Math. Z. 162, 51–62 (1978)

Mathematische Zeitschrift

Über die Lösungsmengen von Gleichungssystemen über allgemeinen Algebren

H. Peter Gumm

Fachbereich Mathematik, Technische Hochschule Darmstadt
Schloßgartenstr. 7, D-6100 Darmstadt, Bundesrepublik Deutschland

Herrn Professor Reinhold Baer zum 75. Geburtstag gewidmet

Die Lösungsmengen von Gleichungssystemen über einem Vektorraum **V**, oder, gleichwertig damit, von einem System linearer Gleichungen über einem Körper **K**, besitzen eine anschauliche geometrische Deutung als Nebenklassen bzw. affine Teilräume in einer geeigneten Potenz von **V**.

Auch in der Theorie der allgemeinen Algebren ist der Begriff der Nebenklasse oder Äquivalenzklasse einer Kongruenzrelation von großer Bedeutung; insbesondere hat Wille in [9] gezeigt, daß auch hier die Nebenklassen affine Teilräume einer „Kongruenzklassengeometrie" sind und hat Zusammenhänge zwischen algebraischer und geometrischer Struktur entwickelt.

In dieser Arbeit soll der Frage nachgegangen werden, ob ähnlich wie bei Vektorräumen die Lösungen von Gleichungen in einer allgemeinen Algebra die Kongruenzklassengeometrie beschreiben. Wir wollen also zunächst die Frage stellen: In welchen Algebren $\mathfrak{A}$ sind die Lösungsmengen von Gleichungssystemen immer Nebenklassen einer geeigneten Kongruenz auf $\mathfrak{A}^n$, wobei n die Anzahl der verschiedenen Variablen in dem betrachteten System Σ ist.

Zunächst müssen wir jedoch gewisse Einschränkungen hinsichtlich der zu betrachtenden Algebren machen. Als ‚Trivialfälle' wollen wir unter anderen solche Algebren ausschließen, in denen jede Teilmenge jeder Potenz Klasse einer Kongruenz ist. Deswegen werden wir fordern, daß die Algebra $\mathfrak{A}$ in einer Varietät enthalten ist, die kongruenzmodular ist, das heißt, deren jede Algebra einen modularen Kongruenzverband besitzt. Dies erscheint zunächst etwas willkürlich, jedoch weiß man, daß eine große Klasse von Verbandsgleichungen, sobald sie für die Kongruenzverbände aller Algebren einer Varietät gelten, schon Kongruenzmodularität erzwingen.

In der Hauptsache werden wir versuchen, die geometrische Struktur kongruenzmodularer Algebren in Satz 3, dem eigentlichen Kern dieser Arbeit, herauszuarbeiten, um damit u.a. den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 1. *Sei $\mathfrak{A}$ eine allgemeine Algebra in einer kongruenzmodularen Varietät. Genau dann sind die Lösungsmengen von Gleichungssystemen über $\mathfrak{A}$ Kongruenzklassen in einer Potenz von $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{A}$ polynomial äquivalent zu einem treuen unitären Modul über einem kommutativen Ring ist.*

0025-5874/78/0162/0051/$02.40

Dieser Satz besagt also, daß es in kongruenzmodularen Varietäten für Algebren, deren Geometrie durch Lösungsmengen von Gleichungen beschrieben wird, nur die klassischen Beispiele gibt.

Der Beweis von Satz 1 beruht neben Satz 3 dann auf einer Reihe von Hilfssätzen und dem Satz 6, den wir in [4] schon für kongruenzvertauschbare Varietäten nachgewiesen haben. Kongruenzvertauschbare Varietäten sind spezielle kongruenzmodulare Varietäten, deshalb lassen sich aus den Sätzen 3 und 6 Verallgemeinerungen vieler Sätze in [4] herleiten.

Die im Folgenden benützten Begriffe kann man, soweit sie nicht erläutert sind, in den Lehrbüchern von Grätzer [3] oder Werner [8] nachschlagen. Allerdings werden wir, der neueren Terminologie folgend, statt ‚algebraische Funktion' ‚Polynom' sagen, so daß der Begriff des Polynoms in Ringen seine klassische Bedeutung hat. Polynome im Sinn von [3] oder [8] werden wir dann *Termfunktionen* nennen.

Sei zunächst $\mathfrak{A}$ eine allgemeine Algebra und sei $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ der Verband aller Kongruenzrelationen auf $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ ist bekanntlich ein vollständiger Unterverband des Äquivalenzrelationenverbandes auf der Grundmenge A von $\mathfrak{A}$. Das kleinste Element von $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ wollen wir mit ω bezeichnen, das größte mit ι. Eine n-stellige Funktion $f: A^n \to A$ *respektiert* oder *erhält* eine Äquivalenzrelation Θ wenn aus $a_1 \Theta b_1, \ldots, a_n \Theta b_n$ immer schon $f(a_1, \ldots, a_n) \Theta f(b_1, \ldots, b_n)$ folgt.

Als nächstes definieren wir:

Definition. Seien Θ_0 und Θ_1 Äquivalenzrelationen auf einer Menge S. Ein $\Theta_0 - \Theta_1$*-Parallelogramm* ist ein Quadrupel (x_0, x_1, x_2, x_3) von Elementen aus S für die gilt: $(x_0, x_1) \in \Theta_0$, $(x_1, x_2) \in \Theta_1$, $(x_2, x_3) \in \Theta_0$ und $(x_3, x_0) \in \Theta_1$. Sprechen wir von einem $\Theta_0 - \Theta_1$-Parallelogramm einer Algebra $\mathfrak{A}$, so setzen wir voraus, daß Θ_0 und Θ_1 Kongruenzen von $\mathfrak{A}$ sind.

Wir verschaffen uns ein erstes geometrisches Hilfsmittel für das Studium der geometrischen Struktur von Algebren mit modularem Kongruenzrelationenverband.

Hilfssatz 2. *Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra mit modularem Kongruenzrelationenverband und (x_0, x_1, x_2, x_3) ein $\Theta_0 - \Theta_1$-Parallelogramm von $\mathfrak{A}$. Gilt für eine Kongruenz Ψ auf $\mathfrak{A}$ mit $\Theta_0 \wedge \Theta_1 \leqq \Psi$ schon $(x_1, x_2) \in \Psi$, so auch $(x_0, x_3) \in \Psi$.*

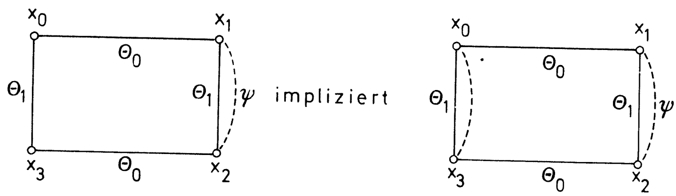

Fig. 1

Zum Beweis definieren wir zunächst $\Theta_{(x_1,x_2)}$ als die kleinste Kongruenz auf $\mathfrak{A}$, die x_1 und x_2 identifiziert und wenden dann auf die Kongruenzen Θ_0, Θ_1 und $\Theta_{(x_1,x_2)}$ das modulare Gesetz an. Sicherlich gilt $\Theta_{(x_1,x_2)} \leqq \Theta_1$ und $\Theta_{(x_1,x_2)} \leqq \Psi$. Aus der Modularität folgt dann:

$$\Theta_1 \wedge (\Theta_0 \vee \Theta_{(x_1,x_2)}) \leqq (\Theta_1 \wedge \Theta_0) \vee \Theta_{(x_1,x_2)} \leqq \Psi \vee \Theta_{(x_1,x_2)} = \Psi.$$

Da aber die Beziehungen $(x_0, x_3) \in \Theta_1$ und $(x_0, x_3) \in \Theta_0 \circ \Theta_{(x_1, x_2)} \circ \Theta_0 \leqq \Theta_0 \vee \Theta_{(x_1, x_2)}$ gelten, folgt mit der obigen Ungleichung auch $(x_0, x_3) \in \Psi$.

Wir werden auf diesen Hilfssatz bei dem Beweis von Satz 6 noch zurückkommen, zunächst müssen wir uns ein stärkeres geometrisches Hilfsmittel verschaffen, das uns einen geeigneten Ersatz für die in [4] benutzte „Parallelogramm-Operation" liefert.

Dazu werden wir im Folgenden voraussetzen, daß die Algebra $\mathfrak{A}$ in einer kongruenzmodularen Varietät enthalten ist. Ein Satz von Day [1] gestattet es uns dann, eine natürliche Zahl n, sowie vierstellige Terme $\mathbf{m}_0, \ldots, \mathbf{m}_n$ so zu finden, daß in $\mathfrak{A}$ die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$\mathbf{m}_0(x, y, z, u) = x \tag{1}$$

$$\mathbf{m}_n(x, y, z, u) = y \tag{2}$$

$$\mathbf{m}_i(x, x, y, y) = x \qquad \text{für alle } i \leqq n \tag{3}$$

$$\mathbf{m}_i(x, y, z, z) = \mathbf{m}_{i+1}(x, y, z, z) \qquad \text{für alle geraden } i \leqq n \tag{4}$$

$$\mathbf{m}_i(x, y, x, y) = \mathbf{m}_{i+1}(x, y, x, y) \qquad \text{für alle ungeraden } i \leqq n. \tag{5}$$

Ein System von vierstelligen Funktionen $m_0, \ldots, m_n$, die die obigen Gleichungen erfüllen, wollen wir abkürzend ein System von *Day-Funktionen* nennen.

Aus den Day-Funktionen werden wir an mehreren Stellen neue Funktionen durch Komposition und Gleichsetzung von Variablen gewinnen. Solche Funktionen sollen *abgeleitete Day-Funktionen* heißen.

Ist auf einer Menge S ein System von Day-Funktionen gegeben und ist T eine Teilmenge von S, dann bezeichnen wir mit $U(T)$ die kleinste Teilmenge von S, die T umfaßt und die gegen alle Day-Funktionen abgeschlossen ist. Ist $q \in U(T)$, so hat man immer eine abgeleitete Day-Funktion $\mathbf{r}(x_1, \ldots, x_k)$ und Elemente $t_1, \ldots, t_k \in T$ mit $\mathbf{r}(t_1, \ldots, t_k) = q$.

Wir bemerken noch, daß alle Day-Funktionen, und damit auch alle abgeleiteten Day-Funktionen, idempotent sind, also dem Gesetz $\mathbf{f}(x, \ldots, x) = x$ genügen.

Die in dem folgenden Satz enthaltene geometrische Interpretation der Day-Funktionen wird im Folgenden unser wichtigstes Hilfsmittel sein:

Satz 3. *Seien auf der Menge S Äquivalenzrelationen Θ_0, Θ_1 und Ψ mit $\Theta_0 \wedge \Theta_1 \leqq \Psi$ und ein System von Day-Funktionen gegeben, das Θ_0, Θ_1 und Ψ erhält. Dann gibt es eine sechsstellige abgeleitete Day-Funktion $\mathbf{p}(x_1, \ldots, x_6)$ mit der folgenden Eigenschaft: Seien (a, b, c, d) und (b, e, f, c) zwei $\Theta_0 - \Theta_1$-Parallelogramme und gelte $(c, e) \in \Psi$. Dann ist $(a, e, c, \mathbf{p}(a, b, c, d, e, f))$ ein $\Theta_0 - \Psi$-Parallelogramm.*

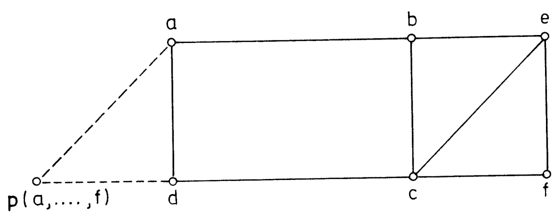

Fig. 2

Figur 2 zeigt den in Satz 3 formulierten Sachverhalt. Wir wollen auch im Folgenden Sachverhalte an ähnlichen Figuren erläutern. Dabei werden wie in [4] Äquivalenzklassen durch (evtl. gestrichelte) Geraden dargestellt. Wir vereinbaren noch, Θ_0-Klassen durch waagerechte Geraden, Θ_1-Klassen durch senkrechte und Ψ-Klassen durch schräge Geraden darzustellen.

Zum Beweis stellen wir zunächst fest, daß es genügt, den Satz für den Spezialfall $\Theta_0 \wedge \Theta_1 = \omega$ zu beweisen. Da die Day-Funktionen, also auch alle abgeleiteten Day-Funktionen, mit Θ_0 und Θ_1, also auch mit $\Theta_0 \wedge \Theta_1$ verträglich sind, können wir nämlich zur Faktormenge $S/\Theta_0 \wedge \Theta_1$ übergeben, wo dann die Voraussetzungen des Satzes wieder erfüllt sind. Das Resultat des Satzes läßt sich danach ohne Schwierigkeiten wieder in S interpretieren.

Ein erster Schritt zum Beweis ist der folgende Hilfssatz:

Hilfssatz 4. *Es existieren abgeleitete Day-Funktionen* $\mathbf{s}_0, \dots, \mathbf{s}_{n-1}$ *und* $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{n-1}$, *so daß für alle* a, b, c, d, e, f *die wie in Satz* 3 *in Relation stehen, folgende Beziehungen erfüllt sind:*

$$\mathbf{s}_0(a, \dots, f) = a, \quad \mathbf{s}_{n-1}(a, \dots, f) = d, \quad a\,\Theta_1\,\mathbf{s}_i(a, \dots, f)\,\Theta_1\,d \quad \text{für alle } i \leqq n-1$$

und

$$\mathbf{s}_i(a, \dots, f)\,\Psi\,\mathbf{t}_{i+1}(a, \dots, f)\,\Theta_0\,\mathbf{s}_{i+1}(a, \dots, f) \qquad \text{für alle } i \leqq n-2.$$

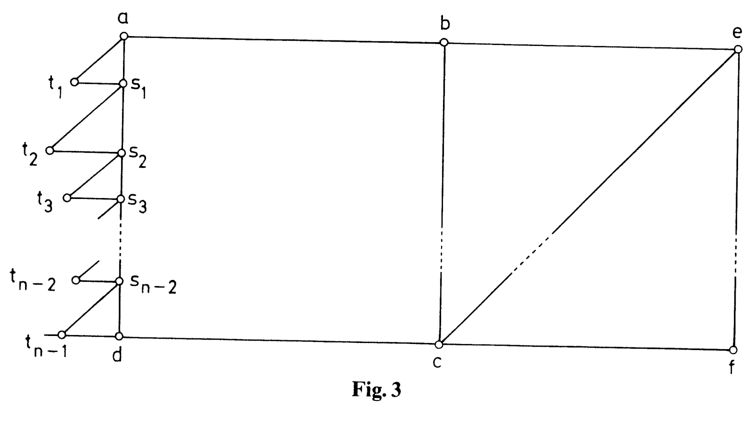

Fig. 3

Zum Beweis des Hilfssatzes konstruiere man zunächst mit Hilfe der Day-Funktionen $\mathbf{m}_i$, $i \leqq n-1$ die folgenden abgeleiteten Funktionen:

$$\mathbf{s}_i(x_1, \dots, x_6) := \begin{cases} \mathbf{m}_i(x_1, x_4, x_3, x_3), & \text{falls } i \text{ gerade} \\ \mathbf{m}_i(x_1, x_4, x_5, x_6), & \text{falls } i \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\mathbf{t}_i(x_1, \dots, x_6) := \begin{cases} \mathbf{m}_i(x_1, x_4, x_3, x_6), & \text{falls } i \text{ gerade} \\ \mathbf{m}_i(x_1, x_4, x_5, x_3), & \text{falls } i \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Für die Punkte $s_i := \mathbf{s}_i(a, \dots, f)$ und $t_i := \mathbf{t}_i(a, \dots, f)$ beweist man dann:

$$a = s_0\,\Theta_1\,s_i\,\Theta_1\,d \qquad \text{für alle } i \leqq n-1, \tag{6}$$

und

$$s_i \Psi t_{i+1} \Theta_0 s_{i+1} \quad \text{für alle } i \leqq n-2, \tag{7}$$

sowie

$$s_{n-1} = d. \tag{8}$$

Zu (6): $s_0 = \mathbf{m}_0(a, d, c, c) = a$ wegen Gleichung (1). Ist i gerade so hat man mit Gleichung (3)

$$a = \mathbf{m}_i(a, a, c, c) \,\Theta_1\, \mathbf{m}_i(a, d, c, c) = s_i,$$

ist i ungerade so gilt

$$a = \mathbf{m}_i(a, a, e, e) \,\Theta_1\, \mathbf{m}_i(a, d, e, f) = s_i,$$

ferner hat man auch $a \,\Theta_1\, d$, womit (6) bewiesen wäre.

Zum Nachweis von (7) definieren wir uns zunächst für alle ungeraden i einen Hilfspunkt $\bar{s}_i$ durch $\bar{s}_i := \mathbf{m}_{i+1}(a, d, e, f)$.

Dann gilt für alle ungeraden i wegen Gleichung (5):

$$s_i = \mathbf{m}_i(a, d, e, f) \,\Theta_0\, \mathbf{m}_i(a, d, a, d,) = \mathbf{m}_{i+1}(a, d, a, d) \,\Theta_0\, \mathbf{m}_{i+1}(a, d, e, f) = \bar{s}_i$$

und wegen Gleichung (3):

$$s_i = \mathbf{m}_i(a, d, e, f) \,\Theta_1\, \mathbf{m}_i(a, a, e, e) = a = \mathbf{m}_{i+1}(a, a, e, e) \,\Theta_1\, \mathbf{m}_{i+1}(a, d, e, f) = \bar{s}_i.$$

Insgesamt ergibt sich also $s_i \Theta_0 \wedge \Theta_1 \bar{s}_i$ für alle ungeraden i, woraus wegen $\Theta_0 \wedge \Theta_1 = \omega$ schon $s_i = \bar{s}_i$ folgt.

Wir fahren nun mit dem Beweis von (7) fort und erhalten zunächst für gerade i wegen (4):

$$s_i = \mathbf{m}_i(a, d, c, c) = \mathbf{m}_{i+1}(a, d, c, c) \,\Psi\, \mathbf{m}_{i+1}(a, d, e, c) = t_{i+1}$$

und

$$t_{i+1} = \mathbf{m}_{i+1}(a, d, e, c) \,\Theta_0\, \mathbf{m}_{i+1}(a, d, e, f) = s_{i+1};$$

für ungerade i folgt aus $s_i = \bar{s}_i$

$$s_i = \bar{s}_i = \mathbf{m}_{i+1}(a, d, e, f) \,\Psi\, \mathbf{m}_{i+1}(a, d, c, f) = t_{i+1},$$

sowie

$$t_{i+1} = \mathbf{m}_{i+1}(a, d, c, f) \,\Theta_0\, \mathbf{m}_{i+1}(a, d, c, c) = s_{i+1}.$$

Zum Beweis von (8) nehme man zunächst an, daß $n-1$ gerade ist, dann hat man $s_{n-1} = \mathbf{m}_{n-1}(a, d, c, c) = \mathbf{m}_n(a, d, c, c) = d$ wegen den Gleichungen (2) und (4). Ist $n-1$ ungerade, so ergibt sich mit Gleichung (2): $s_{n-1} = \bar{s}_{n-1} = \mathbf{m}_n(a, d, e, f) = d$.

Es ist nun klar, daß die Funktionen $\mathbf{s}_i$ und $\mathbf{t}_i$ mit den Relationen (6), (7) und (8) den Beweis von Hilfssatz 4 vervollständigen.

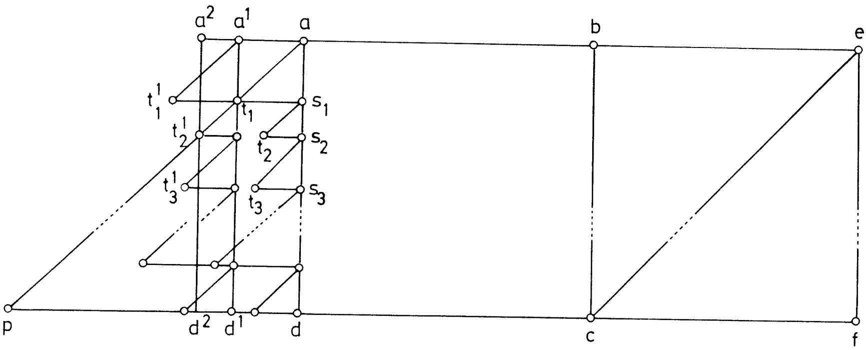

Fig. 4

Die Beweisidee für Satz 3 wird nun deutlich, wenn man sich die obenstehende Figur betrachtet. Die Anwendung des Hilfssatzes 4 auf die Θ_0-Θ_1-Parallelogramme (a, b, c, d) und (b, e, f, c) liefert die Punkte $s_0, \ldots, s_{n-1}$ und $t_1, \ldots, t_{n-1}$. Danach bestimmt man Punkte a^1 und d^1 in der oben angedeuteten Lage und wendet Hilfssatz 4 erneut an, wobei man jedoch a durch a^1 und d durch d^1 ersetzt. Man erhält so Punkte $s_0^1, \ldots, s_{n-1}^1$ und $t_1^1, \ldots, t_{n-1}^1$ wobei zusätzlich noch, wegen der Wahl von a^1 die Gleichung $t_1 = s_1^1$ gilt. Auf diese Weise hat man also die „Strecken" $\overline{a t_1}$ und $\overline{s_1 t_2}$ „addiert" und die Beziehung $t_2^1 \Psi a$ gewonnen. Auf dieselbe Weise fahren wir nun mit den neuen Punkten a^2 und d^2 fort, bis wir in $n-2$-ten Schritt den gesuchten Punkt $t_{n-1}^{n-2} = \mathbf{p}(a, \ldots, f)$ gefunden haben.

Man beachte jedoch, daß die Funktion $\mathbf{p}(x_1, \ldots, x_6)$ nicht von der speziellen Wahl der Punkte $a, \ldots, f$ abhängen soll. Wir müssen deswegen in dem formalen Beweis ‚Punkte' durch ‚Funktionen' ersetzen, die, angewandt auf $a, \ldots, f$ den besagten Punkt liefern. Ist also $\mathbf{k}(x_1, \ldots, x_6)$ eine Funktion, so wollen wir den Punkt $\mathbf{k}(a, b, c, d, e, f)$ einfach mit k bezeichnen.

Als Erstes legen wir fest:

$$\mathbf{a}^0(x_1, \ldots, x_6) := x_1, \quad \mathbf{b}^0(x_1, \ldots, x_6) := x_2, \ldots, \mathbf{f}^0(x_1, \ldots, x_6) := x_6$$

und $t_i^0 := t_i$ sowie $s_i^0 := s_i$, wobei $\mathbf{t}_i$ und $\mathbf{s}_i$ die in Hilfssatz 4 definierten Funktionen sind. Wir setzen auch noch $a^0 := a$, $b^0 := b, \ldots, f^0 := f$.

Dann definieren wir rekursiv für $1 \leqq k \leqq n-1$:

$$\mathbf{a}^k(x_1, \ldots, x_6) := \mathbf{t}_k^{k-1}(x_1, x_2, x_2, x_1, x_5, x_5),$$
$$\mathbf{d}^k(x_1, \ldots, x_6) := \mathbf{t}_k^{k-1}(x_4, x_3, x_3, x_4, x_6, x_6),$$
$$\mathbf{t}_i^k(x_1, \ldots, x_6) := \mathbf{t}_i(\mathbf{a}^k(x_1, \ldots, x_6), x_2, x_3, \mathbf{d}^k(x_1, \ldots, x_6), x_5, x_6)$$
$$\mathbf{s}_i^k(x_1, \ldots, x_6) := \mathbf{s}_i(\mathbf{a}^k(x_1, \ldots, x_6), x_2, x_3, \mathbf{d}^k(x_1, \ldots, x_6), x_5, x_6).$$

Wir beweisen nun durch Induktion für alle k die Kongruenzen:

$$a^k \,\Theta_1\, d^k \tag{9}$$

$$a^k \,\Theta_0\, a \quad \text{und} \quad d^k \,\Theta_0\, d \tag{10}$$

$$t_i^k\,\Theta_0\,t_i^0 \quad \text{für alle } 1 \leqq i \leqq n-1 \tag{11}$$

$$s_i^k\,\Theta_0\,s_i^0 \quad \text{für alle } i \leqq n-1 \tag{12}$$

$$t_{k+1}^k\,\Psi\,a. \tag{13}$$

Der Induktionsanfang für $k=0$ ergibt sich sofort aus Hilfssatz 4. Im Schritt von k auf $k+1$ ergibt sich für (9):

$$a^{k+1} = \mathbf{t}_{k+1}^k(a, b, b, a, e, e)\,\Theta_1\,\mathbf{t}_{k+1}^k(d, c, c, d, f, f) = d^{k+1}$$

für (10):

$$a^{k+1} = \mathbf{t}_{k+1}^k(a, b, b, a, e, e)\,\Theta_0\,\mathbf{t}_{k+1}^k(a, a, a, a, a, a) = a$$

und

$$d^{k+1} = \mathbf{t}_{k+1}^k(d, c, c, d, f, f)\,\Theta_0\,\mathbf{t}_{k+1}^k(d, d, d, d, d, d) = d,$$

weil alle abgeleiteten Day-Funktionen idempotent sind.

In dem Beweis von (11) und (12) benutzen wir bereits (10):

$$t_i^{k+1} = \mathbf{t}_i(a^{k+1}, b, c, d^{k+1}, e, f)\,\Theta_0\,\mathbf{t}_i(a, b, c, d, e, f) = t_i^0$$

und

$$s_i^{k+1} = \mathbf{s}_i(a^{k+1}, b, c, d^{k+1}, e, f)\,\Theta_0\,\mathbf{s}_i(a, b, c, d, e, f) = s_i^0.$$

Um die wichtige Relation (13) zu zeigen, überzeugen wir uns zunächst davon, daß $t_{k+1}^k = s_{k+1}^{k+1}$ gilt.

Aus (11), (12) und (7) in Hilfssatz 4 folgt zuerst:

$$t_{k+1}^k\,\Theta_0\,t_{k+1}^0\,\Theta_0\,s_{k+1}^0\,\Theta_0\,s_{k+1}^{k+1}.$$

Aus (10) und der Definition von a^{k+1} und d^{k+1} folgt, daß (a^{k+1}, b, c, d^{k+1}) ein Θ_0-Θ_1-Paralellogramm ist. Wir ersehen, daß sich die Punkte s_i^{k+1} und t_i^{k+1} durch Anwendung von Hilfssatz 4 auf dieses Parallelogramm und auf das Parallelogramm (b, e, f, c) ergeben. Somit ergibt sich aus Hilfssatz 4 $s_{k+1}^{k+1}\,\Theta_1\,a^{k+1}$, andererseits gilt:

$$a^{k+1} = \mathbf{t}_{k+1}^k(a, b, b, a, e, e)\,\Theta_1\,\mathbf{t}_{k+1}^k(a, b, c, d, e, f) = t_{k+1}^k.$$

Insgesamt hat man dann $t_{k+1}^k\,\Theta_0\,s_{k+1}^{k+1}$ und $t_{k+1}^k\,\Theta_1\,s_{k+1}^{k+1}$. Wegen $\Theta_0 \wedge \Theta_1 = \omega$ hat man also $t_{k+1}^k = s_{k+1}^{k+1}$.

Mit Hilfssatz 4 und der Induktionsannahme ergibt sich endlich:

$$\begin{aligned} t_{k+2}^{k+1} &= \mathbf{t}_{k+2}(a^{k+1}, b, c, d^{k+1}, e, f)\,\Psi\,\mathbf{s}_{k+1}(a^{k+1}, b, c, d^{k+1}, e, f) \\ &= s_{k+1}^{k+1} = t_{k+1}^k\,\Psi\,a. \end{aligned}$$

Damit ist der Schritt auf $k+1$ durchgeführt.

Definieren wir jetzt noch: $\mathbf{p}(x_1, \ldots, x_6) := \mathbf{t}_{n-1}^{n-2}(x_1, \ldots, x_6)$, so folgt mit (11) und (13) in $(n-2)$-ten Schritt:

$$\mathbf{p}(a, \ldots, f) = t_{n-1}^{n-2}\,\Theta_0\,t_{n-1}^0\,\Theta_0\,d \quad \text{und} \quad \mathbf{p}(a, \ldots, f) = t_{n-1}^{n-2}\,\Psi\,a.$$

Also ist $(a, e, c, \mathbf{p}(a, b, c, d, e, f))$ ein Θ_0-Ψ-Parallelogramm, wie in Satz 3 behauptet wird.

Aus Satz 3 ergibt sich nun eine Reihe von Anwendungen. Zunächst zeigen wir:

Korollar 5. *Sei $\mathfrak{A}$ eine allgemeine Algebra in einer kongruenzmodularem Varietät V. Seien Θ_0, Θ_1 und Ψ Kongruenzen auf $\mathfrak{A}$ mit $\Theta_0 \wedge \Theta_1 \leqq \Psi \leqq \Theta_0 \vee \Theta_1$. Vertauschen Θ_0 und Θ_1, so vertauschen auch Ψ und Θ_0 sowie Ψ und Θ_1. Insbesondere gilt für jedes direkte Produkt $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ von Algebren $\mathfrak{A}_i$ aus V, daß jede Kongruenz mit den kanonischen Projektionskongruenzen vertauscht.*

Beweis. Aus Symmetriegründen genügt es, die Inklusion $\Theta_0 \circ \Psi \leqq \Psi \circ \Theta_0$ zu zeigen. Sei $(x, z) \in \Theta_0 \circ \Psi$. Dann existiert ein y mit $x \Theta_0 y \Psi z$. Weil Ψ in $\Theta_0 \vee \Theta_1$ und somit auch in $\Theta_0 \circ \Theta_1$ enthalten ist, gibt es Punkte a und b mit $y \Theta_0 a \Theta_1 z$ und $z \Theta_0 b \Theta_1 y$. Weiterhin folgt mit $\Psi \circ \Theta_0 \leqq \Theta_0 \circ \Theta_1$ die Existenz eines Punktes c mit $z \Theta_0 c \Theta_1 x$. Somit haben wir Θ_0-Θ_1-Parallelogramme (x, a, z, c) und (a, y, b, z).

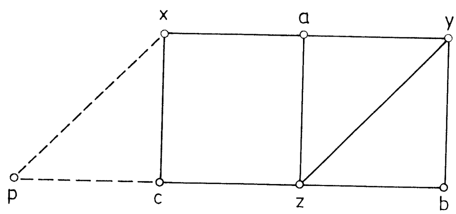

Fig. 5

Da $\mathfrak{A}$ in einer kongurenzmodularen Varietät enthalten ist, gibt es für eine natürliche Zahl n ein System von Day-Polynomen, die natürlich auch die Kongruenzen Θ_0, Θ_1 und Ψ erhalten. Mit Satz 3 ergibt sich also ein Punkt p mit $x \Psi p \Theta_0 z$. Damit gilt aber $(x, z) \in \Psi \circ \Theta_0$, woraus die Behauptung folgt.

Eine andere Folgerung beschreibt affine Algebren in kongruenzmodularen Varietäten. Diesen Satz haben wir in [4] zunächst für vertauschbare Varietäten gezeigt. Für kongruenzmodulare Varietäten wurde er danach von Herrmann [6] mit anderen Methoden bewiesen. Wir führen ihn hier auf den vertauschbaren Fall zurück. Reizvoll ist es auch, den Satz direkt unter Zuhilfenahme von Satz 3 zu zeigen, weil deutlich wird, daß die sechsstellige Funktion aus Satz 3 genau die Eigenschaften hat, die in dem Beweis von Satz 4.7 in [4] von der Vertauschbarkeitsfunktion benötigt wurden. Wir wollen dies nachher noch genauer andeuten.

Zunächst führen wir den Begriff der affinen Algebra ein.

Definition. Eine allgemeine Algebra $\mathfrak{A}$ heißt *affin*, wenn auf der Grundmenge A von $\mathfrak{A}$ eine abelsche Gruppe $\mathscr{G} = (A, +, 0)$ erklärt ist, so daß für jede n-stellige Grundoperation $\mathbf{f}(x_1, \ldots, x_n)$ von $\mathfrak{A}$ und für beliebige Elemente $a_1, \ldots. a_n$ und $b_1, \ldots, b_n \in A$ die Gleichung

$$\mathbf{f}(a_1, \ldots, a_n) + \mathbf{f}(b_1, \ldots, b_n) = \mathbf{f}(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) + \mathbf{f}(0, \ldots, 0)$$

erfüllt ist.

Man erhält so, vgl. [4] und [6]:

Satz 6. *Sei $\mathfrak{A}$ eine allgemeine Algebra in einer modularen Varietät. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathfrak{A}$ *ist affin*

(ii) *Es existiert eine Kongruenz Θ auf $\mathfrak{A}^2$, die gemeinsames Komplement der Faktorkongruenzen Θ_{π_1} und Θ_{π_2} ist*

(iii) $\Delta := \{(x, x) \mid x \in A\}$ *ist Klasse einer Kongruenz auf* $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$.

Beweis. Für den Schritt (i)→(iii) rechnet man leicht nach, daß durch die Definition $(x, y)\,\Theta(x', y') :\Leftrightarrow x - y = x' - y'$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ definiert wird, die Δ als Klasse hat.

Nehmen wir (iii) an, so gibt es eine Kongruenz Φ_Δ, die Δ als Klasse hat. Wir zeigen nun, daß Φ_Δ Komplement der Projektionskongruenzen Θ_{π_1} und Θ_{π_2} ist. Seien $a, b, c, d \in A$ beliebig gewählt, dann gilt:

$$(a, b)\,\Theta_{\pi_1}(a, a)\,\Phi_\Delta(c, c)\,\Theta_{\pi_1}(c, d)$$

und entsprechend

$$(a, b)\,\Theta_{\pi_2}(b, b)\,\Phi_\Delta(d, d)\,\Theta_{\pi_2}(c, d),$$

woraus $\Theta_{\pi_1} \vee \Phi_\Delta = \Theta_{\pi_2} \vee \Phi_\Delta = \iota$ folgt.

Nimmt man an, $\Theta_{\pi_1} \wedge \Phi_\Delta$ sei ungleich ω, so gäbe es also Punkte (a, b), (a, c) mit $(a, b)\,\Phi_\Delta(a, c)$ und $b \neq c$.

Wir betrachten dann die Elemente (b, b) und (b, c), die zusammen mit (a, b) und (a, c) ein $\Theta_{\pi_2} - \Theta_{\pi_1}$-Parallelogramm bilden.

Mit $\Theta_0 := \Theta_{\pi_2}$ und $\Theta_1 := \Theta_{\pi_1}$ und $\Psi := \Phi_\Delta$ kann man also Hilfssatz 2 anwenden und erhält $(b, b)\,\Phi_\Delta(b, c)$. Da $(b, b) \in \Delta$ ist, folgt auch $(b, c) \in \Delta$, *also* $b = c$. Dies ist ein Widerspruch zu der obigen Annahme, also hat man $\Theta_{\pi_1} \wedge \Phi_\Delta = \omega$ und auch entsprechend $\Theta_{\pi_2} \wedge \Phi_\Delta = \omega$. Damit ist (ii) gezeigt.

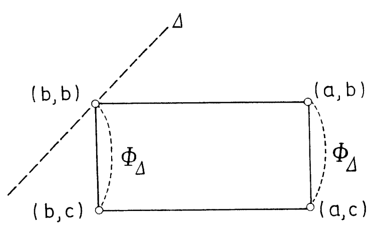

Fig. 6

Sei nun (ii) erfüllt. Wir zeigen einfach, daß $\mathfrak{A}$ eine vertauschbare Varietät erzeugt, womit Satz 6 in den Satz 4.7 von [4] übergeht. Sei $\mathbf{p}(x_1, \ldots, x_6)$ die aus Satz 3 gewonnene Termfunktion. Wir definieren eine neue dreistellige Termfunktion $\mathbf{q}$ durch

$$\mathbf{q}(x, y, z) := \mathbf{p}(x, z, z, x, y, y).$$

Nach einem bekannten Satz von Mal'cev [7] genügt es zu zeigen, daß die Gleichungen $\mathbf{q}(x, y, y) = x$ und $\mathbf{q}(x, x, y) = y$ in $\mathfrak{A}$ gelten.

Seien also a und b beliebige Elemente aus $\mathfrak{A}$. Wir betrachten die Punkte (a, a), (b, a), (b, b) und (a, b) in $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$.

Dann bilden $((a, a), (b, a), (b, b), (a, b))$ und $((b, a), (b, a), (b, b), (b, b))$ zwei $\Theta_{\pi_2} - \Theta_{\pi_1}$-Parallelogramme in $\mathfrak{A}^2$. Mit $\Psi := \Theta_{\pi_1}$ und Satz 3 erhalten wir

$$(a, a)\, \Theta_{\pi_1}\, \mathbf{p}((a, a), (b, a), (b, b),(a, b), b, a), (b, b))\, \Theta_{\pi_2} (b, b).$$

Damit ergibt sich die Gleichung $\mathbf{q}(a, b, b) = \mathbf{p}(a, b, b, a, b, b) = a$. Aus Korollar 5 folgt schließlich, daß Θ mit Θ_{π_1} vertauscht.

Deswegen gibt es ein Element $r \in \mathfrak{A}$ mit $(b, b)\, \Theta_{\pi_1} (b, r)\, \Theta\, (a, b)$. Nun wenden wir Satz 3 auf die $\Theta_{\pi_2} - \Theta_{\pi_1}$-Parallelogramme

$$((a, b), (b, b), (b, r), (a, r)) \quad \text{und} \quad ((b, b), (a, b), (a, r), (b, r))$$

mit $\Psi := \Theta$ an und erhalten:

$$(b, r)\, \Theta_{\pi_2}\, \mathbf{p}((a, b), (b, b), (b, r), (a, r), (a, b), (a, r))\, \Theta\, (a, b).$$

Da andererseits auch $(b, r)\, \Theta_{\pi_2} (b, r)\, \Theta\, (a, b)$ gilt, folgt wegen $\Theta_{\pi_2} \wedge \Theta = \omega$, daß

$$\mathbf{p}((a, b), (b, b), (b, r), (a, r), (a, b), (a, r)) = (b, r)$$

und somit $\mathbf{q}(a, a, b) = \mathbf{p}(a, b, b, a, a, a) = b$ gilt.

Satz 1 ist nun eine leichte Folgerung aus dem bereits Bewiesenen und aus [4]. Ist nämlich $\mathfrak{A}$ eine allgemeine Algebra, die polynomial äquivalent zu einem Modul $\mathcal{M}$ über einem kommutativen Ring $\mathcal{R}$ ist, so stimmen die Kongruenzen von $\mathfrak{A}^n$ und $\mathcal{M}^n$ für jede natürliche Zahl n überein. Weiter entspricht jede Gleichung über $\mathfrak{A}$ eindeutig einer Gleichung über $\mathcal{M}$. Es ist jedoch klar, daß die Lösungsmenge jeder Gleichung mit k Variablen über $\mathcal{M}$ eine Kongruenzklasse von $\mathcal{M}^k$ ist, diese Eigenschaft kommt mithin auch $\mathfrak{A}$ zu.

Für die umgekehrte Richtung betrachte man in $\mathfrak{A}$ die Gleichung $y = x$. Deren Lösungsmenge ist Δ aus Satz 6. Wenn Δ eine Kongruenzklasse ist, so ist folglich $\mathfrak{A}$ eine affine Algebra in einer vertauschbaren Varietät. Mit Satz 5.3 aus [4] hat man, daß $\mathfrak{A}$ polynomial äquivalent zu einem treuen unitären Modul über einem Ring $\mathcal{R}$ ist. Die Annahme, $\mathcal{R}$ sei nicht kommutativ, es gäbe also a und b mit $ab \neq ba$ führt sofort auf einen Widerspruch, wenn man sich die Gleichung $ax - y = 0$ in betrachtet. Da $(0, 0)$ und (m, am) für jedes $m \in \mathcal{M}$ Lösungen sind, folgt, daß auch (bm, bam) Lösung ist. Da $\mathcal{R}$ treu auf $\mathcal{M}$ operiert, folgert man $ab = ba$. Damit ist auch Satz 1 vollständig bewiesen.

Wir wollen nun noch kurz andeuten, wie man mit Hilfe von Satz 3 einen gemeinsamen Beweis von Satz 6 und Satz 4.7 von [4] gewinnen kann. Dazu konzentrieren wir uns ausschließlich auf den Schritt (ii) $\to$ (i).

Zunächst hat man mit (ii) drei Kongruenzen Θ_{π_1}, Θ_{π_2} und Θ, die paarweise in ω schneiden und nach ι verbinden. Da Θ_{π_1} und Θ_{π_2} vertauschen, folgt mit Korollar 5, daß auch Θ mit Θ_{π_1} und Θ_{π_2} vertauscht. Faßt man die Kongruenzklassen dieser drei Kongruenzen als Geraden und die Elemente von $\mathfrak{A}$ als Punkte auf, so hat man ein geometrisches 3-Netz, dem man in naheliegender Weise (siehe Dénes-Keedwell [2] oder [4]) einen Loop $\mathcal{L}$ auf dieser Grundmenge von $\mathfrak{A}$ zuordnen kann. $\mathcal{L}$ ist genau dann eine Gruppe, wenn die *Reidemeister-Bedingung* für das zugehörige 3-Netz erfüllt ist. Diese lautet:

(R) *Sind a_1, a_2, a_3, a_4 parallele Geraden und b_1, b_2, b_3, b_4 parallele Geraden, sodaß sich a_i und b_j in dem Punkt q_{ij} schneiden. Gibt es parallele Geraden c_1, c_2, c_3 mit $q_{12}, q_{21} \in c_1$, $q_{34}, q_{43} \in c_2$ und $q_{32}, q_{41} \in c_3$, so gibt es eine zu c_1, c_2, c_3 parallele Gerade c_4 mit $q_{14}, q_{23} \in c_4$.*

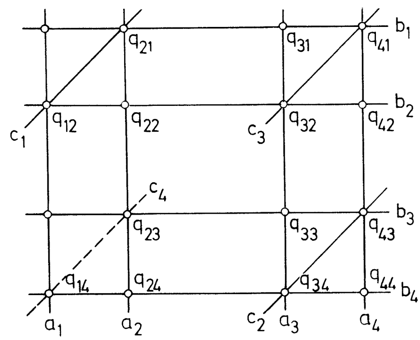

Fig. 7

Ist $\mathbf{p}$ die Termfunktion, die man aus Satz 3 gewinnt, so liest man aus der obigen Figur ab:

$$\mathbf{p}(q_{21}, q_{31}, q_{32}, q_{22}, q_{41}, q_{42}) = q_{12},$$

somit liegt $\mathbf{p}(q_{23}, q_{33}, q_{34}, q_{24}, q_{43}, q_{44})$ einerseits auf a_1, andererseits auf b_4, ist also gleich q_{14}. Mit Satz 3 gilt deswegen, daß q_{14} und q_{23} auf einer Geraden liegen, die parallel zu c_2 ist.

Die Kommutativität von $\mathscr{L}$ wird jetzt mit Hilfe der *Desargues Bedingung* gezeigt. Diese besagt:

(D) *Sind a_1, a_2, a_3 parallele Geraden und b_1, b_2, b_3 parallele Geraden, so daß sich a_i und b_j in dem Punkt q_{ij} schneiden. Gibt es parallele Geraden c_1 und c_2 mit $q_{12}\, q_{21} \in c_1$ und $q_{13}, q_{31} \in c_2$, so gibt es auch eine zu c_1 und c_2 parallele Gerade c_3 mit $q_{23}, q_{32} \in c_3$.*

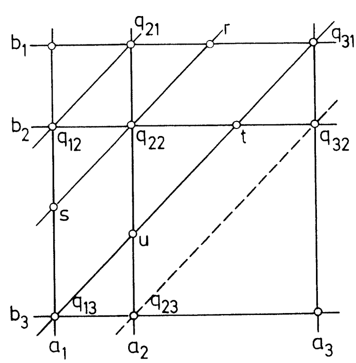

Fig. 8

Zunächst folgt aus den Eigenschaften eines Netzes, daß eine zu c_1 und zu c_2 parallele Gerade c_4 existiert, die durch q_{22} geht und b_1 bzw. a_1 in den Punkten r bzw. s schneidet. Außerdem schneidet c_2 die Geraden b_2 bzw. a_2 in den Punkten t bzw. u.

Ist $\mathbf{p}$ wieder die Funktion aus Satz 3, so erhält man:

$$\mathbf{p}(q_{31}, r, q_{22}, t, q_{21}, q_{12}) = q_{32} \quad \text{und} \quad \mathbf{p}(q_{13}, s, q_{22}, u, q_{12}, q_{21}) = q_{23}.$$

Da entsprechende Eingabewerte paarweise immer auf zu c_1 parallelen Geraden liegen, gilt dies auch für die Bildwerte. Mithin liegen q_{23} und q_{32} auf einer zu c_1 parallelen Gerade c_3. Damit ist der auf der Grundmenge von $\mathfrak{A}$ definierte Loop $\mathscr{L}$ eine abelsche Gruppe. Ähnlich wie in [4] ist es danach leicht zu zeigen, daß jede Operation der Algebra ein Homomorphismus bezüglich der Operation $x - y + z$ ist, was gerade die Affinität von $\mathfrak{A}$ bewirkt.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß der Satz 6 falsch ist, falls man die Forderung, daß $\mathfrak{A}$ in einer modularen Varietät enthalten ist, abschwächt zu der Bedingung, daß $\mathfrak{A}$ modularen Kongruenzverband habe. Als Gegenbeispiel konstruiere man sich mit einer einfachen nichtabelschen Gruppe $\mathscr{G}$ eine Algebra $\mathfrak{A}_{\mathscr{G}}$ auf die folgende Weise: Als Grundmenge wähle man das direkte Produkt von $\mathscr{G}$ mit sich selbst. Zu jedem Endomorphismus ψ von $\mathscr{G}$ und je zwei Elementen a und b aus $\mathscr{G}$ definiere man als einstellige Grundoperation von $\mathfrak{A}_{\mathscr{G}}$ die Abbildung $\psi_{a,b}$: $G \times G \to G \times G$ durch $\psi_{a,b}(x, y) := (a\psi(x), \psi(y)\, b)$.

Für diese Algebra gilt nach [5] dann die Bedingung (ii) von Satz 6, jedoch ist $\mathfrak{A}_{\mathscr{G}}$ nicht affin da man auf $\mathfrak{A}_{\mathscr{G}}$ keine Mal'cev-Operation definieren kann, die die Kongruenzen von $\mathfrak{A}_{\mathscr{G}}$ erhält.

Literatur

1. Day, A.: A characterization of modularity for congruenze lattices of algebras. Canad. Math. Bull. **12**, 167–173 (1969)
2. Dénes, J., Keedwell, A.D.: Latin squares and their applications. New York-London: Academic Press 1974
3. Grätzer, G.: Universal algebra. Princeton, N.J.: Van Nostrand 1968
4. Gumm, H.P.: Algebras in permutable varieties: Geometrical properties of affine algebras. Algebra Universalis 8 (erscheint 1978)
5. Gumm, H.P.: Is there a Mal'cev theory for single algebras. Algebra Universalis 8 (erscheint 1978)
6. Herrmann, Ch.: Affine algebras in modular varieties. Preprint (1977)
7. Mal'cev, A.I.: Über die allgemeine Theorie algebraischer Systeme (russisch). Mat. Sb. **35**, 3–20 (1954)
8. Werner, H.: Einführung in die Allgemeine Algebra. Mannheim: Bibliographisches Institut (erscheint demnächst)
9. Wille, R.: Kongruenzklassengeometrien. Lecture Notes in Mathematics 113. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970

Eingegangen am 4. Januar 1978