,\dots,x^p}\Phi = a\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{\lambda_j}\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} h_l (\partial_{x^1,\dots,x^p}\Phi)(A\cdot - l). \tag{7.2}$$

Der Träger von Φ und damit von $\partial_{x^1,\dots,x^p}\Phi$ ist kompakt, somit ist

$$f_{x^1,\dots,x^p} := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(\partial_{x^1,\dots,x^p}\Phi(k))e_{-k}$$

ein trigonometrisches Polynom und es gilt nach Satz 2.2

$$\begin{aligned}T_m f_{x^1,\dots,x^p} &= a\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} h_l(\partial_{x^1,\dots,x^p}\Phi)(Ak-l)e_{-k}\\ &= \prod_{j=1}^{p}\lambda_j\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(\partial_{x^1,\dots,x^p}\Phi(k))e_{-k}\\ &= \prod_{j=1}^{p}\lambda_j f_{x^1,\dots,x^p}.\end{aligned}$$

Für $p_{x^1,\dots,x^p}\hat{\Phi}\in L^1$ folgt die Formel (7.1) aus

$$(p_{x^1,\dots,x^p}\hat{\Phi})\hat{} = (\partial_{x^1,\dots,x^p}\Phi)(-\cdot) \tag{7.3}$$

und der Poisson-Formel.
Man nehme nun an, es sei $f_{x^1,\dots,x^p} = 0$ oder gleichbedeutend, daß $\partial_{x^1,\dots,x^p}\Phi(k) = 0$ für alle $k\in\mathbb{Z}^n$ gilt. Da $\partial_{x^1,\dots,x^p}\Phi$ die Zwei-Skalenrelation (7.2) erfüllt, folgt daraus induktiv auch

$$\partial_{x^1,\dots,x^p}\Phi(A^{-j}k) = 0 \text{ für alle } j\in\mathbb{N},\ \ k\in\mathbb{Z}^n.$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ existiert ein $k \in \mathbb{Z}^n$ mit $A^j x - k \in I^n$. Es gilt also

$$\|x - A^{-j}k\| \leq \|A^{-j}\| \|A^j x - k\| \leq c\|A^{-j}\|,$$

wobei die Konstante c nur von der gewählten Norm abhängt. $\|A^{-j}\|$ konvergiert gegen Null für $j \to \infty$, vgl. den Beweis von Lemma 6.13. Somit ist die Menge $\{A^{-j}k : j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}^n\}$ dicht in $\mathbb{R}^n$. $\partial_{x^1,\ldots,x^p}\Phi$ ist also eine stetige Funktion, die auf einer dichten Menge verschwindet. Somit muß $\partial_{x^1,\ldots,x^p}\Phi$ und damit nach (7.3) auch $p_{x^1,\ldots,x^p}\hat{\Phi}$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ identisch Null sein. Es gibt aber wegen $\hat{\Phi}(0) = 1$ eine Umgebung U der Null, in der $\hat{\Phi}$ nicht verschwindet. Es folgt also $p_{x^1,\ldots,x^p}|_U = 0$. Dies ist nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen mehrerer Veränderlicher ein Widerspruch zu $p_{x^1,\ldots,x^p} \neq 0$. □

Es sei im weiteren $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ der Vektor, der als Einträge die mit ihrer algebraischen Vielfachheit gezählten Eigenwerte von A^{-1} bzw. B^{-1} besitzt. Die Eigenwerte aus Satz 7.3 haben alle die Form

$$\Lambda^\alpha = \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_n^{\alpha_n}.$$

Es zeigt sich, daß für eine Eigenfunktion von T_m, deren Nullstellenordnung in Null echt kleiner als die Strang-Fix-Ordnung von m ist, der zugehörige Eigenwert ebenfalls von dieser Form ist.

Lemma 7.4. *Es sei $D_n = (d_{pq}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in Jordan-Normalform,*

$$d_{pq} = \begin{cases} \lambda_p & q = p, \\ \epsilon_p \in \{0,1\} & q = p+1, \\ 0 & \textit{sonst}, \end{cases}$$

und $p_L = \sum_{|\alpha|=L} a_\alpha id^\alpha$ ein homogenes Polynom vom Grad L. Dann gilt $p_L(D_n\cdot) = \sum_{|\alpha|=L} b_\alpha id^\alpha$ mit

$$b_\alpha = \Lambda^\alpha a_\alpha + \sum_{\substack{|\beta|=L \\ \beta>\alpha}} c_{\alpha\beta} a_\beta,$$

wobei $\mathbb{N}^n$ mit der lexikographischen Ordnung versehen sei.

Beweis: Zuerst soll durch vollständige Induktion nach n gezeigt werden, daß für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ gilt

$$(D_n\omega)^\alpha = \Lambda^\alpha\omega^\alpha + \sum_{\substack{|\beta|=|\alpha| \\ \beta<\alpha}} c_{\beta\alpha}\omega^\beta$$

Für $n = 1$ gilt trivialerweise $(D_1\omega)^\alpha = \Lambda^\alpha\omega^\alpha$. Es gelte die Behauptung für $n-1$. Mit $\alpha = (\alpha_1, \tilde{\alpha}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{n-1}$ und $\omega = (\omega_1, \tilde{\omega}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ gilt

$$\begin{aligned}(D_n\omega)^\alpha &= (\lambda_1\omega_1 + \epsilon_1\omega_2)^{\alpha_1}(D_{n-1}\tilde{\omega})^{\tilde{\alpha}} \\ &= (\lambda_1^{\alpha_1}\omega_1^{\alpha_1} + p(\omega_1,\omega_2))(D_{n-1}\tilde{\omega})^{\tilde{\alpha}},\end{aligned}$$

wobei p ein homogenes Polynom in ω_1 und ω_2 der Ordnung α_1 ist (oder p ist das Nullpolynom), dessen höchste vorkommende Potenz in ω_1 kleiner als α_1 ist. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$(D_{n-1}\tilde{\omega})^{\tilde{\alpha}} = (\tilde{\Lambda}^{\tilde{\alpha}}\tilde{\omega}^{\tilde{\alpha}} + \sum_{\substack{|\tilde{\beta}|=|\tilde{\alpha}| \\ \tilde{\beta}<\tilde{\alpha}}} c_{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}}\tilde{\omega}^{\tilde{\beta}}).$$

Somit folgt

$$p(\omega_1,\omega_2)(D_{n-1}\tilde{\omega})^{\tilde{\alpha}} = \sum_{\substack{|\beta|=|\alpha| \\ \beta_1<\alpha_1}} c_{\beta\alpha}\omega^{\alpha}.$$

und

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{\alpha_1}\omega_1^{\alpha_1}(D_{n-1}\tilde{\omega}) &= \Lambda^{\alpha}\omega^{\alpha} + \lambda_1^{\alpha_1}\omega_1^{\alpha_1}\sum_{\substack{|\tilde{\beta}|=|\tilde{\alpha}| \\ \tilde{\beta}<\tilde{\alpha}}} c_{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}}\tilde{\omega}^{\tilde{\beta}} \\
&= \Lambda^{\alpha}\omega^{\alpha} + \sum_{\substack{|\beta|=|\alpha| \\ \beta_1=\alpha_1 \\ \beta<\alpha}} c_{\beta\alpha}\omega^{\alpha}
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned}
(D_n\omega)^{\alpha} &= \Lambda^{\alpha}\omega^{\alpha} + \sum_{\substack{|\beta|=|\alpha| \\ \beta_1=\alpha_1 \\ \beta<\alpha}} c_{\beta\alpha}\omega^{\alpha} + \sum_{\substack{|\beta|=|\alpha| \\ \beta_1<\alpha_1}} c_{\beta\alpha}\omega^{\alpha} \\
&= \Lambda^{\alpha}\omega^{\alpha} + \sum_{\substack{|\beta|=|\alpha| \\ \beta<\alpha}} c_{\beta\alpha}\omega^{\beta}.
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
p_L(D_n\omega) &= \sum_{|\alpha|=L} a_{\alpha}(D_n\omega)^{\alpha} = \sum_{|\alpha|=L} a_{\alpha}\big(\Lambda^{\alpha}\omega^{\alpha} + \sum_{\substack{|\beta|=|\alpha| \\ \beta<\alpha}} c_{\beta\alpha}\omega^{\beta}\big) \\
&= \sum_{|\alpha|=L} a_{\alpha}\Lambda^{\alpha}\omega^{\alpha} + \sum_{|\beta|=L}\big(\sum_{\substack{|\alpha|=|\beta| \\ \alpha>\beta}} a_{\alpha}c_{\beta\alpha}\big)\omega^{\beta} \\
&= \sum_{|\alpha|=L}\big(\Lambda^{\alpha}a_{\alpha} + \sum_{\substack{|\beta|=L \\ \beta>\alpha}} c_{\alpha\beta}a_{\beta}\big)\omega^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Wegen der linearen Unabhängigheit der Monome id^{α}, $|\alpha| = L$ folgt die Behauptung. $\square$

Satz 7.5. *Es sei $f \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ eine Eigenfunktion von T_m zum Eigenwert λ mit $N(f) < SF(m)$. Dann gilt $\lambda = \Lambda^\alpha$ mit $|\alpha| = N(f)$.*

Beweis: Aus $T_m f = \lambda f$ folgt nach Lemma 4.8 für $L = N(f)$

$$D_0^L f(B^{-1}\cdot) = D_0^L(T_m f) = \lambda D_0^L f. \tag{7.4}$$

Sei $B^{-1} = CDC^{-1}$, wobei D eine Jordan-Normalform von B^{-1} sei. Definiert man das homogene Polynom p_L vom Grad L durch

$$p_L = \sum_{|\alpha|=L} a_\alpha id^\alpha := D_0^L f(C\cdot),$$

so ergibt sich aus (7.4)

$$p_L(D\cdot) = D_0^L f(CD\cdot) = D_0^L f(B^{-1}C\cdot) = \lambda D_0^L f(C\cdot) = \lambda p_L. \tag{7.5}$$

Nach Lemma 7.4 erhält man für $p_L(D\cdot) = \sum_{|\alpha|=L} b_\alpha id^\alpha$

$$b_\alpha = \Lambda^\alpha a_\alpha + \sum_{\substack{|\beta|=L\\ \beta>\alpha}} c_{\alpha\beta} a_\beta.$$

Somit folgt aus (7.5) für alle $|\alpha| = L$

$$(\Lambda^\alpha - \lambda)a_\alpha + \sum_{\substack{|\beta|=L\\ \beta>\alpha}} c_{\alpha\beta} a_\beta = 0. \tag{7.6}$$

Ist $\alpha_1 < \cdots < \alpha_N$ die lexikographische Ordnung der $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| = L$, so liegt $a := (a_{\alpha_i}) \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ also im Kern einer oberen Dreiecksmatrix, deren Diagonalelemente $\Lambda^{\alpha_i} - \lambda$ sind. Demnach existiert ein α, $|\alpha| = L$, mit $\lambda = \Lambda^\alpha$. □

Bemerkung 7.6. Dimensionsbetrachtungen und numerische Experimente lassen vermuten, daß beim Übergang von $T_m|_{E_L^R}$ zu $T_m|_{E_0^R}$ nur Eigenwerte und Eigenfunktionen gemäß Satz 7.5 auftreten. Ein Beweis dieser Aussage steht noch aus.

8 Beispiele

Für $n = 1$ genügt das einfache Kriterium aus Satz 6.19 für die starke Positivität von T_m. Dies ist z.B für die klassischen Symbole zu den Burt-Adelson-Filtern erfüllt, vgl. z.B Daubechies [6] p.278. Im folgenden wird deshalb konkret der Fall $n = 2$ betrachtet.

Ausgehend von einem vorgegebenen stark positiven Symbol kann man mit Hilfe des folgenden Lemmas stark positive Symbole höherer Strang-Fix-Ordnung konstruieren.

Lemma 8.1. *Seien $m_1,\ m_2 \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$. m_1 sei stark positiv und $m_2 > 0$. Dann ist für $N \in \mathbb{N}$ das Symbol $m_1^N m_2$ stark positiv mit $SF(m_1^N m_2) = N \cdot SF(m_1)$.*

Beweis: Sei $L = SF(m)$. Mit m_1 besitzt auch $m_1^N m_2$ genau die Nullstellen $B^{-1}\rho_i + \mathbb{Z}^n$, $i = 1, \dots, a-1$ mit der Ordnung $N_{B^{-1}\rho_i}(m_1^N m_2) = N_{B^{-1}\rho_i}(m_1) \cdot N$, also gilt auch

$$SF(m_1^N m_2) = SF(m_1) \cdot N = L \cdot N.$$

Mehrfache Anwendung von Lemma 4.6 5. liefert für $i = 1, \dots, a-1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(LN)!} D^{LN}_{B^{-1}\rho_i}(m_1^N m_2) &= (\frac{1}{(LN)!} D^{LN}_{B^{-1}\rho_i} m_1^N) m_2 \\ &= (\frac{1}{(L(N-1))!} D^{L(N-1)}_{B^{-1}\rho_i} m_1^{N-1})(\frac{1}{L!} D^{L}_{B^{-1}\rho_i} m_1) m_2 \qquad (8.1) \\ &= \dots = \big(\frac{1}{L!} D^{L}_{B^{-1}\rho_i} m_1\big)^N m_2 \end{aligned}$$

Da m_1 nach Voraussetzung stark positiv mit Strang-Fix-Ordnung L ist, existiert nach Bemerkung 6.11 zu jedem $\omega \neq 0$ ein $\rho \in \{\rho_1, \dots, \rho_{a-1}\}$ mit

$$D^{L}_{B^{-1}\rho} m_1(B^{-1}w) > 0.$$

Aus (8.1) folgt somit $D^{LN}_{B^{-1}\rho}(m_1^N m_2)(B^{-1}\omega) > 0$. □

Bemerkung 8.2. Ist m stark positiv, so ist also insbesondere m^N stark positiv. Für das N-te Bezout-Polynom

$$P_N(z) := \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1+j}{j} z^j$$

gilt $P_N(\omega) \geq 1$ für $\omega \in [0,1]$. Ist also zusätzlich $1 - m \geq 0$, z.B wenn m interpolierend ist, so ist

$$m^{(N)} := m^N P_N(1-m) (= m^N P_N \circ (1-m))$$

ebenfalls stark positiv. Für eine Dilatationsmatrix A mit $\det A = 2$ ist $m^{(N)}$ interpolierend, falls m interpolierend ist, vgl. Hampel [10], Kapitel 3.6.4.

Im weiteren beschränken wir uns auf die Dilatationsmatrizen

$$R := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (8.2)$$

für die

$$R\mathbb{Z}^2 = S\mathbb{Z}^2 = R^t\mathbb{Z}^2$$

das Quincunx-Gitter ist. Außerdem gilt $\det R = |\det S| = 2$. Somit bildet

$$\left\{\rho_0 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right), \rho_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\right\}$$

ein Repräsentantensystem sowohl von $\mathbb{Z}^2/_{R^t\mathbb{Z}^2}$ als auch von $\mathbb{Z}^2/_{S\mathbb{Z}^2}$. Zudem gilt

$$R^{t^{-1}}\rho_1 = \frac{1}{2}R\rho_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}S\rho_1 = S^{-1}\rho_1,$$

d.h. $m \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^n)$ ist genau dann bzgl. $B = R^t$ stark positiv (interpolierend), falls m bzgl. $B = S(= S^t)$ stark positiv (interpolierend) ist.
Es sei das *n-dimensionale Laplace-Symbol* $m_{0,n}$ durch

$$m_{0,n}(\omega) := \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}\sum_{|k|=1} e_k(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}\cos 2\pi\omega_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\cos^2 \pi\omega_j$$

definiert und $m_0 := m_{0,2}$, $m_* := m_{0,1}$.
Im weiteren soll nachgewiesen werden, daß die nachfolgenden Symbole stark positiv bzgl. $B = R^t$ bzw. $B = S$ sind.

1. m_0^N, die von Cohen/Daubechies [2] untersuchten Symbole. Diese sind nur für $N = 1$ interpolierend.

2. Die interpolierenden Symbole $m_0^{(N)} := m_0^N P_N(1 - m_0)$, vgl Bemerkung 8.2.

3. Die interpolierenden Symbole $m_{(L)}$ aus Dahlke et al. [5]. Diese sind durch

$$m_{(L)}(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u(\omega_1 + \omega_2)u(\omega_1 - \omega_2)$$

   definiert, wobei $u := 2m_*^{(L)}(\cdot/2) - 1 = 2m_*^L P_L(1 - m_*)(\cdot/2) - 1$.

Bemerkung 8.3. Für $L = 1$ stimmen sowohl $m_{(1)}$ als auch $m_0^{(1)}$ mit dem Laplace-Symbol m_0 überein. Für $L = 2$ ist $m_{(2)} \neq m_0^{(2)}$, ebenso ist für $m := m_0^{(2)}$ auch $m_0^{(4)} \neq m^2 P_2(1 - m)$, obwohl, wie noch gezeigt wird, die Symbole jeweils die gleiche SF-Ordnung haben und stark positiv sind, s.u.

Zu 1., 2.: Eine elementare Rechnung zeigt, daß $N(1 - m_0) = 2$ und

$$D_0^2(1 - m_0) = 2\pi\|\cdot\|_2^2.$$

$D_0^2(1 - m_0)$ ist also positiv definit. Ferner ist $m_0 \geq 0$ und es gilt $m_0(\omega) = 1$ genau dann, wenn $\cos 2\pi\omega_1 = \cos 2\pi\omega_2 = 1$. Dies ist genau für $\omega \in \mathbb{Z}^2$ der Fall. Somit ist $(1 - m_0) \in P_2$. Da m_0 interpolierend ist, ist m_0 nach Bemerkung 6.18 stark positiv mit $SF(m_0) = 2$.

Nach Lemma 8.1 und Bemerkung 8.2 sind m_0^N bzw. $m_0^{(N)}$ also stark positiv und es gilt

$$SF(m_0^N) = SF(m_0^{(N)}) = SF(m_0)N = 2N.$$

Zu 3.: Da m_* interpolierend, ist

$$\begin{aligned}
m_*^{(L)}(\lambda + \frac{1}{2}) &= m_*^L(\lambda + \frac{1}{2})P_L((1 - m_*)(\lambda + \frac{1}{2})) \\
&= (1 - m_*(\lambda))^L P_L(m_*(\lambda)) = \sin^{2L} \pi\lambda \sum_{j=0}^{L-1} \binom{L-1+j}{j} \cos^{2j} \pi\lambda \\
&= (\pi\lambda)^{2L} + O(\lambda^{2L+2}).
\end{aligned}$$

Mit $m_*^{(L)}(\lambda) = 1 - m_*^{(L)}(\lambda + 1/2)$ folgt weiter

$$2m_*^{(L)}(\lambda) - 1 = 1 - 2\,(\pi\lambda)^{2L} + O(\lambda^{2L+2})$$

und damit

$$\begin{aligned}
1 - m_{(L)}(\omega) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2m_*^{(L)}(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}) - 1)(2m_*^{(L)}(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}) - 1) \\
&= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2L} [(\omega_1 + \omega_2)^{2L} + (\omega_1 - \omega_2)^{2L}] + O(\|\omega\|^{2L+2}).
\end{aligned}$$

Es gilt also $N(1 - m_{(L)}) = 2L$ mit

$$D_0^{2L}(1 - m_{(L)})(\omega) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2L} [(\omega_1 + \omega_2)^{2L} + (\omega_1 - \omega_2)^{2L}].$$

$D_0^{2L}(1 - m_{(L)})$ ist positiv semidefinit und genau dann in ω gleich Null, wenn $Sw = 0$ ist. Letzteres ist wegen $\det S = 2$ genau für $\omega = 0$ erfüllt. $D_0^{2L}(1 - m_{(L)})$ ist also positiv definit. Es gilt wegen $|u| \leq 1$ genau dann $m_{(L)}(\omega) = 1$, wenn

$$m_*^{(L)}(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}) = m_*^{(L)}(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}) = 1 \tag{8.3}$$

oder

$$m_*^{(L)}(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}) = m_*^{(L)}(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}) = 0. \tag{8.4}$$

Die Gleichungen in (8.3) sind genau für $\omega \in S\mathbb{Z}^2$ erfüllt, die Gleichungen in (8.4) genau für $\omega \in \binom{1}{0} + S\mathbb{Z}^2$ Insgesamt ist also genau dann $m_{(L)}(\omega) = 1$, wenn $\omega \in \mathbb{Z}^2$. Somit ist $1 - m_{(L)} \in P_{2L}$. Da $m_{(L)}$ interpolierend ist, ist $m_{(L)}$ wiederum nach Bemerkung 6.18 stark positiv mit $SF(m_{(L)}) = 2L$.

In der nachfolgenden Tabelle sind für die Symbole unter 1.-3. die Größen $R = R_A$ aus Satz 4.3, die Dimensionen der zugehörigen invarianten Unterräume E^R (vgl. Bemerkung 4.4) und E_L^R (vgl. Bezeichnung 4.7, Bemerkung 4.12) berechnet. Da A normal ist, kann hier als Norm, die zur Definition des Raumes E^R benutzt

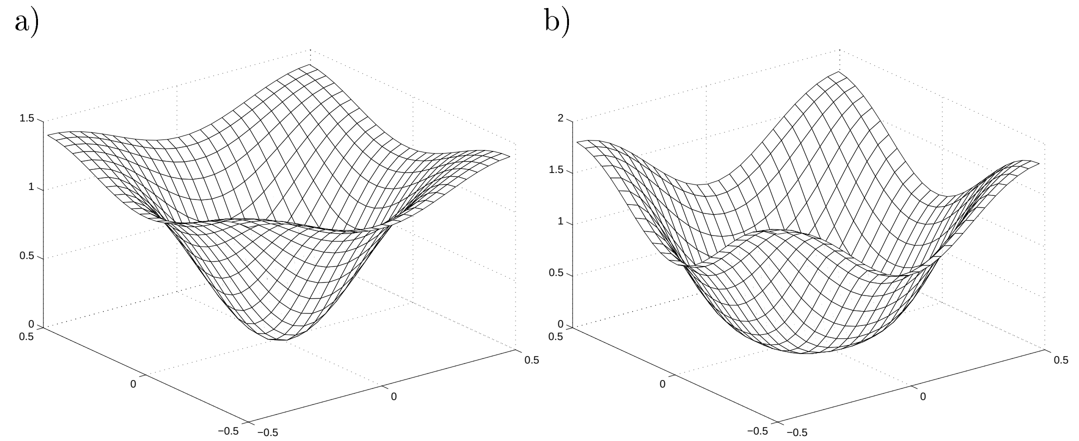

Abbildung 1: Die Eigenfunktion des Übergangsoperators T_m zum Eigenwert ϱ_{E_L} im Fall a) $m = m_0$ bzw. b) $m = m_{(2)}$. Man erkennt die theoretisch begründeten Eigenschaften: Beide Eigenfunktionen liegen im Inneren des positiven Kegels K_L, wobei in a) $L = 2$, in b) $L = 4$ ist.

wird, die euklidische Norm gewählt werden. Die letzten beiden Spalten geben den Spektralradius von $T_m|_{E_L^R}$ und den zugehörigen Sobolevexponenten $s_1(\Phi)$ an (vgl. Folgerung 3.6). Alle Größen sind für $A = R$ bzw. $A = S$ jeweils gleich, vgl. (8.2) und Cohen/Daubechies [2].

Symbol	SF-Ordnung	$R = R_A$	$\dim E^R$	$\dim E_L^R$	ϱ_{E_L}	$s_1(\Phi)$
m_0	2	$1+\sqrt{2}$	21	18	0.8090	0.6115
m_0^2	4	$2(1+\sqrt{2})$	69	59	0.3350	3.1553
$m_0^{(2)}$	4	$3(1+\sqrt{2})$	169	159	0.6246	1.3581
m_4	4	$3(1+\sqrt{2})$	169	159	0.5914	1.5156

Literatur

[1] R. Bröcker. *Analysis in mehreren Variablen.* Teubner, Stuttgart, 1980.

[2] A. Cohen and I. Daubechies. Non-separable bidimensional wavelet bases. *Revista Mat. Iberoamericana*, 9(1):51–137, 1993.

[3] A. Cohen and I. Daubechies. A new technique to estimate the regularity of refinable functions. *Revista Mat. Iberoamericana*, 12(2):527–591, 1996.

[4] A. Cohen, K. Gröchenig, and L. F. Villemoes. Regularity of multivariate refinable functions. *Constr. Approx.*, 15(2):241–255, 1999.

[5] S. Dahlke, K. Gröchenig, and P. Maass. A new approach to interpolating scaling functions. *Appl. Anal.*, 72:485–500, 1999.

[6] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets.* Number 61 in CBMS-NSF Series in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, 1992.

[7] G. Ewald. *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry.* Springer, 1996.

[8] K. Gröchenig and W.R.Madych. Multiresolution analysis, Haar bases, and self-similiar tilings of $\mathbb{R}^n$. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 38(2):556–568, 1992.

[9] W. Gromes and N. Saßmannshausen. Bemerkungen zum Cohen-Kriterium. Philipps-Universität Marburg, Fachbereich Mathematik, Bericht Nr. 83, 2001.

[10] R. Hampel. *Sampling-Theorie und Interpolierende Skalierungsfunktionen in höheren Dimensionen.* PhD thesis, Philipps-Universität Marburg, 2000.

[11] H. Heuser. *Funktionalanalysis.* Teubner, Stuttgart, 1986.

[12] R. Jia. Approximation properties of multivariate wavelets. *Math.Comp.*, 67(222):647–665, 1998.

[13] M.G. Krein and M.A. Rutman. Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space. *Uspehi Matem. Nauk*, 3:3–95, 1948.

[14] W. Lawton, S.L. Lee, and Zuowei Shen. Stability and orthonormality of multivariate refinable functions. *SIAM J. Math. Anal.*, 28(4):999–1014, 1997.

[15] N. Saßmannshausen. PhD thesis, Philipps-Universität Marburg. in preparation.

[16] H. H. Schäfer. Some spectral properties of positive linear operators. *Pacific Z. Math.*, 10:1009–1019, 1960.

[17] H. H. Schäfer. *Topological vector spaces.* Macmillan, New York, 1966.

[18] E. Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications I.* Springer, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris , Tokyo, 1986.