Zur Korrespondenz von Hecke zwischen Modulformen mit Funktionalgleichungen und Dirichletreihen

B a c h e l o r a r b e i t

am Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

vorgelegt von

Lukas Haag
am 22. September 2013

Betreuer: Prof. Dr. Pablo Ramacher

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Modulformen und L-Reihen, die Verallgemeinerung der Dirichletreihen, haben sich in vielen Gebieten der Mathematik als fundamentale Objekte und Werkzeuge erwiesen. In der vorliegenden Arbeit versuchen wir, die zwischen ihnen auftretende Korrespondenz, deren Existenz Erich Hecke 1936 in seinem Werk „Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung“ ([Hec36]) bewiesen hat, nachzuvollziehen.

Diese Korrespondenz bedeutet nicht weniger, als die Verschmelzung zweier großer Bereiche der Mathematik: Die höhere Funktionentheorie, in der die Modulformen behandelt werden, mit der Zahlentheorie, in der gewöhnlicherweise die Dirichletreihen beheimatet sind. Nicht zuletzt über diese Brücke konnte Andrew Wiles 1995 durch Beweis der Taniyama-Shimura-Vermutung auch den großen Satz von Fermat verifizieren ([Wil95]).

Als Anwendung dieses wichtigen Sachverhaltes ziehen wir eine weitere Arbeit Heckes heran ([Hec37]), in der er wichtige lineare Funktionaloperatoren einführt, die sogenannten *Hecke-Operatoren*. Diese Operatoren tauchten jedoch bereits 1917 in einer Arbeit von Louis J. Mordell auf ([Mor17]). Mordell bewies darin die Vermutung von Srinivasa Ramanujan, dass die Fourier-Koeffizienten der Diskriminante, einer wichtigen Modulform, multiplikativ sind. Hecke nahm dies zum Anlass, diese Operatoren näher zu betrachten und die obige Theorie zu entwickeln. Später wurde deutlich, dass sich diese Operatoren im gesamten Bereich der Modulformen als sehr hilfreich erwiesen haben. Wir versuchen hier analog zu Hecke, diese Wichtigkeit dadurch herauszustellen, dass wir uns Eigenformen dieser Operatoren suchen und zeigen, dass die zugehörigen Dirichletreihen genau dieser Eigenformen eine Darstellung als sogenanntes Euler-Produkt, ein Produkt über alle Primzahlen, aufweisen.

Zu Beginn der Arbeit geben wir in Kapitel 1 eine kurze Einführung in Modulformen und Hecke-Operatoren. Wir werden wichtige Eigenschaften dieser Operatoren, wie sie von Hecke bemerkt wurden, beweisen und uns mit ihnen vertraut machen.

Kapitel 2 zeigt uns die nötigen Grundlagen der Theorie der Dirichletreihen auf, jedoch beschränken wir uns hier auf das für die vorliegende Arbeit wichtige Material und machen uns diese Theorie an einigen Beispielen deutlich.

In Kapitel 3 begegnen wir dem Hauptteil dieser Arbeit. Wir werden hier die soeben genannte Korrespondenz zwischen Dirichletreihen und Modulformen in einer allgemeinen

Fassung erarbeiten und den Beweis Heckes an einigen Stellen näher erläutern, bevor wir in Kapitel 4 die drei vorigen Kapitel zusammenbringen und die Bedeutsamkeit der Hecke-Operatoren erkennen werden. Abschließend geben wir zwei wichtige Beispiele für Eigenformen von Hecke-Operatoren, die in einer Arbeit zu diesem Thema nicht fehlen dürfen – unter ihnen die oben erwähnte Diskriminante. Im Anhang sind mit römischen Ziffern bezeichnete Hilfssätze und –lemmata zu finden, die im Laufe der Arbeit für einige Beweise benötigt werden, unseres Erachtens aber an diesen Stellen den Lesefluss stören würden.

Bei dem Leser setzen wir grundlegende Kenntnisse der Funktionentheorie, wie sie im Rahmen einer Einführungsvorlesung vermittelt werden, voraus. Kenntnisse von Modulformen und ihrer Bedeutsamkeit sind hilfreich, um die Einordnung des hier behandelten Themenkomplexes in die gesamten Mathematik zu verstehen, für das Verständnis allein dieser Arbeit jedoch nicht von Nöten.

Notation. Mit $\mathbb{N}$ bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen, die die 0 nicht beinhaltet, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ ist die obere Halbebene. Die Symbole $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ stehen in gewohnter Weise für die entsprechenden Zahlbereiche. Den größten gemeinsam Teiler zweier natürlicher Zahlen bezeichnen wir mit (m, n), wobei $(n, 0) = n$ gesetzt wird.

Bei der Betrachtung von Funktionen sowie Reihen unterscheiden wir in der Notation zwischen f bzw. D (oder analoge Bezeichnungen) für die formale Funktion bzw. Reihe und $f(z)$ bzw. $D(s)$ (oder analoge Bezeichnungen) für den entsprechenden Wert der Funktion an der Stelle z bzw. der Reihe an der Stelle s.

Kapitel 1

Hecke-Operatoren

In diesem Kapitel möchten wir die nötigen Grundlagen über modulare Funktionen, sowie Hecke-Operatoren aufzeigen. Für umfassendere Erläuterungen, insbesondere über Modulformen auf der oberen Halbebene, verweisen wir hierbei auf z. B. [KK07].

Sei Γ eine diskrete Untergruppe von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, eine sog. *Fuchssche Gruppe*.

Definition 1.1. Eine Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt *ganze Modulform vom Gewicht* k, $k \in \mathbb{Z}$, wenn gilt

(i) f ist holomorph.

(ii) Es gilt die Funktionalgleichung

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k \cdot f(\tau) \quad \text{für alle } \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma,\ \tau \in \mathbb{H}.$$

(iii) f besitzt eine Fourier-Entwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{m \geq 0} \alpha_f(m) e^{2\pi i m\tau},$$

die für $\gamma > 0$ auf der Menge $\{\tau \in \mathbb{H} : \operatorname{Im} \tau \geq \gamma\}$ absolut gleichmäßig konvergiert.

f heißt *Spitzenform vom Gewicht* k, wenn $\alpha_f(0) = 0$. Im folgenden sei k immer eine gerade natürliche Zahl[1], $\mathbb{M}_k$ bezeichne den Raum der ganzen Modulformen vom Gewicht k und $\mathbb{S}_k$ den Raum der Spitzenformen vom Gewicht k.

Bemerkung 1.2 (vgl. [KK07])**.** Die Bedingung (ii) ist äquivalent zu den Bedingungen

$$f(\tau+1) = f(\tau) \quad \text{und} \quad f(-1/\tau) = \tau^k \cdot f(\tau).$$

[1] Jede modulare Funktion von ungeradem Gewicht ist 0, denn $-E_2 \in \Gamma$. Setzt man nun in die Funktionalgleichung ein, so erhält man für ungerades k die Identität $f(\tau) = -f(\tau)$.

Erich Hecke definiert 1937 in seinem Aufsatz „Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung“ ([Hec37]) lineare Operatoren T_n auf dem Raum $\mathbb{M}_k$, die *Hecke-Operatoren*. Diese linearen Operatoren wurden zwar vorher schon von Adolf Hurwitz oder Louis Mordell in speziellen Fällen benutzt. Die grundlegende Theorie, die sie so wichtig macht, wurde allerdings erst von Hecke entwickelt. Die Bedeutsamkeit dieser Operatoren werden wir in Kapitel 4 erarbeiten.

Definition 1.3. Für $n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathbb{M}_k$ definiere den n-ten *Hecke-Operator*

$$(T_n f)(\tau) := n^{k-1} \sum_{\substack{a \cdot d = n \\ b \pmod d,\ d>0}} f\left(\frac{a\tau + b}{d}\right) d^{-k} \qquad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}. \tag{1.1}$$

Dabei bedeutet $b \pmod d$, dass b ein volles Restsystem modulo d durchlaufen soll. Die Gleichung hängt dabei jedoch nicht von der Wahl des Restsystems ab, denn durchläufe b' ein weiteres volles Restsystem modulo d, so gäbe es eine ganze Zahl n mit $b' = b + nd$. Aufgrund der Periodizität von f wie in Bemerkung 1.2 erläutert, folgt dann die Unabhängigkeit des Restsystems. Wir können die Definition daher auch zu

$$(T_n f)(\tau) = n^{k-1} \sum_{d|n} d^{-k} \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{n\tau + bd}{d^2}\right) \tag{1.2}$$

umformulieren.

Zunächst möchten wir einige grundlegende Eigenschaften der Hecke-Operatoren beweisen.

Satz 1.4 (**Eigenschaften der Hecke-Operatoren**, vgl. [Apo90])**.**

(i) $T_n \in \operatorname{End}(\mathbb{M}_k)$, *d. h. die Hecke-Operatoren bilden den Raum* $\mathbb{M}_k$ *in sich ab.*

(ii) Die Fourier-Koeffizienten von $T_n f$ *sind*

$$\alpha_{T_n f}(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \cdot \alpha_f\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

(iii) $\alpha_{T_n f}(0) = 0$ *für* $f \in \mathbb{S}_k$, *d. h. die Hecke-Operatoren bilden insbesondere Spitzenformen in sich ab.*

Beweis.

(i) $T_n f$ ist holomorph, da f holomorph ist. Um die Modularität zeigen zu können, benötigt man eine Interpretation der Hecke-Operatoren als Summe von Operatoren über den Quotientenraum $\Gamma \backslash \Gamma_n$, wobei Γ_n die Transformationen n-ter Ordnung, d. h. alle $A \in \Gamma$ mit $\det A = n$ bezeichnet. In diesem Kontext verzichten wir darauf und verweisen z. B. auf [Apo90], [KK07] oder [Dei10].

(ii) Setzen wir Definition 1.1(iii) in die Gleichung (1.2) ein, so folgt

$$\begin{aligned}(T_n f)(\tau) &= n^{k-1} \sum_{d \mid n} d^{-k} \sum_{b=0}^{d-1} \sum_{m \geq 0} \alpha_f(m) e^{2\pi i m(n\tau + bd)/d^2} \\ &= \sum_{m \geq 0} \sum_{d \mid n} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \alpha_f(m) e^{2\pi i m n\tau/d^2} \cdot \frac{1}{d} \sum_{b=0}^{d-1} e^{2\pi i m b/d}\end{aligned}$$

Die Vertauschung der Summationen ist hier aufgrund der absolut gleichmäßigen Konvergenz der Fourierreihe erlaubt (vgl. Definition 1.1(iii)). Betrachten wir zunächst die rechte Summe. Mittels der Formel für die geometrische Summe und der Gleichheit $e^{2\pi i \mathbb{Z}} = 1$ ergibt sich für $d \nmid m$

$$\sum_{b=0}^{d-1} \left(e^{2\pi i m/d}\right)^b = \frac{1 - e^{2\pi i m}}{1 - e^{2\pi i m/d}} = \frac{0}{1 - e^{2\pi i m/d}} = 0,$$

während für $d \mid m$, d. h. $dz = m$ für ein $z \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{b=0}^{d-1} e^{2\pi i m b/d} = \sum_{b=0}^{d-1} e^{2\pi i m z} = \sum_{b=0}^{d-1} 1 = d$$

folgt, und damit

$$(T_n f)(\tau) = \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{d \mid n, \\ d \mid m}} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \alpha_f(m) e^{2\pi i m n\tau/d^2}.$$

Ersetzen wir nun die Variable m durch ad, so läuft die linke Summe über a, sofern wir die rechte Summe lediglich über $d \mid n$ laufen lassen, so dass

$$(T_n f)(\tau) = \sum_{a \geq 0} \sum_{d \mid n} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \alpha_f(ad) e^{2\pi i a n\tau/d}.$$

Ersetzen wir weiter d durch n/d, was ganzzahlig ist, da $d \mid n$, erhalten wir für obigen Ausdruck

$$\sum_{a \geq 0} \sum_{d \mid n} d^{k-1} \alpha_f\left(\frac{an}{d}\right) e^{2\pi i a d\tau}.$$

Wir machen nun die Ersetzung $ad = m$ wieder rückgängig, d. h. $a = m/d$ und setzen dementsprechend in der zweiten Summe die Bedingung $d \mid m$, so führt uns dies zu

$$(T_n f)(\tau) = \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{d \mid n, \\ d \mid m}} d^{k-1} \alpha_f\left(\frac{mn}{d^2}\right) e^{2\pi i m\tau},$$

was die Behauptung beweist.

(iii) Folgt sofort aus (ii). □

Bemerkung 1.5. Man kann zeigen, dass der Raum $\mathcal{H}_k$ aller Hecke-Operatoren ein Ring, sogar eine Algebra über $\mathbb{C}$ ist (als Unteralgebra von $\mathrm{End}(\mathbb{M}_k)$). Unter dem Produkt zweier Hecke-Operatoren $T_n \cdot T_m$ versteht man dabei die Hintereinanderausführung T_m nach T_n. Hecke bewies ebenfalls in [Hec37] folgenden fundamentalen Satz.

Satz 1.6 ([Hec37])**.** *Alle T_n sind miteinander vertauschbar und es gilt*

$$T_n \cdot T_m = \sum_{d|(n,m)} d^{k-1} T_{nm/d^2}.$$

Diesen Satz werden wir – analog zu Hecke – in drei Schritten beweisen. Zuerst beweisen wir ihn für teilerfremde Zahlen m und n, da sich in diesem Fall die Aussage zu einer Mulitplikativitätsaussage vereinfacht. Im Anschluss werden wir in Satz 1.8 eine wichtige Rekursionsformel für $n = p$ und $m = p^r$ für eine Primzahl p und $r \in \mathbb{N}$ herleiten, mit Hilfe derer wir Satz 1.6 für alle $m, n \in \mathbb{N}$ beweisen können.

Satz 1.7. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $(m, n) = 1$. Es gilt*

$$T_m \cdot T_n = T_{mn} = T_n \cdot T_m.$$

Beweis. Setze $\varphi := T_n f$ für $f \in \mathbb{M}_k$. Mit der Definition der Hecke-Operatoren (1.1) folgt

$$\varphi(\tau) = n^{k-1} \sum_{\substack{a'\cdot d'=n \\ b' \pmod{d'}}} f\left(\frac{a'\tau + b'}{d'}\right) d'^{-k}$$

$$\text{und } (T_m\varphi)(\tau) = m^{k-1} \sum_{\substack{a\cdot d=m \\ b \pmod{d}}} \varphi\left(\frac{a\tau + b}{d}\right) d^{-k}.$$

Einsetzen der ersten in die zweite Zeile liefert

$$\begin{aligned}((T_n \cdot T_m)f)(\tau) &= (mn)^{k-1} \sum_{\substack{a\cdot d=m \\ b \pmod{d}}} d^{-k} \left(\sum_{\substack{a'\cdot d'=n \\ b' \pmod{d'}}} f\left(\frac{a'\frac{a\tau+b}{d} + b'}{d'}\right) d'^{-k} \right) \\ &= (mn)^{k-1} \sum_{\substack{ad=m,\ b \pmod{d} \\ a'd'=n,\ b' \pmod{d'}}} (dd')^{-k} f\left(\frac{aa'\tau + a'b + b'd}{dd'}\right).\end{aligned}$$

Betrachtet man nun d und d' fest (und damit auch a und a', da diese von d und d' abhängen, vgl. (1.1), (1.2)), so durchläuft nach Lemma I $ba' + b'd$ ein volles Restsystem modulo dd'. Es folgt also mit $a'' = aa'$, $b'' = ba' + b'd$ und $d'' = dd'$

$$\begin{aligned}((T_n \cdot T_m)f)(\tau) &= (mn)^{k-1} \sum_{\substack{a''d''=nm \\ b'' \pmod{d''}}} f\left(\frac{a''\tau + b''}{d''}\right) d''^{-k} \\ &= (T_{nm}f)(\tau),\end{aligned}$$

was die Behauptung war. □

Satz 1.8. *Sei p eine Primzahl und $r \in \mathbb{N}$. Es gilt auf $\mathbb{M}_k$*

$$T_{p^r} \cdot T_p = T_{p^{r+1}} + p^{k-1} T_{p^{r-1}}. \tag{1.3}$$

Beweis. Sei $f \in \mathbb{M}_k$ und $\tau \in \mathbb{H}$. Da Primzahlen per Definition nur zwei Teiler haben, hat eine Primzahlpotenz p^r genau $r+1$ Teiler, sodass sich die Definition der Hecke-Operatoren in diesen Fällen zu

$$(T_p f)(\tau) = p^{k-1} f(p\tau) + p^{-1} \sum_{b \pmod p} f\left(\frac{\tau + b}{p}\right) \tag{1.4}$$

$$\text{bzw. } (T_{p^r} f)(\tau) = p^{r(k-1)} \sum_{i=0}^{r} p^{-ik} \sum_{b_i \pmod{p^i}} f\left(\frac{p^{r-i}\tau + b_i}{p^i}\right)$$

vereinfacht. Wir setzen nun wieder die erste in die zweite Gleichung ein, erhalten also

$$\begin{aligned}
((T_{p^r} \cdot T_p)(f))(\tau) &= p^{r(k-1)} \sum_{i=0}^{r} p^{-ik} \sum_{b_i \pmod{p^i}} (T_p f)\left(\frac{p^{r-i}\tau + b_i}{p^i}\right) \\
&= p^{r(k-1)} \sum_{i=0}^{r} p^{-ik} \sum_{b_i \pmod{p^i}} \left(p^{k-1} f\left(p\frac{p^{r-i}\tau + b_i}{p^i}\right)\right. \\
&\quad \left. + p^{-1} \sum_{b \pmod p} f\left(\frac{\frac{p^{r-i}\tau + b_i}{p^i} + b}{p}\right)\right) \\
&= p^{(k-1)(r+1)} \sum_{\substack{i=0 \\ b_i \pmod{p^i}}}^{r} p^{-ik} f\left(\frac{p^{r+1-i}\tau + b_i p}{p^i}\right) \\
&\quad + p^{(k-1)(r+1)} \sum_{\substack{i=0 \\ b \pmod p \\ b_i \pmod{p^i}}}^{r} p^{-(i+1)k} f\left(\frac{p^{r-i}\tau + b_i + bp^i}{p^{i+1}}\right).
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Der Term $b_i + bp^i$ im Argument von f in der zweiten Summe in (1.5) durchläuft nach Lemma II bei festem i ein volles Restsystem modulo p^{i+1}. Wir erhalten also mit $j := i+1$ und $b_j = b_i + bp^i$ für den zweiten Summanden

$$p^{(r+1)(k-1)} \sum_{j=1}^{r+1} p^{-jk} \sum_{b_j \pmod{p^j}} f\left(\frac{p^{r+1-j}\tau + b_j}{p^j}\right).$$

Fügen wir nun den Teil des ersten Summanden des Ausdrucks (1.5) mit $i = 0$ hinzu, so erhalten wir gerade $T_{p^{r+1}} f$. Vom Anfangsausdruck $((T_{p^r} \cdot T_p)(f))(\tau)$ bleibt demnach noch (im Argument von f gekürzt)

$$p^{r(k-1)} \sum_{i=1}^{r} p^{-ik} \sum_{b_i \pmod{p^i}} p^{k-1} f\left(\frac{p^{r-i}\tau + b_i}{p^{i-1}}\right) \tag{1.6}$$

übrig. Nun gilt

$$
\begin{aligned}
(1.6) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma II}}}{=} & \, p^{r(k-1)} \sum_{i=1}^{r} p^{-ik} \cdot p^k \sum_{b \pmod{p^{i-1}}} f\left(\frac{p^{r-i}\tau + b}{p^{i-1}}\right) \\
\underset{\substack{\uparrow \\ j:=i-1}}{=} & \, p^{r(k-1)} \sum_{j=0}^{r-1} p^{-jk} \sum_{b \pmod{p^j}} f\left(\frac{p^{r-j-1}\tau + b}{p^j}\right) \\
= & \, p^{k-1}(T_{p^{r-1}} f)(\tau)
\end{aligned}
$$

Genau das ist die Behauptung. □

Lemma 1.9. *Sei p eine Primzahl und $r, s \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$T_{p^s} \cdot T_{p^r} = \sum_{0 \le u \le r,s} p^{u(k-1)} T_{p^{r+s-2u}}.$$

Insbesondere gilt $T_{p^s} T_{p^r} = T_{p^r} T_{p^s}$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $s \le r$ annehmen. Der Fall $r < s$ verläuft aufgrund der Symmetrie von r und s analog. Sei nun r fest. Wir beweisen den Satz mittels vollständiger Induktion über s.

Die Behauptung gilt sowohl für $s = 0$, als auch für $s = 1$. Im Falle von $s = 0$ ist der Beweis trivial; für $s = 1$ ist zu zeigen

$$T_p \cdot T_{p^r} = \sum_{u=0}^{1} p^{u(k-1)} T_{p^{r+1-2u}} = T_{p^{r+1}} + p^{k-1} T_{p^{r-1}}.$$

Dies ist aber genau die Rekursionsformel aus Satz 1.8, somit ist der Induktionsanfang bewiesen.

Unter der Voraussetzung, dass Lemma 1.9 nun für $s-1$ und s gilt, folgt

$$
\begin{aligned}
T_{p^{s+1}} T_{p^r} & \underset{\substack{\uparrow \\ 1.8}}{=} (T_p T_{p^s} - p^{k-1} T_{p^{s-1}}) T_{p^r} = T_p T_{p^s} T_{p^r} - p^{k-1} T_{p^{s-1}} T_{p^r} \\
& \underset{\substack{\uparrow \\ \text{IV}}}{=} \sum_{u=0}^{s} p^{u(k-1)} T_p T_{p^{r+s-2u}} - p^{k-1} \sum_{u=0}^{s-1} p^{u(k-1)} T_{p^{r+s-2u-1}}.
\end{aligned}
$$

Nun setzen wir – wo möglich, d. h. bei allen Termen mit $r + s - 2u \in \mathbb{N}$ – in der ersten Summe nochmals die Rekursionsformel ein und erhalten

$$
\begin{aligned}
= & \sum_{\substack{u=0 \\ r+s-2u=0}}^{s} p^{u(k-1)} T_p T_{p^{r+s-2u}} + \sum_{\substack{u=0 \\ r+s-2u \ge 1}}^{s} p^{u(k-1)} (T_{p^{r+s-2u+1}} + p^{k-1} T_{p^{r+s-2u-1}}) \\
& - \sum_{u=0}^{s-1} p^{(u+1)(k-1)} T_{p^{r+s-2u-1}}.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Betrachten wir nun zuerst den Fall $s = r$. Es gilt dann $r + s - 2u = 0$ genau für $u = s$ und $r + s - 2u \geq 1$ für alle $u \in \{0, \dots, s-1\}$ und (1.7) vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned}
T_{p^{s+1}} T_{p^r} &= p^{s(k-1)} T_p T_1 + \sum_{u=0}^{s-1} p^{u(k-1)} T_{p^{2s-2u+1}} \\
&\quad + \sum_{u=0}^{s-1} p^{(u+1)(k-1)} T_{p^{2s-2u-1}} - \sum_{u=0}^{s-1} p^{(u+1)(k-1)} T_{p^{2s-2u-1}} \\
&= p^{s(k-1)} T_p + \sum_{u=0}^{s-1} p^{u(k-1)} T_{p^{2s-2u+1}} = \sum_{u=0}^{s} p^{u(k-1)} T_{p^{2s-2u+1}} \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ r=s}}{=} \sum_{0 \leq u \leq r, s+1} p^{u(k-1)} T_{p^{r+s+1-2u}}.
\end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung für $s + 1$.

Im Fall $s < r$, also insbesondere $s + 1 \leq r$, fällt der erste Summand in der Gleichung (1.7) weg, da für alle $u \in \{0, \dots, s\}$ stets $r + s - 2u \geq 1$ gilt, d. h. die Gleichung vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned}
T_{p^{s+1}} T_{p^r} &= \sum_{u=0}^{s} p^{u(k-1)} T_{p^{r+s-2u+1}} + \sum_{u=0}^{s} p^{(u+1)(k-1)} T_{p^{r+s-2u-1}} - \sum_{u=0}^{s-1} p^{(u+1)(k-1)} T_{p^{r+s-2u-1}} \\
&= \sum_{u=0}^{s} p^{u(k-1)} T_{p^{r+s-2u+1}} + p^{(s+1)(k-1)} T_{p^{r-s-1}} \\
&= \sum_{u=0}^{s+1} p^{u(k-1)} T_{p^{r+s+1-2u}} = \sum_{0 \leq u \leq r, s+1} p^{u(k-1)} T_{p^{r+s+1-2u}}.
\end{aligned}$$

Dies vervollständigt den Induktionsschluss und das Lemma ist bewiesen. □

Wir haben nun alles zusammen, um Satz 1.6 für alle $m, n \in \mathbb{N}$ beweisen zu können. Da Erich Hecke diese letzte Folgerung in seiner Originalarbeit [Hec37] auslässt („... folgt dann trivial die allgemeine Behauptung“), werden wir uns hier im Wesentlichen an [KK07] halten.

Beweis von Satz 1.6. Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $(m, n) = 1$ ist dies gerade Satz 1.7. Seien also nun $m, n \in \mathbb{N}$ nicht teilerfremd. Nach elementaren Kenntnissen der Zahlentheorie lassen sich beide Zahlen eindeutig als Produkt von Primfaktoren zerlegen. Wir beweisen den Satz mittels Induktion über die Anzahl q der gemeinsamen verschiedenen Primteiler von m und n (d. h. über die Anzahl der Primteiler von mn).

Der Induktionsanfang (es gibt genau einen gemeinsamen Primteiler p, d. h. $m = p^r$, $n = p^s$ für entsprechende $r, s \in \mathbb{N}$) ist durch das vorige Lemma bewiesen, da

$$T_{p^s} \cdot T_{p^r} \underset{\substack{\uparrow \\ 1.9}}{=} \sum_{0 \leq u \leq r, s} p^{u(k-1)} T_{p^{r+s-2u}} = \sum_{d \mid (p^r, p^s)} d^{k-1} T_{p^r p^s / d^2} \tag{1.8}$$

aufgrund dessen, dass $(p^r, p^s) = p^{\min\{r,s\}}$.

Gelte also nun die Behauptung für $m', n' \in \mathbb{N}$, so dass $m'n'$ genau $q-1$ verschiedene Primteiler hat. Da m und n nicht teilerfremd sind, gibt es eine Primzahl p mit $p \mid (m,n)$. Man kann also $m', n', r, s \in \mathbb{N}$ finden, sodass

$$m = p^r m', \quad n = p^s n'$$

gilt. Ohne Einschränkung sind m', n' so zu wählen, dass $p \nmid m'$ und $p \nmid n'$. p ist also kein Primteiler von $m'n'$. Aufgrund der Wahl von m' und n' muss jeder Primteiler von $m'n'$ auch mn teilen. Somit hat $m'n'$ genau einen Primteiler weniger als mn, d. h. $m'n'$ hat genau $q-1$ verschiedene Primteiler und wir können im Folgenden die Induktionsvoraussetzung anwenden. Es folgt also

$$\begin{aligned} T_n T_m = T_{n'p^s} T_{m'p^r} &\underset{\substack{\uparrow \\ 1.7,\ 1.9}}{=} T_{m'} T_{n'} T_{p^r} T_{p^s} \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{IV},\ (1.8)}}{=} \sum_{t \mid (m',n')} t^{k-1} T_{m'n'/t^2} \cdot \sum_{d \mid (p^r,p^s)} d^{k-1} T_{p^r p^s/d^2} \\ &= \sum_{t \mid (m',n')} \sum_{d \mid (p^r,p^s)} (td)^{k-1} T_{mn/(td)^2}. \end{aligned}$$

td durchläuft natürlich die gemeinsamen Teiler von $m = m'p^r$ und $n = n'p^s$, also folgt Satz 1.6. $\square$

Kapitel 2

Dirichletreihen

In diesem Kapitel widmen wir uns den Grundlagen zur Theorie der Dirichletschen Reihen. Dirichletreihen, oder ihre Verallgemeinerung, die sogenannten L-Reihen, bieten ein hilfreiches Werkzeug, um eine Brücke zwischen der Funktionentheorie und der (analytischen) Zahlentheorie zu schlagen. Wir werden in Kapitel 3 dieser Arbeit selbst einen wichtigen Pfeiler dieser Brücke herleiten und beweisen.

Definition 2.1. Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ heißt *zahlentheoretische Funktion*. Für zwei zahlentheoretische Funktionen f und g definiert

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

die *Faltung von f und g*.

Beispiel 2.2.

1. Die *verallgemeinerte Teilersummenfunktionen* $\sigma_k(n) := \sum_{d|n} d^k$ berechnen die Summe der k-ten Potenzen sämtlicher Teiler einer Zahl. Für $k = 0$ beschreibt $\sigma_0(n)$ die Anzahl der Teiler von n.
2. Die *Eulersche φ-Funktion* $\varphi(m)$ bezeichnet die Anzahl der zu $m \in \mathbb{N}$ teilerfremden natürlichen Zahlen, die kleiner als m sind. Für eine Primzahl p und $k \geq 1$ gilt somit $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$, denn unter den Zahlen $1, \ldots, p^k$ sind nur die Vielfachen von p, also p^{k-1} Zahlen, zu p^k nicht teilerfremd.

Definition 2.3. Sei c eine zahlentheoretische Funktion. Die Reihe

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s} \quad \text{für } s \in \mathbb{C}$$

heißt *Dirichletreihe zu den Koeffizienten $c(n)$*.

Bemerkung 2.4. Man sollte zwischen der formalen Dirichletreihe D, sowie der in ihrem Konvergenzbereich analytischen Funktion $D : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $s \mapsto D(s)$, unterscheiden. An den erforderlichen Stellen werden auch wir dies in dieser Arbeit tun.

Im Folgenden möchten wir kurz die Konvergenzeigenschaften von Dirichletreihen beschreiben. Analog zu Potenzreihen, die in einem bestimmten Radius um den Entwicklungspunkt (*Konvergenzradius*) absolut konvergieren, findet man bei Dirichletreihen die sogenannte *Konvergenzabszisse.* Eine Dirichletreihe konvergiert absolut für alle $s \in \mathbb{C}$, deren Realteil größer als die Konvergenzabszisse ist. Dirichletreihen besitzen also keinen Konvergenzkreis, sondern eine Konvergenzhalbebene.

Wir schreiben im Folgenden $s = \sigma + it$ mit $\sigma,\ t \in \mathbb{R}$.

Satz 2.5 (vgl. [Apo76])**.** *Sei D eine Dirichletreihe. Es existiert eine Zahl $\sigma_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, so dass D für alle $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0$ absolut konvergiert und für alle $\sigma = \operatorname{Re} s < \sigma_0$ nicht absolut konvergiert.*

σ_0 *heißt* absolute Konvergenzabszisse*.*

Beweis. Angenommen, $\sum_{n=1}^{\infty} |c(n)n^{-s}|$ konvergiert irgendwo, aber nicht überall. Mit $s = \sigma + it$ sei

$$C = \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |c(n)n^{-s}| \text{ konvergiert nicht} \right\}.$$

Da D nicht überall absolut konvergiert, ist C nicht leer. Wie aus der Funktionentheorie bekannt gilt $n^s = e^{s \log n} = e^{(\sigma+it)\log n} = n^\sigma e^{it \log n}$, somit folgt $|n^s| = n^\sigma$, da $|e^{it}| = 1$ für $t \in \mathbb{R}$. Sei nun $s' = a + ib$ eine Konvergenzstelle von D. Dann folgt für alle s mit $\sigma \geq a$

$$\left| \frac{c(n)}{n^s} \right| = \frac{|c(n)|}{n^\sigma} \leq \frac{|c(n)|}{n^a}.$$

Somit ist D für alle s mit $\sigma \geq a$ ebenfalls absolut konvergent und a ist eine obere Schranke für C. Sei σ_0 die kleinste obere Schranke von C. Für $\sigma < \sigma_0$ liegt σ in C, da σ ansonsten eine kleinere obere Schranke für C wäre, die kleiner als σ_0 ist, d. h. D konvergiert nicht.

Falls $\sum_{n=1}^{\infty} |c(n)n^{-s}|$ überall oder nirgends konvergiert, so setze σ_0 entsprechend $\pm\infty$. □

Bemerkung 2.6. Analog kann man zeigen, dass es eine weitere Konvergenzabszisse σ_c gibt, sofern man statt absolute Konvergenz die „normale“ Konvergenz betrachtet. Für unsere Zwecke reicht jedoch die Kenntnis der absoluten Konvergenzabszisse.

Der Raum der formalen Dirichletreihen bildet einen Ring (sogar eine Algebra, ohne Beweis). Man sieht leicht, dass die Faltung der entsprechenden zahlentheoretischen Funktionen zur Multiplikation der Dirichletreihen führt.

Satz 2.7 (vgl. [Apo76])**.** *Seien D_1 und D_2 Dirichletreihen zu den zahlentheoretischen Funktionen c_1 und c_2 mit absoluten Konvergenzabszissen σ_0 und τ_0. Dann gilt für das Produkt der beiden Reihen*

$$D_1(s)D_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(c_1 * c_2)(n)}{n^s} \quad \textit{für } \operatorname{Re} s > \max\{\sigma_0, \tau_0\}.$$

Beweis. Für alle s mit $\operatorname{Re} s > \max\{\sigma_0, \tau_0\}$ gilt

$$D_1(s)D_2(s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_1(n)n^{-s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} c_2(m)m^{-s}\right) = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_1(n)c_2(m)(mn)^{-s}. \qquad (*)$$

Da die Reihen D_1 und D_2 für den oben genannten Bereich absolut konvergieren, kann man in der Reihe D_1D_2 beliebig umordnen. Sei nun $k \in \mathbb{N}$. Fassen wir nun die Terme mit $mn = k$ zusammen, folgt die Behauptung, da

$$(*) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{mn=k} c_1(n)c_2(m)\right)k^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty}(c_1 * c_2)(k)k^{-s}. \quad \square$$

Wir werden nun zeigen, dass man bestimmte Dirichletreihen als unendliches Produkt über alle Primzahlen schreiben kann. Dies ist eine durchaus „schöne“ Eigenschaft, da zum einen Produkte in den meisten Fällen einfacher zu handhaben sind, als Summen. Zum anderen werden dadurch Probleme bei der Betrachtung von Dirichletreihen auf die Betrachtung der Primzahlen reduziert.

Definition 2.8. Eine zahlentheoretische Funktion f heißt *multiplikativ*, wenn $f(mn) = f(m)f(n)$ für alle teilerfremden $m, n \in \mathbb{N}$ gilt. f heißt *streng multiplikativ*, wenn dies sogar für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt.

Satz 2.9 (vgl. [Apo76])**.** *Sei f eine multiplikative zahlentheoretische Funktion, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \neq 0$ absolut konvergiert. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p \text{ prim}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k)\right).$$

Im Falle streng multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen erhalten wir sogar

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - f(p)}.$$

Beweis. Betrachte zuerst für $x \in \mathbb{R}$ das Produkt

$$P(x) = \prod_{\substack{p \text{ prim},\\ p \leq x}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k)\right).$$

P ist ein endliches Produkt von absolut konvergenten Reihen, so dass wir beliebig ausmultiplizieren und umordnen können. Bezeichnen wir die Primzahlen, welche kleiner als x sind mit $p_1, \ldots, p_q$, so erhalten wir mit der Multiplikativität von f

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_q=0}^{\infty} f(p_1^{k_1}) \cdots f(p_q^{k_q}) \\ &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_q=0}^{\infty} f(p_1^{k_1} \cdots p_q^{k_q}) = \sum_{n \in A} f(n), \end{aligned}$$

wobei A alle natürlichen Zahlen enthält, deren Primfaktorenzerlegungen aus den Primzahlen $p_1, \dots, p_q$ besteht. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \sum_{n\in A} f(n)\right| \le \left|\sum_{n>x} f(n)\right| \le \sum_{n>x} |f(n)| \to 0$$

für $x \to \infty$, da $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ absolut konvergent ist.

Ist nun f streng multiplikativ, so gilt $f(p^k) = f(p)^k$ und die Behauptung folgt nach Anwendung der geometrischen Summenformel. □

Wenden wir diesen Satz nun auf eine Dirichletreihe $\sum c(n)n^{-s}$ an, so erhalten wir mit $f(n) = c(n)n^{-s}$ die wichtige *Euler-Produktdarstellung* einer Dirichletreihe. Anhand des vorigen Beweises wird deutlich, dass man Euler-Produkte manchmal als analytische Version der eindeutigen Primfaktorzerlegung bezeichnet.

Korollar 2.10. *Sei $D(s) = \sum c(n)n^{-s}$ eine Dirichletreihe mit absoluter Konvergenzabszisse σ_0. Ist c multiplikativ, so gilt für $\operatorname{Re} s > \sigma_0$*

$$D(s) = \prod_{p \text{ prim}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c(p^k)}{p^{ks}}.$$

Ist c streng multiplikativ, so gilt sogar für $\operatorname{Re} s > \sigma_0$

$$D(s) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}}.$$

Beispiel 2.11.

1. Als wichtigste Anwendung des Euler-Produkts ist hier die Riemannsche ζ-Funktion zu erwähnen. Wenden wir das vorangegangene Korollar auf $c(n) = 1$ an, so erhalten wir sofort für $\operatorname{Re} s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

2. Die Eulersche φ-Funktion $\varphi(m)$ ist multiplikativ (Lemma III). Mit dem vorangegangenen Korollar folgt nun unter Beachtung von $\varphi(p^k) = (1 - p^{-1})p^k$ und Benutzung der Formel für die geometrische Reihe

$$\begin{aligned} D(s) &= \prod_{p \text{ prim}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(p^k)}{p^{ks}} = \prod_{p \text{ prim}} 1 + (1 - p^{-1}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{p^{ks}} - (1 - p^{-1}) \\ &= \prod_{p \text{ prim}} p^{-1} + (1 - p^{-1}) \sum_{k=0}^{\infty} (p^{1-s})^k = \prod_{p \text{ prim}} p^{-1} + \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{1-s}} \\ &= \prod_{p \text{ prim}} \frac{1 - p^{-s}}{1 - p^{1-s}} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \quad \text{für } \operatorname{Re} > 2. \end{aligned}$$

Die absolute Konvergenzabzisse dieser Dirichletreihe ist also $\sigma_0 = 2$, da nach Lemma IV die absolute Konvergenzabzisse der Riemannschen ζ-Funktion 1 ist.

Kapitel 3

Der Korrespondenzsatz nach Hecke

Im folgenden Kapitel erarbeiten wir den Hauptteil dieser Arbeit. Wir stellen einen wichtigen Zusammenhang zwischen Dirichletreihen und ganzen Modulformen her und verknüpfen somit in geschickter Weise zwei Disziplinen der Mathematik: die Zahlentheorie mit der Funktionentheorie. Nachdem 1921 Hans Hamburger eine wichtige Funktionalgleichung für die Riemannsche ζ-Funktion bewiesen hatte ([Ham21]), verallgemeinerte Erich Hecke im Jahre 1936 diese Theorie und bewies in seiner Arbeit „Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung“ die von uns im folgenden Kapitel vorgestellte Korrespondenz.

Definition 3.1. Seien $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda > 0$ und $\varepsilon = \pm 1$. Definiere den Raum $[\lambda, k, \varepsilon]$ als den Raum aller Fourierreihen der Form

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n \tau}{\lambda}}$$

für $\tau \in \mathbb{H}$ mit

(i) a_n wächst höchstens polynomial, insbesondere gilt $a_n \leq C \cdot n^{k-1}$ für eine Konstante $C > 0$ und alle $n \geq 1$.

(ii) Es gelten die Funktionalgleichungen

$$f\left(-\tfrac{1}{\tau}\right) = \varepsilon \left(\tfrac{\tau}{i}\right)^k f(\tau), \qquad f(\tau + \lambda) = f(\tau). \tag{3.1}$$

Man sagt auch, f habe die *Signatur* $[\lambda, k, \varepsilon]$.

Bemerkung 3.2. Aus (i) folgt, dass f in der oberen Halbebene konvergiert und eine analytische Funktion darstellt. Nach Bemerkung 1.2 ist also $[1, k, i^k]$ für gerade Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ der Raum $\mathbb{M}_k$ der ganzen Modulformen.

Definition 3.3. Seien λ, k und ε wie in Definition 3.1. Sei Γ die *Gamma-Funktion*, d. h.

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-y} y^{s-1} dy, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Definiere nun den Raum $\{\lambda, k, \varepsilon\}$ als den Raum aller Dirichletreihen

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

mit

(i) D konvergiert irgendwo absolut.

(ii) D ist als meromorphe Funktion in die ganze Ebene fortsetzbar.

(iii) Es gilt die Funktionalgleichung

$$R(s) = \varepsilon R(k-s), \quad \text{wobei } R(s) := \left(\tfrac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s) D(s). \tag{3.2}$$

(iv) R klingt in jedem Vertikalstreifen $a \leq \operatorname{Re} s \leq b$ ab, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Zahl $C > 0$ mit der Eigenschaft

$$|R(s)| < \varepsilon \quad \text{für } a \leq \operatorname{Re} s \leq b, \ |\operatorname{Im} s| \geq C.$$

Man sagt auch, D habe die *Signatur* $\{\lambda, k, \varepsilon\}$.

Hauptsatz 3.4 ([Hec36])**.** *Die Anzahl der linear unabhängigen Dirichletreihen der Signatur $\{\lambda, k, \varepsilon\}$ ist genau gleich der Anzahl der linear unabhängigen Funktionen $f(\tau)$ der Signatur $[\lambda, k, \varepsilon]$.*

Es gilt also

$$\{\lambda, k, \varepsilon\} \simeq [\lambda, k, \varepsilon].$$

Bemerkung 3.5. Der Hauptsatz besagt, dass jeder Dirichletreihe mit den Eigenschaften aus Definition 3.3 eine ganze Modulform zugeordnet werden kann und umgekehrt. Man benutzt für die Konstruktion jeweils dieselben Koeffizienten a_n. Es fällt jedoch auf, dass für die Bestimmung der Fourierreihe aus $[\lambda, k, \varepsilon]$ ein Koeffizient a_0 benötigt wird, den es in der entsprechenden Dirichletreihe a priori nicht gibt. Wir merken uns die Problematik und kommen darauf zurück, wenn wir den Hauptsatz nun aufgeteilt in den Sätzen 3.8 und 3.11 (Abschnitte 3.1 und 3.2) beweisen.

Wir halten uns dabei eng an die Beweisstrategie von Erich Hecke, greifen jedoch, wo nötig auf die Aufarbeitung des Beweises durch Freitag und Busam ([FB00]) zurück. Zuerst zeigen wir, dass die zu einer Fourierreihe aus dem Raum $[\lambda, k, \varepsilon]$ zugehörige Dirichletreihe die Signatur $\{\lambda, k, \varepsilon\}$ hat. Im Anschluss zeigen wir die Rückrichtung.

Im gesamten Beweis spielt die Γ-*Funktion* eine bedeutende Rolle. Wir fassen an dieser Stelle einige Aussagen über sie zusammen, um im weiteren Verlauf darauf verweisen zu können. Darüber hinaus erinnern wir uns an das bekannte Majorantenkriterium zur Konvergenz von Integralen aus der Funktionentheorie. Für den Beweis sei z. B. auf [Rem95] verwiesen.

Satz 3.6 (vgl. [Rem95])**.** *Sei $g : \Omega \times [a, \infty) \to \mathbb{C}$ stetig, wobei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $a \in \mathbb{R}$ ist. Gibt es eine Funktion $M : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, so dass*

(i) $|g(z,t)| \leq M(t)$ *für alle* $z \in \Omega$ *und* $t \geq a$,

(ii) $\int_a^\infty M(t)dt$ *existiert,*

so konvergiert $\int_a^\infty g(z,t)dt$ gleichmäßig und absolut in Ω, d. h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Konstante $C > a$, sodass

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} g(z,t)dt\right| < \varepsilon$$

für alle $z \in \Omega$ und $t_1, t_2 \geq C$ gilt. Falls $g(z,t)$ holomorph auf Ω für jedes $t \geq a$ ist, so ist $\int_a^\infty g(z,t)dt$ ebenfalls holomorph in Ω.

Satz 3.7 (Eigenschaften der Γ-Funktion). *Sei $\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-y}y^{s-1}dy$ für $\operatorname{Re} s > 0$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$.

(ii) Die Γ-Funktion hat nur an allen nicht-positiven ganzen Zahlen Pole erster Ordnung und ist somit meromorph auf $\mathbb{C}$.

(iii) Die Γ-Funktion hat keine Nullstellen.

(iv) $\log\Gamma(s) - \left(s - \frac{1}{2}\right)\log s + s$ *ist beschränkt (*komplexe Stirling-Formel*).*

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass $\Gamma(s)$ für $\operatorname{Re} s > 0$ absolut konvergent ist. Dazu teilen wir das Integral auf in

$$\Gamma(s) = \int_0^1 e^{-y}y^{s-1}dy + \int_1^\infty e^{-y}y^{s-1}dy.$$

Für das erste Integral gilt für $\operatorname{Re} s > 0$

$$\int_0^1 |e^{-y}y^{s-1}|dy \leq \int_0^1 y^{\operatorname{Re} s-1} = \left[\frac{1}{\operatorname{Re} s}y^{\operatorname{Re} s}\right]_0^1 = \frac{1}{\operatorname{Re} s}.$$

Den zweiten Integranden können wir aufgrund von $e^{-y}y^{s+1} \to 0$ für y gegen ∞ mittels

$$|e^{-y}y^{s-1}| = \left|\frac{e^{-y}y^{s+1}}{y^2}\right| \leq \frac{C}{y^2}$$

abschätzen. Da $y \geq 1$, folgt die Konvergenz aus dem Majorantenkriterium 3.6.

Mit partieller Integration gilt nun für $\operatorname{Re} s > 0$

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \int_0^\infty e^{-y} y^s dy = [-e^{-y} \cdot y^s]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-y}) \cdot s y^{s-1} dy \\ &= 0 + s \int_0^\infty e^{-y} y^{s-1} dy = s\Gamma(s),\end{aligned}$$

da im ersten Summanden im Limes $y \to \infty$ die Exponentialfunktion die Potenzfunktion dominiert.

Aus dieser Gleichung folgt iterativ die Rekursionsformel

$$\Gamma(s+n) = s(s+1) \cdot \ldots \cdot (s+n-1)\Gamma(s).$$

Mit dieser Darstellung können wir $\Gamma(s)$ für alle Werte $s \neq -n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{s(s+1) \cdot \ldots \cdot (s+n-1)}$$

meromorph in die gesamte Ebene fortsetzen. Die Lage der Pole ist dadurch offensichtlich. Damit folgen (i) und (ii).

Der Beweis der Aussagen (iii) und (iv) würde an dieser Stelle zu weit führen. Wir verweisen auf einschlägige Fachliteratur, z. B. [Rem95]. □

3.1 Die einer Fourierreihe zugehörige Dirichletreihe

Zunächst konstruieren wir aus einer Fourierreihe der Signatur $[\lambda, k, \varepsilon]$ eine Dirichletreihe der Signatur $\{\lambda, k, \varepsilon\}$. Die Konstruktion ist sehr naheliegend, da die Koeffizienten der Fourierreihe die Koeffizienten der Dirichletreihe bilden werden. Unser erstes Ziel ist hier der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 3.8. *Sei $f(\tau) = \sum_{n=0}^\infty a_n e^{2\pi i n \tau \lambda^{-1}}$ eine Fourierreihe der Signatur $[\lambda, k, \varepsilon]$. Dann gilt*

$$D(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$$

ist eine Dirichletreihe der Signatur $\{\lambda, k, \varepsilon\}$

Die benötigte Aussage über die Konvergenz von D erhalten wir mit Hilfe der absoluten Konvergenzabszisse der Riemannschen ζ-Funktion, die wir im Anhang beweisen.

Lemma 3.9. *Sei $f \in [\lambda, k, \varepsilon]$ und D die zugehörige Dirichletreihe. Dann konvergiert D für $\operatorname{Re} s > k$ absolut.*

Beweis. Nach Definition 3.1 existiert ein $C > 0$ mit $|a_n| \leq C \cdot n^{k-1}$ für alle $n \geq 1$. Es folgt also für $\operatorname{Re} s > k$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n n^{-s}| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\operatorname{Re} s} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1-\operatorname{Re} s} \leq C \cdot \zeta(\operatorname{Re} s + 1 - k) < \infty,$$

da die absolute Konvergenzabszisse der Riemannschen ζ-Funktion 1 ist (Lemma IV). □

Wir stellen nun im folgenden Lemma den analytischen Zusammenhang zwischen der Fourier- und der Dirichletreihe her, den wir im Anschluss zum Beweis von Satz 3.8 benötigen.

Lemma 3.10. *Seien $f \in [\lambda, k, \varepsilon]$ und D die zugehörige Dirichletreihe. R sei wie in* (3.2) *definiert. Dann gilt*

$$R(s) = \int_0^{\infty} [f(it) - a_0] t^{s-1} dt$$

für $\operatorname{Re} s > \max\{0, \sigma_0\}$*, wobei $\sigma_0 \leq k$ die Konvergenzabszisse von D bezeichnet.*

Beweis. Es gilt für $\operatorname{Re} s > \max\{0, \sigma_0\}$ (da die Γ-Funktion für alle $\operatorname{Re} s > 0$ konvergiert)

$$\begin{aligned} R(s) &= \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s) D(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \left(\int_0^{\infty} e^{-y} y^{s-1} dy\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\right) \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^{-s} e^{-y} y^{s-1} dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} a_n \left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^{-s} e^{-y} y^{s-1} dy, \end{aligned}$$

wobei die Vertauschung nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz erlaubt ist, denn es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n \left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^{-s} e^{-y} y^{s-1} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\operatorname{Re} s} e^{-y} y^{\operatorname{Re} s - 1}.$$

Nach Lemma 3.9 ist dies eine integrierbare Majorante.

Substituieren wir nun $y := 2\pi n t/\lambda$, so erhalten wir mit $dy = (2\pi n/\lambda) dt$ für obigen Ausdruck

$$R(s) = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{2\pi n t}{\lambda}} t^{s-1} \left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^{-s+s-1+1} dt = \int_0^{\infty} [f(it) - a_0] t^{s-1} dt,$$

was die Behauptung war. □

Wir sind nun imstande, Satz 3.8 zu beweisen.

Beweis von Satz 3.8. Wir werden zeigen, dass sich R meromorph in die Ebene fortsetzen lässt. Wie wir sehen werden, folgt daraus zwangsläufig die analytische Fortsetzung von D in die Ebene. Die Funktionalgleichung (3.2) zeigen wir im Anschluss, ebenso die Behauptung über das Abklingen von R in jedem Vertikalstreifen.

R ist nach dem vorigen Lemma ein zu beiden Seiten uneigentliches Integral. Wir spalten es zur besseren Betrachtung daher auf in

$$R_1(s) = \int_0^1 [f(it) - a_0]t^{s-1}dt \quad \text{und} \quad R_2(s) = \int_1^\infty [f(it) - a_0]t^{s-1}dt,$$
$$\Rightarrow R = R_1 + R_2.$$

Zuerst bemerken wir, dass R_2 eine ganze Funktion ist: $f(it) - a_0$ klingt für $t \to \infty$ exponentiell ab, da Potenzreihen in der Umgebung des Nullpunktes beschränkt sind. Es gibt also eine Konstante C, sodass

$$|f(it) - a_0| = \left| \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-\frac{2\pi n t}{\lambda}} \right| \leq C \cdot e^{-2\pi t}. \tag{3.3}$$

Weiter ist $f(it) - a_0$ auf der oberen Halbene holomorph (bzw. differenzierbar), da f dort holomorph ist. Da wir aus der elementaren Analysis wissen, dass $\int_1^\infty e^{-2\pi t}dt$ existiert, folgt die Holomorphie von R_2 aus dem Majorantenkriterium Satz 3.6.

Widmen wir uns also nun R_1 und substituieren dort $t = \frac{1}{\tau}$, so erhalten wir mit $dt = -\frac{1}{\tau^2}d\tau$

$$R_1(s) = \int_1^\infty \left[f\left(i/\tau\right) - a_0\right]\left(\tau^{-s-1}\right)d\tau.$$

Man beachte dabei, dass sich die untere Integralgrenze durch die Substitution auf ∞ und die obere auf 1 geändert hat. Durch das negative Vorzeichen, das durch die Ableitung des Substituenden entstanden ist, wurden diese Grenzen jedoch wieder vertauscht. Setzen wir nun in die Funktionalgleichung (3.1) für $f(i\tau)$ ein, so erhalten wir $f(i/\tau) = \varepsilon\tau^k f(i\tau)$ und damit

$$R_1(s) = \int_1^\infty [\varepsilon\tau^k f(i\tau) - a_0]\tau^{-s-1}d\tau.$$

Formen wir R_1 geringfügig um, so sehen wir, dass wir einen Teil von R_1 mit Hilfe von R_2 darstellen können:

$$\begin{aligned} R_1(s) &= \int_1^\infty \varepsilon\tau^{k-s-1}f(i\tau) - a_0\tau^{-s-1} - \varepsilon\tau^{k-s-1}a_0 + \varepsilon\tau^{k-s-1}a_0 d\tau \\ &= \int_1^\infty \varepsilon\tau^{k-s-1}[f(i\tau) - a_0] + \varepsilon\tau^{k-s-1}a_0 - a_0\tau^{-s-1}d\tau \\ &= \varepsilon R_2(k-s) + a_0\varepsilon \int_1^\infty \tau^{k-s-1}d\tau - a_0 \int_1^\infty \tau^{-s-1}d\tau \\ &= \varepsilon R_2(k-s) + a_0 \left(\varepsilon \left[\tfrac{1}{k-s}\tau^{k-s} \right]_1^\infty - \left[-\tfrac{1}{s}\tau^{-s} \right]_1^\infty \right) \\ &= \varepsilon R_2(k-s) - a_0 \left(\tfrac{\varepsilon}{k-s} + \tfrac{1}{s} \right). \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also folgender Zusammenhang

$$R(s) = \varepsilon R_2(k-s) + R_2(s) - a_0 \left(\tfrac{\varepsilon}{k-s} + \tfrac{1}{s} \right). \tag{3.4}$$

R_2 ist ganz, also ist R meromorph (d. h. bis auf mögliche Pole bei $s = k$ und $s = 0$) in die Ebene fortsetzbar. Aus (3.3) folgt ebenfalls, dass R_2 und damit R in jedem Vertikalstreifen beschränkt ist.

Die Γ-Funktion hat nach Satz 3.7 keine Nullstellen und ist als meromorphe Funktion in die gesamte Ebene fortsetzbar, so dass $1/\Gamma$ eine ganze Funktion ist. Folglich ist auch

$$D(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^s \cdot \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot R(s)$$

meromorph in die Ebene fortsetzbar.

Die Funktionalgleichung (3.2) folgt sofort aus (3.4) und $\varepsilon^2 = 1$, denn

$$\begin{aligned}\varepsilon R(k-s) &= \varepsilon^2 R_2(s) + \varepsilon R_2(k-s) - a_0\left(\tfrac{\varepsilon^2}{s} + \tfrac{\varepsilon}{k-s}\right)\\ &= \varepsilon R_2(k-s) + R_2(s) - a_0\left(\tfrac{\varepsilon}{k-s} + \tfrac{1}{s}\right) = R(s).\end{aligned}$$

Mit Lemma 3.9 folgt nun die Behauptung. □

3.2 Die einer Dirichletreihe zugehörige Fourierreihe

Nachdem wir im vorigen Abschnitt, zu einer Fourierreihe aus dem Raum $[\lambda, k, \varepsilon]$ eine Dirichletreihe der Signatur $\{\lambda, k, \varepsilon\}$ konstruiert haben, möchten wir nun hier die Umkehrung zeigen. Wie zu Beginn von Kapitel 3 bereits erwähnt, müssen wir noch den 0-ten Koeffizienten der Fourierreihe angeben. Es stellt sich heraus, dass hier genau das Negative des Residuums der Funktion R an der Stelle $s = 0$ zu wählen ist. Ziel dieses Abschnitts ist also der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 3.11. *Sei $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ eine Dirichletreihe der Signatur $\{\lambda, k, \varepsilon\}$. Dann ist*

$$f(\tau) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n \tau}{\lambda}}$$

mit $a_0 = -\operatorname{res}_{s=0} R(s)$ eine Fourierreihe der Signatur $[\lambda, k, \varepsilon]$.

Für diese Rückrichtung des Beweises von Hauptsatz 3.4 benötigen wir die *Mellinsche Theorie*, mit deren Hilfe wir in gewissem Sinne eine Umkehrung der Γ-Funktion erhalten. Zur Erarbeitung dieser Theorie halten wir uns im Wesentlichen an [KK07]. Aus diesem Buch sind, falls nicht anders gekennzeichnet, die Sätze und Lemmata dieses Abschnitts entnommen.

Satz 3.12 (Mellin-Transformation). *Sei $g : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so dass zu beliebigem $\gamma > 0$ ein $C_\gamma > 0$ existiert mit*

$$|g(y)| \leq C_\gamma \cdot y^{-\gamma} \quad \text{für alle } y \in (0, \infty).$$

Definiere für $\operatorname{Re} s > 0$ die Funktion

$$M_g(s) := \int_0^\infty g(y) y^{s-1} dy.$$

Dann ist M_g auf der Halbebene $\{\sigma > 0\} := \{\sigma + it \in C \mid \sigma > 0\}$ holomorph. Man nennt M_g die Mellin-Transformierte *von g.*

Beweis. Wir werden an dieser Stelle wieder das Majorantenkriterium 3.6 verwenden. Wähle dazu Zahlen α und β mit $0 < \alpha < \sigma = \operatorname{Re} s < \beta$. Nach Voraussetzung und mit $|y^{s-1}| = y^{\sigma-1}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |g(y) y^{s-1}| dy &\leq \int_0^1 C_\alpha y^{-\alpha} y^{\sigma-1} dy = C_\alpha \int_0^1 y^{\sigma-\alpha-1} dy = C_\alpha \left[\frac{y^{\sigma-\alpha}}{\sigma-\alpha} \right]_0^1 = C_\alpha \frac{1}{\sigma-\alpha}, \\
\int_1^\infty |g(y) y^{s-1}| dy &\leq \int_1^\infty C_\beta y^{-\beta} y^{\sigma-1} dy = C_\beta \int_1^\infty y^{\sigma-\beta-1} dy = C_\beta \left[\frac{y^{\sigma-\beta}}{\sigma-\beta} \right]_0^\infty \\
&= C_\beta \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\sigma-\beta} - 1}{\sigma-\beta} = C_\beta \frac{1}{\beta-\sigma},
\end{aligned}$$

da $\sigma < \beta$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. In jedem Vertikalstreifen $V_\varepsilon = \{s \in \mathbb{C} : \alpha + \varepsilon \leq \sigma \leq \beta - \varepsilon\}$ folgt

$$\begin{aligned}
C_\alpha \frac{1}{\sigma-\alpha} &\leq C_\alpha \frac{1}{\alpha+\varepsilon-\alpha} = C_\alpha \frac{1}{\varepsilon}, \\
C_\beta \frac{1}{\beta-\sigma} &\leq C_\beta \frac{1}{\beta-\beta+\varepsilon} = C_\beta \frac{1}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Die Integrale – und damit auch deren Summe $M_g(s)$ – konvergieren also auf V_ε absolut gleichmäßig. Wir wenden nun Satz 3.6 auf die Integrale

$$\int_1^\infty g(y) y^{s-1} dy \quad \text{und} \quad \int_0^1 g(y) y^{s-1} = \int_1^\infty g(1/y) y^{-s-1} dy$$

an. Die Voraussetzungen des Satzes haben wir jeweils oben gezeigt. Da g stetig ist, sind $g(y)y^{s-1}$, sowie $g(1/y)y^{-s-1}$ auf der Halbebene $\{\sigma > 0\}$ holomorph, damit auch die jeweiligen Integrale und folglich auch deren Summe $M_g(s)$. □

Satz 3.13 (Mellinsche Umkehrformel). *Sei f eine holomorphe Funktion auf der Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 0\}$, so dass es zu allen $0 < \alpha < \beta$ ein $\gamma > 1$ und $C > 0$ gibt mit*

$$|f(s)| \leq C \cdot (1 + |t|)^{-\gamma} \quad \text{für } s = \sigma + it,\ \alpha \leq \sigma \leq \beta.$$

Definiere für $y > 0$ das Integral

$$f^*(y) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma + it) y^{-\sigma - it} dt.$$

Dann gilt

(i) $f^*(y)$ *konvergiert absolut und ist unabhängig von* σ.

(ii) $M_{f^*}(s) = f(s)$.

Beweis.

(i) Mit der Voraussetzung und mit $|y^{-s}| = y^{-\sigma}$ folgt für $\sigma > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma + it) y^{-\sigma - it} dt| &\leq \frac{C}{2\pi} y^{-\sigma} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|)^{-\gamma} dt}_{=2\int_0^\infty (1+t)^{-\gamma} dt} = \frac{C}{\pi} y^{-\sigma} \int_0^\infty (1+t)^{-\gamma} dt \\ &= \frac{C}{\pi} y^{-\sigma} \left[\frac{(1+t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]_0^\infty \underset{\gamma > 1}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{C}{\pi} y^{-\sigma} \cdot \left(-\frac{1}{1-\gamma} \right) \\ &= \frac{C}{\pi(\gamma - 1)} y^{-\sigma} < \infty. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Somit ist $f^*(y)$ absolut konvergent, und erfüllt mit $C_\sigma := C(\pi(\gamma - 1))^{-1}$ die Voraussetzung für Satz 3.12, was wir in (ii) benötigen.

Um die Unabhängigkeit des Integrals von σ zu zeigen, wählen wir uns $\alpha, \beta > 0$ mit $\alpha \neq \beta$ und wollen zeigen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha + it) y^{-\alpha - it} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta + it) y^{-\beta - it} dt. \tag{3.6}$$

Betrachten wir nun ein Rechteck R in der Ebene mit Rand $\partial R = \delta_1 \cup \delta_2 \cup \delta_3 \cup \delta_4$, wobei die Geraden $\alpha + it$ und $\beta + it$ gerade die zur imaginären Achse parallelen Seiten dieses Rechtecks sind (vgl. Abb. 3.1), so gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_{\partial R} f(s) y^{-s} ds = \sum_{i=1}^{4} \int_{\delta_i} f(s) y^{-s} ds = 0.$$

Wir zeigen nun, dass die Integrale über die zur reellen Achse parallelen Seiten für $a \to \infty$ bzw. $b \to -\infty$ verschwinden. Es gilt dann

$$\int_{\delta_1} f(s) y^{-s} ds = -\int_{\delta_3} f(s) y^{-s} ds,$$

woraus dann unmittelbar die Gleichung (3.6) folgt.

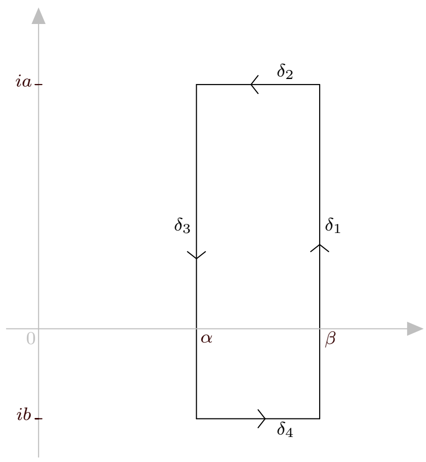

Abb. 3.1: Integrationsweg

Dazu möchten wir das Integral $\int_{\delta_2} f(s)y^{-s}ds$ geeignet abschätzen, wofür wir eine Parametrisierung von δ_2 benötigen, die wir mit

$$\delta_2(t) = \beta + t(\alpha - \beta) + ia \quad \text{für } t \in [0,1],$$

erhalten. Mit der Voraussetzung für f folgt dann

$$\begin{aligned}\int_{\delta_2} |f(s)y^{-s}ds| &= \int_0^1 \underbrace{|f(\beta + t(\alpha-\beta) + ia)|}_{\leq C(1+|a|)^{-\gamma}} \cdot \underbrace{|y^{-(\beta+t(\alpha-\beta)+ia}|}_{=y^{-(\beta+t(\alpha-\beta))}} \cdot (\alpha-\beta)dt \\ &\leq C(1+|a|)^{-\gamma} y^{-\beta}(\alpha-\beta) \int_0^1 y^{t(\beta-\alpha)}dt \longrightarrow 0 \text{ für } a \to \infty,\end{aligned}$$

da das letzte Integral offensichtlich einen endlichen Wert hat. Analog folgt

$$\int_{\delta_4} |f(s)y^{-s}ds| \longrightarrow 0 \text{ für } b \to -\infty,$$

woraus die Behauptung folgt.

(ii) Wie zu Beginn von (i) erwähnt, erfüllt f^* die Voraussetzung für Satz 3.12, somit existiert $M_{f^*}(s)$. Da $f^*(y)$ unabhängig von der Wahl von σ ist, gilt für $s' \in \mathbb{C}$ und $\alpha, \beta > 0$ mit $0 \leq \alpha < \operatorname{Re} s' < \beta$

$$\begin{aligned}M_{f^*}(s') &= \int_0^\infty f^*(y)y^{s'-1}dy = \int_0^1 f^*(y)y^{s'-1}dy + \int_1^\infty f^*(y)y^{s'-1}dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \left(\int_{-\infty}^\infty f(\alpha+it)y^{-\alpha-it}dt\right) y^{s'-1}dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_1^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(\beta+it)y^{-\beta-it}dt\right) y^{s'-1}dy\end{aligned}$$

$$\underset{(3.5)}{\overset{\uparrow}{=}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^1 y^{s'-\alpha-it-1}dy\right)f(\alpha+it)dt$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_1^{\infty} y^{s'-\beta-it-1}dy\right)f(\beta+it)dt,$$

was nach einfachen Integrationsregeln zu

$$\int_0^{\infty} f^*(y)y^{s'-1}dy = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\alpha+it)}{s'-(\alpha+it)}dt+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\beta+it)}{(\beta+it)-s'}dt\right) \tag{3.7}$$

führt.

Wir betrachten nun wieder ein Rechteck R, wie in Abb. 3.1, und wählen $\alpha, \beta > 0$ derart, dass s' in dem von α und β begrenzten Streifen liegt, d. h. $\alpha < \operatorname{Re} s' < \beta$ gilt und berechnen damit das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\frac{f(z)}{z-s'}dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{4}\int_{\delta_i}\frac{f(z)}{z-s'}dz.$$

Analog zu den Ausführungen in (i) erhalten wir, dass

$$\int_{\delta_2}\frac{f(z)}{z-s'}dz \overset{a\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \int_{\delta_4}\frac{f(z)}{z-s'}dz \overset{b\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

und damit

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\frac{f(z)}{z-s'}dz = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\delta_1}\frac{f(z)}{z-s'}dz+\int_{\delta_3}\frac{f(z)}{z-s'}dz\right),$$

was mit den Parametrisierungen

$$\delta_1(t) = \beta + i(b+t(a-b)) \quad \text{für } t\in[0,1],$$
$$\text{und } \delta_3(t) = \alpha + i(a+t(b-a)) \quad \text{für } t\in[0,1]$$

zu

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\frac{f(z)}{z-s'}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1\frac{f(\beta+i(b+t(a-b)))}{\beta+i(b+t(a-b))-s'}\cdot i(a-b)dt$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\frac{f(\alpha+i(a+t(b-a)))}{\alpha+i(a+t(b-a))-s'}\cdot i(b-a)dt$$

führt. Substituieren wir nun im ersten Integral $u := b+t(a-b)$ und im zweiten $v := a+t(b-a)$, so erhalten wir mit $dt = du/(a-b)$ bzw. $dt = dv/(b-a)$ den Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_b^a\frac{f(\beta+iu)}{(\beta+iu)-s'}du+\int_b^a\frac{f(\alpha+iv)}{s'-(\alpha+iv)}dv\right),$$

was für $a\to\infty$ und $b\to-\infty$ gleich (3.7) ist. Wir haben also nun gezeigt, dass

$$M_{f^*}(s') = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\frac{f(z)}{z-s'}dz.$$

Nach der Cauchyschen Integralformel folgt unmittelbar, da s' nach Wahl von α, β in R liegt,

$$M_{f^*}(s') = f(s'),$$

was zu zeigen war. □

In unserem Zusammenhang – zum Beweis von Satz 3.11 – benötigen wir die Mellin-Rücktransformation der Γ-Funktion, welche wir im folgenden Korollar berechnen.

Korollar 3.14 (Mellin-Integral). *Seien* σ, $\mathrm{Re}(z) > 0$. *Es gilt*

$$e^{-z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\sigma + it)}{z^{\sigma+it}}\, dt. \tag{3.8}$$

Beweis. Seien $0 < \alpha < \beta$. Exponenzieren der komplexen Stirlingschen Formel aus Satz 3.7 führt zu

$$|\Gamma(s)| \le C \cdot |e^{(s-1/2)\log s - s}|.$$

Setzt man nun $s = \sigma + it$ im Vertikalstreifen $\alpha \le \sigma \le \beta$ und berechnet den Realteil des Exponenten, so erhält man unter Berücksichtigung grundlegender Rechenregeln sowie der aus der Funktionentheorie bekannten Gleichung $\log s = \log|s| + i \arg s$ für den Hauptzweig des Logarithmus

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(\left(s - \tfrac{1}{2}\right)\log s - s\right) &= \mathrm{Re}\left(s - \tfrac{1}{2}\right)\mathrm{Re}(\log s) - \mathrm{Im}\left(s - \tfrac{1}{2}\right)\cdot \mathrm{Im}(\log s) - \sigma \\ &= \left(\sigma - \tfrac{1}{2}\right)\log|s| - t\arg s - \sigma \le \delta - \tfrac{\pi}{4}|t| \end{aligned} \tag{3.9}$$

für ein $\delta > 0$, das nur von α und β abhängt. Um dies zu zeigen, beweisen wir, dass die Ungleichungen

$$-t\arg s \le \tfrac{\delta}{2} - \tfrac{\pi}{2}|t| \tag{3.10}$$

$$\text{und}\quad \left(\sigma - \tfrac{1}{2}\right)\log|s| - \sigma \le \tfrac{\delta}{2} + \tfrac{\pi}{4}|t| \tag{3.11}$$

gelten. Damit folgt sofort (3.9).

Beginnen wir mit (3.10). Ohne Einschränkung nehmen wir $t > 0$ an (für $t = 0$ ist die Behauptung klar, für $t < 0$ analog zu beweisen). Dann folgt aus der Polardarstellung von s

$$\sigma = |s| \cdot \cos(\arg s), \quad t = |s| \cdot \sin(\arg s)$$

die Gleichung

$$\frac{\sigma}{t} = \frac{\cos(\arg s)}{\sin(\arg s)} = \cot(\arg s) \Rightarrow \arg s = \operatorname{arccot}\left(\tfrac{\sigma}{t}\right).$$

Damit folgt

$$\tfrac{\pi}{2}t - t\arg s = t\left(\tfrac{\pi}{2} - \arg s\right) = t\left(\tfrac{\pi}{2} - \operatorname{arccot}\left(\tfrac{\sigma}{t}\right)\right) = t \cdot \arctan\left(\tfrac{\sigma}{t}\right).$$

σ ist durch α und β beschränkt, also genügt es, die Beschränktheit von $t\arctan(t^{-1})$ zu zeigen, um Ungleichung (3.10) zu verifizieren. Diese folgt aber sofort aus dem Satz von l'Hôpital, denn es gilt

$$\lim_{t\to\infty} t\arctan(t^{-1}) = \lim_{t\to 0}\frac{\arctan t}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2+1} = 1.$$

Um die Ungleichung (3.11) zu beweisen, sei zunächst $\beta \geq 1$. Dann gilt aufgrund der Stetigkeit und Monotonie des reellen Logarithmus

$$-\tfrac{\pi}{4}|t| + \left(\sigma - \tfrac{1}{2}\right) \log\left(\sqrt{\sigma^2 + t^2}\right) - \sigma \leq -\tfrac{\pi}{4}|t| + \beta \log\left(\sqrt{\beta^2 + t^2}\right) \leq \tfrac{\delta}{2},$$

da der Logarithmus schwächer wächst, als jede Potenz.

Im Fall $\beta < 1$ kann das Produkt in diesem Term ein Problem darstellen, da für hinreichend kleine t negative Logarithmenwerte auftreten können, sodass mit dem Vorfaktor Vorzeichenprobleme auftreten können, sodass die letzte Abschätzung nicht mehr gilt. Beispielsweise ist dies für $\sigma < \frac{1}{2}$, $\beta > \frac{1}{2}$ der Fall:

$$\underbrace{\left(\sigma - \tfrac{1}{2}\right)}_{<0} \underbrace{\log\left(\sqrt{\sigma^2 + t^2}\right)}_{<0} > 0, \text{ aber } \underbrace{\left(\beta - \tfrac{1}{2}\right)}_{>0} \underbrace{\log\left(\sqrt{\beta^2 + t^2}\right)}_{<0} < 0.$$

Der so entstehende Fehler in der obigen Abschätzung ist jedoch aufgrund $\sigma > \alpha$ in jedem Fall beschränkt durch den Fehler, der dadurch entstehen würde, wenn wir α statt σ einsetzen, sodass man durch Addition einer Konstanten, die nur von α und β abhängt, die Ungleichung wieder verifizieren kann.

Insgesamt gilt also (3.9) und damit

$$|\Gamma(s)| \leq C \cdot e^{\delta - \pi|t|/4} \leq C(1 + |t|)^{-2},$$

womit die Voraussetzung für Satz 3.13 erfüllt ist.

Wir können also nun diesen Satz auf Γ anwenden. Um die Gleichung (3.8) zu beweisen, müssen wir also $\Gamma^*(y) = e^{-y}$ zeigen. Mittels Differentiation erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy}\Gamma^*(y) &= \frac{d}{dy}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\sigma + it) y^{-\sigma - it} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\sigma + it)(-\sigma - it) y^{-\sigma - 1 - it} dt \\
&\underset{3.7(i)}{\overset{\uparrow}{=}} -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\sigma + 1 + it) y^{-\sigma - 1 - it} dt \\
&\underset{3.13(i)}{\overset{\uparrow}{=}} -\Gamma^*(y) \qquad \Rightarrow \Gamma^*(y) = c \cdot e^{-y}.
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun Satz 3.13(ii), so folgt für $y > 0$

$$\Gamma(s) = M_{\Gamma^*}(s) \underset{3.12}{\overset{\uparrow}{=}} \int_0^{\infty} c e^{-y} y^{s-1} dy = c \int_0^{\infty} e^{-y} y^{s-1} dy \qquad \Rightarrow c = 1.$$

Es folgt also $\Gamma^*(y) = e^{-y}$. $\square$

Nach langer Vorarbeit können wir nun Satz 3.11 beweisen. Mit etwas Anwendung der Funktionentheorie erreichen wir das Resultat dank des Mellin-Integrals in wenigen Schritten.

Beweis von 3.11. Zu Beginn erarbeiten wir wieder den analytischen Zusammenhang zwischen der Dirichletreihe D, sowie der Fourierreihe f. Sei $s = \sigma + it$ mit $\sigma > \sigma_0 > 0$, wobei σ_0 die absolute Konvergenzabszisse der Dirichletreihe D bezeichnet. Mittels des Mellin-Integrals (3.8) erhalten wir

$$\begin{aligned} f(ix) - a_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{2\pi n x}{\lambda}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(s)}{\left(\frac{2\pi}{\lambda} n x\right)^s} \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\right) \frac{\Gamma(s)}{x^s} \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(s) x^{-s} dt, \end{aligned} \tag{3.12}$$

wobei R wie in (3.2) definiert ist. Es gilt

$$\left| \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\right) \Gamma(s) x^{-s} \right| \leq \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-\sigma} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma}\right) \left|\Gamma(s) x^{-s}\right| \leq C_\sigma \left|\Gamma(s) x^{-s}\right|$$

für eine Konstante $C_\sigma > 0$, die nur von σ abhängt. Nach Korollar 3.14 ist $\Gamma(s)x^{-s}$ über t integrierbar. Der Satz über die majorisierte Konvergenz erlaubt also in der vorigen Rechnung die Vertauschung von Summe und Integral.

R klingt in jedem Vertikalstreifen ab, d. h. wir können die Integrationsgerade $s = \sigma + it$ für jedes beliebige σ verschieben (die Argumentation ist hier dieselbe wie im Beweis von Satz 3.13(i)). Dabei müssen wir entsprechend die Pole $s = 0$ und $s = k$ (vgl. (3.4)) berücksichtigen. Verschieben wir σ auf $k - \sigma$, überschreiten wir beide Pole. Mit dem Residuenkalkül folgt daher

$$f(ix) - a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(k-s)}{x^{k-s}} \, dt + \operatorname{res}_{s=0} \left(\frac{R(s)}{x^s}\right) + \operatorname{res}_{s=k} \left(\frac{R(s)}{x^s}\right).$$

Weiter gilt mit $a_0 = -\operatorname{res}_{s=0}(R(s)x^{-s}) = -\operatorname{res}_{s=0} R(s)$

$$f(ix) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(k-s)}{x^{k-s}} \, dt + \operatorname{res}_{s=k} \left(\frac{R(s)}{x^s}\right). \tag{3.13}$$

Aus der Funktionalgleichung (3.2) erhalten wir nun die Funktionalgleichung für f, denn es gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon x^{-k} f\left(\frac{i}{x}\right) &\underset{(3.13)}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon R(k-s)}{x^s} \, dt + \operatorname{res}_{s=k} \left(\frac{\varepsilon R(s)}{x^{k-s}}\right) \\ &\underset{(3.2)}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(s) x^{-s} dt + \operatorname{res}_{s=k} \left(\frac{R(k-s)}{x^{k-s}}\right) \\ &\underset{(3.12)}{\overset{\uparrow}{=}} f(ix) - a_0 + \operatorname{res}_{s=k} \left(\frac{R(k-s)}{x^{k-s}}\right). \end{aligned}$$

Nach (3.2) ist das Residuum von $R(s)x^{-s}$ an der Stelle $s = 0$ gleich dem Residuum von $R(k-s)x^{k-s}$ an der Stelle $s = k$, jedoch mit alterniertem Vorzeichen, so dass sich die beiden letzten Summanden aufheben und wir haben

$$f(i/x) = \varepsilon x^k f(ix). \tag{3.14}$$

Aufgrund Definition 3.3(i) wachsen die Fourier-Koeffizienten a_n höchstens polynomial, die Fourierreihe f ist also holomorph und mit dem Identitätssatz aus der Funktionentheorie folgt somit durch analytische Fortsetzung die Funktionalgleichung

$$f\left(-\tfrac{1}{\tau}\right) = \varepsilon \left(\tfrac{\tau}{i}\right)^k f(\tau).$$

Die geforderte Periodizität $f(\tau+\lambda) = f(\tau)$ erhalten wir sofort aus der Definition von f und der Periodizität der Exponentialfunktion. □

Kapitel 4

Eigenformen der Hecke-Operatoren

An dieser Stelle möchten wir nun wieder den in Kapitel 1 eingeführten Raum der ganzen Modulformen $\mathbb{M}_k$ für gerades $k \in \mathbb{Z}$ betrachten. Wie wir im vorigen Kapitel gesehen haben, entspricht $\mathbb{M}_k$ dem Raum $[1, k, i^k]$ aus Definition 3.1 und damit jede ganze Modulform genau einer bestimmten Dirichletreihe der Signatur $\{1, k, i^k\}$. Nach Kapitel 2 kann man Dirichletreihen mit multiplikativen Koeffizientenfolgen in ein Euler-Produkt entwickeln. Wir möchten hier nun die drei vorigen Kapitel zusammenführen, indem wir nach den Modulformen aus $\mathbb{M}_k$ suchen, deren Dirichletreihen in ein Euler-Produkt entwickelbar sind. Die in Kapitel 1 eingeführten Hecke-Operatoren spielen dabei eine besonders wichtige Rolle.

4.1 Simultane Eigenformen

Definition 4.1. Eine Funktion $f \in \mathbb{M}_k \backslash \{0\}$ heißt *Eigenform bezüglich T_n zum Eigenwert $\lambda_f(n) \in \mathbb{C}$*, falls

$$T_n f = \lambda_f(n) \cdot f.$$

Ist f eine Eigenform bezüglich aller Hecke-Operatoren T_n, so heißt f *simultane Eigenform.*

Lemma 4.2. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $f \in \mathbb{M}_k \setminus \{0\}$ *ist eine simultane Eigenform zu den Eigenwerten* $\lambda_f(n)$.

(ii) Die Fourier-Koeffizienten von f genügen der Gleichung

$$\lambda_f(n) \cdot \alpha_f(m) = \alpha_{T_n f}(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \cdot \alpha_f\left(\frac{mn}{d^2}\right) \quad \textit{für alle } m, n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Folgt aus Satz 1.4(ii) durch Koeffizientenvergleich. □

Korollar 4.3 ([KK07]). *Sei $f \in \mathbb{M}_k$ nicht-konstant. Dann sind äquivalent:*

(i) f *ist eine simultane Eigenform.*

(ii) Es ist $\alpha_f(1) \neq 0$ *und es gilt*

$$\alpha_f(m)\alpha_f(n) = \alpha_f(1) \cdot \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \cdot \alpha_f\left(\frac{mn}{d^2}\right) \quad \textit{für alle } m \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Die Eigenwerte berechnen sich dann mittels $\lambda_f(n) = \frac{\alpha_f(n)}{\alpha_f(1)}$ *und es gilt die wichtige Gleichung*

$$\alpha_f(mn) = \alpha_f(m) \cdot \alpha_f(n) \cdot \alpha_f(1)^{-1} \tag{4.1}$$

für $(m, n) = 1$.

Beweis. Betrachtet man das vorige Lemma für den Fall $m = 1$, so erhalten wir auf der rechten Seite nur den Summanden mit $d = 1$ und somit $\alpha_f(n)$, folglich die Gleichung

$$\lambda_f(n) \cdot \alpha_f(1) = \alpha_f(n).$$

Angenommen, $\alpha_f(1) = 0$. Aus der letzten Gleichung folgt, $\alpha_f(n) = 0$ für alle n, was bedeuten würde, dass f die Nullfunktion wäre. Die zu zeigenden Gleichungen folgen dann aus dem vorigen Lemma. □

Nach diesem Korollar ist für jede simultane Eigenform f der erste Fourier-Koeffizient invertierbar, d. h. durch Multiplikation mit einer Konstanten können wir $\alpha_f(1) = 1$ erreichen.

Definition 4.4. Eine simultane Eigenform $f \in \mathbb{M}_k$ mit $\alpha_f(1) = 1$ heißt *Hecke-Eigenform.*

Die Gleichung (4.1) bedeutet dann gerade, dass die Fourier-Koeffizienten von Hecke-Eigenformen multiplikativ sind.

Lemma 4.5. *Sei* $f \in \mathbb{M}_k$ *eine Hecke-Eigenform. Dann gilt für* $n \geq 1$ *und* p *eine Primzahl*

$$\alpha_f(p)\alpha_f(p^n) = \alpha_f(p^{n+1}) + p^{k-1}\alpha_f(p^{n-1}).$$

Beweis. Mit dem vorigen Korollar gilt

$$T_n f = \lambda_f(n) \cdot f = \alpha_f(n) \cdot f.$$

Die Rekursionsformel der Hecke-Operatoren (Satz 1.8) überträgt sich somit direkt auf die Fourier-Koeffizienten von f. □

Wie angekündigt, können wir nun den Bogen, der sich über diese Arbeit spannt, schließen, indem wir mit dem folgenden fundamentalen Satz von Erich Hecke die vorigen drei Kapitel zusammenführen. Daran wird deutlich, welchen Stellenwert die Hecke-Operatoren in der Theorie der Modulformen inne haben.

Satz 4.6 ([Hec37]). *Die Hecke-Eigenformen $f \in \mathbb{M}_k$ sind bis auf konstante Faktoren und additive Konstanten identisch mit denjenigen Potenzreihen, deren Dirichletreihen ein Euler-Produkt der Gestalt*

$$\prod_{p \text{ prim}} (1 - \alpha_f(p)p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1}$$

besitzen.

Beweis. Zuerst verifizieren wir die Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_f(p^n)p^{-ns} = (1 - \alpha_f(p)p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1}. \tag{4.2}$$

Unter Zuhilfenahme von Lemma 4.5 erhalten wir über Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_f(p^n)p^{-ns}\right) \left(1 - \alpha_f(p)p^{-s} + p^{k-1-2s}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_f(p^n)p^{-ns} - \alpha_f(p)\alpha_f(p^n)p^{-(n+1)s} + \alpha_f(p^n)p^{k-1-(n+2)s} \\
&= 1 - \alpha_f(p)p^{-s} + p^{k-1-2s} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_f(p^n)p^{-ns} - \alpha_f(p)\alpha_f(p^n)p^{-(n+1)s} \\
&\quad + \alpha_f(p^n)p^{k-1-(n+2)s} \\
&= 1 - \alpha_f(p)p^{-s} + p^{k-1-2s} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_f(p^n)p^{-ns} - \left(\alpha_f(p^{n+1}) + p^{k-1}\alpha_f(p^{n-1})\right) p^{-(n+1)s} \\
&\quad + \alpha_f(p^n)p^{k-1-(n+2)s} \\
&= 1 - \alpha_f(p)p^{-s} + p^{k-1-2s} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_f(p^n)p^{-ns} - \alpha_f(p^{n+1})p^{-(n+1)s} \\
&\quad - p^{k-1}\left(\alpha_f(p^{n-1}p^{-(n+1)s} - \alpha_f(p^n)p^{-(n+2)s}\right) \\
&= 1 - \alpha_f(p)p^{-s} + p^{k-1-2s} + \alpha_f(p^1)p^{-1s} - p^{k-1}\left(\alpha_f(p^{1-1})p^{-(1+1)s}\right) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

da sich alle aufeinanderfolgenden Summanden gegenseitig aufheben und es folgt (4.2).

„$\Rightarrow$“ Sei $f \in \mathbb{M}_k$ eine Hecke-Eigenform. Aus (4.1) folgt dann sofort die Multiplikativität der Fourier-Koeffizienten.

Betrachten wir nun die zu f gemäß Kapitel 3 zugeordnete Dirichletreihe $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_f(n)n^{-s}$, so gilt mit Korollar 2.10 für $\operatorname{Re} s > k$ (Lemma 3.9)

$$D(s) = \prod_{p \text{ prim}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_f(p^n)}{p^{ns}}$$

und mit der Gleichung (4.2) folgt die Behauptung.

„$\Leftarrow$“ Seien $r, N \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\{p_1, \ldots, p_r\}$ die Primzahlen, die kleiner als N sind. Betrachten wir nun das Produkt

$$\prod_{\substack{p \text{ prim}, \\ p<N}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_f(p^l) p^{-ls} \right).$$

Analog zum Beweis von Satz 2.9 können wir ausmultiplizieren und umordnen und erhalten den Ausdruck

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_r=0}^{\infty} \alpha_f(p_1^{n_1}) \cdot \ldots \cdot \alpha_f(p_r^{n_r})(p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r})^{-s}.$$

Dieser Ausdruck stellt im Limes $N \to \infty$ eine Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \beta(n) n^{-s}$ mit $\beta(n) = \prod_{i=1}^{M} \alpha_f(p_i^{\nu_i})$ dar, wobei $n = \prod_{i=1}^{M} p_i^{\nu_i}$ die Primfaktorzerlegung von $n \in \mathbb{N}$ ist. Nach Voraussetzung gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_f(n) n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta(n) n^{-s}$$

und mit dem Identitätssatz für Dirichletreihen (Satz V) folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \alpha_f(n) &= \beta(n) \Leftrightarrow \\ \alpha_f\left(\prod_{i=1}^{M} p_i^{\nu_i}\right) &= \prod_{i=1}^{M} \alpha_f(p_i^{\nu_i}), \end{aligned}$$

also die Multiplikativität. Mit Korollar 4.3 folgt nun, dass f eine simultane Eigenform ist. □

4.2 Die Eisensteinreihen und die Diskriminante als simultane Eigenformen

Zum Abschluss möchten wir noch zwei wichtige Beispiele von Hecke-Eigenformen geben. Wir werden sehen, dass es nur eine Klasse von Hecke-Eigenformen gibt, die nicht Spitzenformen sind: Die normierten *Eisensteinreihen*. Um die Theorie der Eisensteinreihen umfassend verstehen zu können, benötigt man etwas Vorkenntnis. Dem interessierten Leser seien dazu die Bücher [KK07], [Dei10] oder [FB00] empfohlen. In dieser Arbeit sollte nur ein kurzer Einblick gegeben werden.

Darüber hinaus betrachten wir eine Spitzenform vom Gewicht 12, die *Diskriminante*. Die Koeffizienten der Fourierentwicklung der Diskriminante bilden die sogenannte *Ramanujansche τ-Funktion*. Srinivasa Ramanujan vermutete, dass diese Funktion multiplikativ ist, was Louis J. Mordell 1917 in seinem Werk „On Mr. Ramanujan's empirical expansions of modular functions" beweisen konnte, indem er gewisse Operatoren T_n benutzte – die 1937 von Erich Hecke näher untersuchten Hecke-Operatoren. Wir zeigen, dass die Multiplikativität der τ-Funktion aus dem Sachverhalt folgt, dass die Diskriminante eine Hecke-Eigenform ist.

Über die τ-Funktion bestehen heute noch viele Rätsel. So ist weder eine einfache Definition für sie bekannt noch die Frage geklärt, ob die Funktion natürliche Nullstellen besitzt (*Lehmersche Vermutung*).

Definition 4.7. Sei $k \geq 4$ und gerade. Definiere dann für $\tau \in \mathbb{H}$ die *Eisensteinreihe*

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(m)e^{2\pi i m\tau},$$

wobei ζ die Riemannsche ζ-Funktion und σ_{k-1} die verallgemeinerte Teilersummenfunktion (vgl. Beispiel 2.2) bezeichnet. Der erste Fourier-Koeffizient beträgt hier $2(2\pi i)^k/(k-1)!$, sodass die Reihen

$$G_k^* = \frac{(k-1)!}{2(2\pi i)^k}G_k$$

normierte Eisensteinreihen genannt werden.

Bemerkung 4.8. Die Eisensteinreihen sind ganze Modulformen vom Gewicht k (ohne Beweis) und in der Theorie der Modulformen von enormer Bedeutung.

Satz 4.9 ([Hec37], vgl. [Apo90])**.** *G_k^* ist die einzige Hecke-Eigenform in $\mathbb{M}_k \setminus \mathbb{S}_k$ für gerades $k \geq 4$. Die Eigenwerte sind für $n \in \mathbb{N}$ durch die Zahlen $\sigma_{k-1}(n)$ gegeben.*

Insbesondere gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)n^{-s} = \zeta(s)\zeta(s+1-k). \tag{4.3}$$

Beweis. Sei $f \in \mathbb{M}_k \setminus \mathbb{S}_k$. Wir betrachten zuerst einen Spezialfall von Satz 1.4(ii), den wir gleich benötigen werden. Für $m = 0$ folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha_{T_n f}(0) = \sum_{d|(0,n)} d^{k-1}\alpha_f\left(\frac{0\cdot n}{d^2}\right) \underset{(0,n)=n}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_{d|n} d^{k-1}\alpha_f(0) = \sigma_{k-1}(n)\alpha_f(0) \tag{4.4}$$

Nach Lemma 4.2 gilt für alle $m \in \mathbb{N}_0$

$$T_n f = \lambda(n)f \Leftrightarrow \alpha_{T_n f}(m) = \lambda(n)\alpha_f(m).$$

Aufgrund von (4.4) gilt für $m = 0$

$$\lambda(n)\alpha_f(0) = \sigma_{k-1}\alpha_f(0)$$

und daraus folgt mit $\alpha_f(0) \neq 0$ (da $f \notin \mathbb{S}_k$) sofort mit (4.2)

$$T_n f = \lambda(n) f \Leftrightarrow \lambda(n) = \sigma_{k-1}(n).$$

Mit Korollar 4.3 folgt dann also

$$f \text{ ist Hecke-Eigenform} \Leftrightarrow \alpha_f(n) = \lambda(n)\alpha_f(1) = \sigma_{k-1}(n), \tag{4.5}$$

sodass mit

$$\alpha_{G_k^*}(n) = \sigma_{k-1}(n), \quad \alpha_{G_k^*}(1) = \sigma_0(1) = 1 \tag{4.6}$$

$$\text{und } \alpha_{G_k^*}(0) = \frac{(k-1)!}{(2\pi i)^k}\zeta(k) \neq 0 \tag{4.7}$$

folgt, dass $G_k^* \in \mathbb{M}_k \setminus \mathbb{S}_k$ eine Hecke-Eigenform ist.

Es bleibt also zu zeigen, dass G_k^* die einzige Hecke-Eigenform ist. Dies ist allerdings klar, denn sei $f \in \mathbb{M}_k \setminus \mathbb{S}_k$ eine weitere Hecke-Eigenform, so stimmen nach (4.5) alle Koeffizienten für $n \geq 1$ der Fourierentwicklung überein, d. h. $G_k^* - f = \alpha_{G_k^*}(0) - \alpha_f(0)$, also konstant. Für $k > 0$ gibt es aber aufgrund Definition 1.1(ii) keine konstante Modulform außer der Nullfunktion, somit folgt $G_k^* = f$. Die Gleichung (4.3) folgt sofort aus Satz 4.6 und Beispiel 2.11.1. □

Definition 4.10. Wir definieren für $\tau \in \mathbb{H}$ die *Diskriminante* als

$$\Delta(\tau) = (60G_4)^3 - 27(140G_6)^2.$$

Man kann zeigen, dass die Diskriminante eine Spitzenform vom Gewicht 12 ist und eine Fourierentwicklung der Form

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}$$

besitzt, wobei $\tau(m) \in \mathbb{Z}$ für alle m und $\tau(1) = 1$. Wie bei den Eisensteinreihen möchten wir auch hier eine normierte Version der Diskriminante betrachten, es heißt

$$\Delta^* = (2\pi)^{-12}\Delta$$

die *normierte Diskriminante.*

Bemerkung 4.11. Man kann mit Methoden aus der Theorie der Modulformen zeigen, dass $\mathbb{S}_k = \{0\}$ für $k \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Die Diskriminante ist somit die erste auftretende Spitzenform. Darüber hinaus ist sie die einzige Spitzenform von Gewicht 12.

Satz 4.12. *Die normierte Diskriminante ist eine Hecke-Eigenform, insbesondere ist die Ramanunjansche τ-Funktion multiplikativ und es gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) n^{-s} = \prod_{p \text{ prim}} (1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11-2s})^{-1}. \tag{4.8}$$

Beweis. Nach Satz 1.4(iii) bilden die Hecke-Operatoren Spitzenformen in sich ab. Da Δ die einzige Spitzenform vom Gewicht 12 ist, ist Δ eine simultane Eigenform. Aufgrund $\tau(1) = 1$ ist Δ eine Hecke-Eigenform. Die Multiplikativitätsaussage folgt dann aus Korollar 4.3, die Entwicklung in ein Euler-Produkt folgt aus Satz 4.6. $\square$

Anhang

Lemma I. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd mit $m = ad$ und $n = a'd'$ für $a, a', d, d' \in \mathbb{Z}$. Durchlaufen b und b' je ein volles Restsystem modulo d bzw. d', so durchläuft $ba' + b'd$ ein volles Restsystem modulo dd'.*

Beweis. Wir zeigen, dass die Zahlen $ba' + b'd$ genau dd' inkongruente Zahlen modulo dd' beschreiben. Da die Zahlen b bzw. b' genau d bzw. d' verschiedene Zahlen beschreiben, gibt es dd' verschiedene Zahlen der Form $ba' + b'd$.

Aus der Darstellung $b_1a' + b_1'd \equiv b_2a' + b_2'd \mod dd'$ für Zahlen b_1, b_1' aus einem Restsystem modulo d und b_2, b_2' aus einem Restsystem modulo d' folgt

$$\begin{aligned} a'(b_1 - b_2) + d(b_1' - b_2') &\equiv 0 \mod dd' \qquad \text{(A.1)} \\ \Rightarrow a'b_1 &\equiv a'b_2 \mod d. \end{aligned}$$

Aus $(m, n) = (ad, a'd') = 1$ folgt $(d, a') = 1$, so dass nach grundlegenden Regeln der Zahlentheorie $b_1 \equiv b_2 \mod d$ gilt. Da b_1 und b_2 aus demselben Restsystem sind, folgt $b_1 = b_2$. Setzen wir dies nun in Gleichung (A.1) ein, so folgt sofort $b_1'd \equiv b_2'd \mod dd'$, also $b_1' \equiv b_2' \mod d'$. Da auch b_1' und b_2' aus demselben Restsystem sind, folgt $b_1' = b_2'$. In der Darstellung $ba' + b'd$ folgt also aus Kongruenz die Gleichheit. Nach oben gibt es dd' verschiedene Zahlen dieser Form, folglich sind diese inkongruent. □

Lemma II. *Sei $i \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl. b_i durchlaufe ein volles Restsystem modulo p^i und b ein volles Restsystem modulo p. Dann gelten*

(a) $b_i + bp^i$ durchläuft ein volles Restsystem modulo p^{i+1},

(b) b_i durchläuft ein Restsystem modulo p^{i-1} genau p-mal.

Beweis.

(a) Vollkommen analog zu Lemma I.

(b) Sei $A = \{a_1, \ldots, a_{p^i}\}$ das Restsystem modulo p^i, das b_i durchläuft und sei $C = \{c_1, \ldots, c_p\}$ das Restsystem modulo p, das b durchläuft. Durchläuft nun a_i ein Restsystem modulo p^{i-1}, so erhalten wir nach (a), dass

$$A' := \{a_i + c_jp^{i-1} \mid 1 \leq j \leq p\}$$

ein Restsystem modulo p^i ist.

Jedes Element aus A' ist also zu genau einem Element aus A kongruent modulo p^i. Für $a \in A$ wird aus der Darstellung

$$a_i + c_j p^{i-1} \equiv a \bmod p^i \text{ für } 1 \leq j \leq p$$

deutlich, dass es genau p Elemente gibt, zu denen a kongruent modulo p^i ist. b_i durchläuft das Restsystem modulo p^{i-1} also genau p-mal.

Lemma III. *Die Eulersche φ-Funktion ist multiplikativ, d. h. es gilt für $(m,n) = 1$*

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Beweis. Durchläuft a die zu m teilerfremden Zahlen, die kleiner als m sind und b die zu n teilerfremden Zahlen, die kleiner als n sind, so durchläuft $an + bm$ die zu mn teilerfremden Zahlen, die kleiner als mn sind. Denn es gilt

$$(an + bm, mn) = 1 \Leftrightarrow (a,m) = (b,n) = 1$$

und für zwei kongruente Zahlen $an + bm \equiv a'n + b'm \bmod mn$ mit a', b' mit $a' \leq m$, $b' \leq n$ folgt

$$\begin{aligned} n(a-a') + m(b-b') \equiv 0 \bmod mn &\Leftrightarrow an \equiv a'n \bmod m \quad \text{und} \quad bm \equiv b'm \bmod n \\ &\underset{(m,n)=1}{\overset{}{\underset{\uparrow}{\Leftrightarrow}}} a \equiv a' \bmod m \quad \text{und} \quad b \equiv b' \bmod n \\ &\Leftrightarrow a = a' \quad \text{und} \quad b = b'. \end{aligned}$$

Es gibt $\varphi(m)$ zu m teilerfremde Zahlen, die kleiner als m sind und $\varphi(n)$ zu n teilerfremde Zahlen, die kleiner als n sind, somit gibt es genau $\varphi(m)\varphi(n)$ Zahlen der obigen Form $an+bm$, somit ist die Behauptung bewiesen. □

Lemma IV. *Die absolute Konvergenzabszisse der Riemannschen ζ-Fuktion*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ist $\sigma_0 = 1$.

Beweis. Es gilt mit dem Integralkriterium zur Konvergenz von Reihen ($s = \sigma + it$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n^{-s}| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} \text{ konvergent } \Leftrightarrow \int_1^{\infty} x^{-\sigma} dx \text{ ist endlich.}$$

Für $\sigma \neq 1$ gilt

$$\int_1^{\infty} x^{-\sigma} dx = \left[\frac{1}{1-\sigma} x^{1-\sigma}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{1-\sigma},$$

falls $\sigma > 1$. Für $\sigma < 1$ konvergiert das Integral gegen ∞ und für $\sigma = 1$ erhalten wir

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^{\infty} \to \infty.$$

Mit Satz 2.5 folgt die Behauptung. □

Satz V (**Identitätssatz für Dirichletreihen**, vgl. [Mü04]). *Seien $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ und $E(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$ Dirichletreihen mit absoluter Konvergenzabzisse σ_0 und τ_0. Es gelte $D(\sigma) = E(\sigma)$ für alle hinreichend großen $\sigma \in \mathbb{R}$. Dann gilt $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Betrachte die Dirichletreihe $F(s) = D(s) - E(s) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)n^{-s}$. Nach Voraussetzung gilt $F(\sigma) = 0$ für alle hinreichend großen $\sigma \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist nun $c_n := a_n - b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Angenommen, $c_n \neq 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Sei dann $m \in \mathbb{N}$ minimal, so dass $c_m \neq 0$. Für alle hinreichend großen σ gilt also nun

$$0 = F(\sigma) = F(\sigma)m^{\sigma} = \sum_{n=m}^{\infty} c_n \left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma} = c_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n \left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma}. \tag{A.2}$$

Betrachten wir nun die letzte Summe. Sei dazu $\beta > \max\{\sigma_0, \tau_0\}$. Da $F(\beta)$ absolut konvergiert, existiert ein $C \in \mathbb{R}$ mit $|c_n| \leq C \cdot n^{\beta}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $\sigma > \beta + 1$ folgt nun mit dem Integralvergleichskriterium

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=m+1}^{\infty} c_n \left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma}\right| &\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |c_n| \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma} \leq Cm^{\sigma} \sum_{n=m+1}^{\infty} n^{\beta-\sigma} \\ &\leq Cm^{\sigma} \int_m^{\infty} x^{\beta-\sigma} dx = Cm^{\sigma} \left[\frac{x^{\beta-\sigma+1}}{\beta-\sigma+1}\right]_0^{\infty} \\ &= Cm^{\sigma} \left(\frac{m^{\beta-\sigma+1}}{\sigma-\beta-1}\right) = C\frac{m^{\beta+1}}{\sigma-\beta-1} \overset{\sigma\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Setzen wir dies nun in (A.2) ein, so folgt $c_m = 0$, ein Widerspruch. $\square$

Literatur

[Apo76] Tom M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory.* New York, Heidelberg, Berlin: Springer, 1976.

[Apo90] Tom M. Apostol. *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory.* 2. Aufl. New York, Berlin, Heidelberg: Springer, 1990.

[Brü95] Jörg Brüdern. *Einführung in die analytische Zahlentheorie.* Berlin, Heidelberg: Springer, 1995.

[Dei10] Anton Deitmar. *Automorphe Formen.* Berlin, Heidelberg: Springer, 2010.

[FB00] Eberhard Freitag und Rolf Busam. *Funktionentheorie 1.* 3. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2000.

[Ham21] Hans Hamburger. „Über die Riemannsche Funktionalgleichung der Zeta-Funktion“. In: *Mathematische Zeitschrift* 10 (1921), S. 240–254.

[Hec36] Erich Hecke. „Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung“. In: *Mathematische Annalen* 112 (1936), S. 664–699.

[Hec37] Erich Hecke. „Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung“. In: *Mathematische Annalen* 114 (1937), S. 1–28.

[IK04] Henryk Iwaniec und Emmanuel Kowalski. *Analytic Number Theory.* Providence: American Mathematical Society, 2004.

[KK07] Max Koecher und Aloys Krieg. *Elliptische Funktionen und Modulformen.* 2. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007.

[Mü04] Peter Müller. *Analytische Zahlentheorie.* Vorlesungsskript. 2004/2005. URL: http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~mueller/Teach/az.pdf.

[Mor17] Louis J. Mordell. „On Mr. Ramanujan’s empirical expansions of modular functions“. In: *Proc. Cambridge Phil. Society* 19 (1917), S. 117–124.

[Rem95] Reinhold Remmert. *Funktionentheorie 2.* 2. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1995.

[Wil95] Andrew Wiles. „Modular Elliptic Curves and Fermat’s last theorem“. In: *Annals of Mathematics* 142 (1995), S. 443–551.

Versicherung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbst verfasst habe. Ich habe mich keiner anderen als der von mir ausdrücklich bezeichneten Quellen bedient. Die Arbeit in vorliegender oder ähnlicher Form habe ich noch nie zu Prüfungszwecken vorgelegt.

Marburg, den 10. September 2013