Vortrag im Proseminar „Graphen und Matrizen“

Nichtsinguläre und positiv definite Vervollständigung

Lukas Haag

29. 06. 2011
Prof. Dr. István Heckenberger

Das Ziel dieses Vortrags ist die Lösung zweier Probleme: Gegeben ist eine Matrix, die nicht vollständig definiert ist.

Wie kann ich die nicht definierten Einträge wählen, so dass die Matrix

1. nicht-singulär, also invertierbar bzw.
2. positiv (semi-)definit ist?

Diese Fragen lassen sich mit Hilfe von Graphen beantworten, wie wir sehen werden.

Dieser Vortrag basiert auf dem 11. Kapitel von [Bap10].

1. Nichtsinguläre Vervollständigung

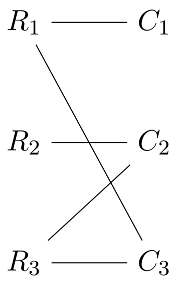
Sei G ein bipartiter Graph mit der Bipartition (R, C), wobei $R = (R_1, \dots, R_n)$ und $C = (C_1, \dots, C_n)$.

1.1 Definition. Eine Matrix $A \in M_n(K)$ heißt *G-partiell*, wenn der Eintrag a_{ij} genau dann definiert ist, wenn $R_i \sim C_j$.

Definieren wir die nicht angegebenen Einträge, so heißt dies *Vervollständigung*.

G heißt *nichtsingulär vervollständigbar*, wenn sich alle G-partielle Matrizen zu einer nicht-singulären Matrix vervollständigen lassen.

1.2 Beispiel.

$G =$ 

$$A = \begin{pmatrix} 2 & ? & 9 \\ ? & -4 & ? \\ ? & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

1.3 Satz. *G ist genau dann nichtsingulär vervollständigbar, wenn G^c eine perfekte Paarung hat.*

Beweis:

(⇐): Angenommen, G^c besitzt eine perfekte Paarung, welche durch die Kanten $(R_i, C_{\sigma(i)})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ beschrieben wird. Sei A eine G-partielle Matrix.

Sei $A(x)$ die Matrix, die dadurch entsteht, dass man den $(R_i, C_{\sigma(i)})$-ten Eintrag von A durch x ersetzt und die anderen undefinierten Einträge gleich Null setzt.

$\det A(x)$ ist ein Polynom n-ten Grades. $\det A(x) \neq 0$ für ein x, also ist $A(x)$ nichtsingulär.

(⇒): Indirekt. Angenommen, G^c besitzt keine perfekte Paarung. Dann gibt es eine Knotenüberdeckung[i] mit weniger Elementen als n.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit bilden die Knoten $R_1, \ldots, R_k$ und $C_1, \ldots, C_l$, $k + l < n$, eine Knotenüberdeckung von G^c.

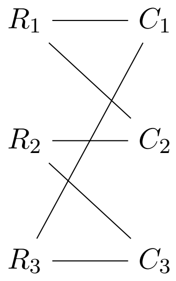
Sei $A \in M_n(K)$ die G-partielle Matrix, in der $a_{ij} = 0$, falls $R_i \sim C_j$ in G. Dann ist die Untermatrix, welche von den Zeilen $k+1, \ldots, n$ und den Spalten $l+1, \ldots, n$ gebildet wird, die Nullmatrix.

Sei B eine beliebige Vervollständigung von A. Mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz folgt $\det B = 0$ (da $k + l < n$) und damit, dass G nicht nichtsingulär vervollständigbar ist. q. e. d.

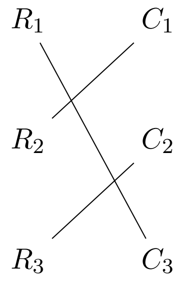
[i] Eine Menge von Knoten, so dass jede Kante des Graphen zu einem Knoten in der Knotenüberdeckung inzident ist.

1.4 Beispiel.

$G =$



Dann ist $G^c =$



G^c hat also eine perfekte Paarung $(R_1, C_3), (R_2, C_1), (R_3, C_2)$.

Dann ist $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}$ und $\det A = x^3 \neq 0$ für alle $x \neq 0$, d.h. A ist nichtsingulär vervollständigbar.

2. Chordale Graphen

Sei G ein Graph mit $V(G) = \{1, \ldots, n\}$.

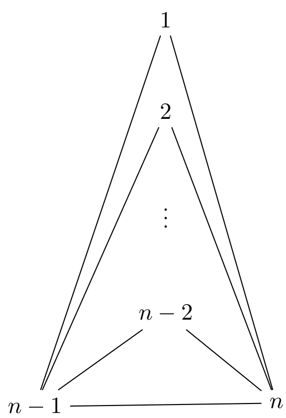
2.1 Definition. Ein zusammenhängender Graph G heißt *chordal* oder *trianguliert*, wenn kein Kreis C_k mit Länge $k \geq 4$ als Untergraph induziert werden kann.

Mit anderen Worten: Jeder Kreis C_k, $k \geq 4$ in G besitzt eine Kante, die durch das Kreisinnere verläuft.

2.2 Beispiel.

(1) Sterne und Bäume, sowie Threshold-Graphen (vgl. Vortrag letzte Woche).

(2)



2.3 Definition. Eine Permutation $i_1, \dots, i_n$ der Knoten $1, \dots, n$ heißt *perfektes Eliminationsschema*, wenn für alle $j \in \{1, \dots, n-1\}$ der induzierte Untergraph $\{i_k : k > j,\ i_k \sim i_j\}$ eine Clique[ii] ist.

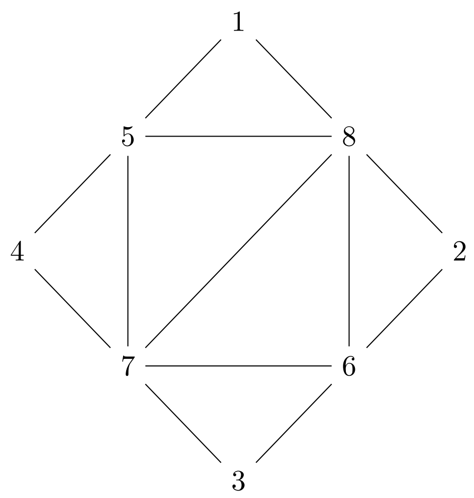
2.4 Satz. *Ein Graph ist genau dann chordal, wenn seine Knoten ein perfektes Eliminationsschema aufweisen.*

Beweis: Skizze, *vgl.* [Bra09]:

(⇒): per Induktion über $|V(G)|$.

(⇐): indirekt. Angenommen, G besitzt einen Kreis K mit Länge ≥ 4 und V_i der Knoten aus K mit dem kleinsten Index im Eliminationsschema. Dann muss es eine Kante zwischen den beiden Nachbarknoten von V_i in K geben, Widerspruch.

2.5 Beispiel. Folgender Graph ist chordal und hat mit $1, 2, \dots, 8$ ein perfektes Eliminationsschema.



2.6 Definition. Eine Clique in einem Graph G heißt *maximal*, wenn man ihr keinen weiteren Knoten aus G hinzufügen kann, so dass sie weiterhin eine Clique ist.

2.7 Lemma. *Angenommen, G ist chordal. Sei $e = \{i, j\}$ eine Kante von G, so dass $G \backslash \{e\}$ immer noch chordal ist.*

Dann bilden die Knoten i und j zusammen mit den Knoten, die zu beiden adjazent sind, eine maximale Clique.

[ii]vollständiger Graph

Beweis: Sei H der Untergraph, der durch die Knoten i, j, sowie den Knoten, die zu beiden adjazent sind, induziert wird. Seien u und v verschiedene Knoten, die zu i und j adjazent sind. Dann gilt $u \sim v$. Ansonsten würden i, j, u, v einen 4-knotigen Kreis in $G \backslash \{e\}$ induzieren $\hookrightarrow$ Widerspruch zu $G \backslash \{e\}$ chordal.

Es folgt, dass H eine Clique ist, die i und j enthält. Ferner ist H maximal, da es keine Clique H' gibt, die H enthält. q. e. d.

2.8 Lemma. *Sei $G \neq K_n$[iii] und chordal.*

Dann existieren $i, j \in V(G)$ derart, dass $i \not\sim j$ und der Graph $H = G + \{i, j\}$ chordal ist.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $1, 2, \ldots, n$ ein perfektes Eliminationsschema von $V(G)$. Sei i die größte Zahl, so dass der induzierte Untergraph $\{i, i+1, \ldots, n\}$ keine Clique ist (dies gibt es, da $G \neq K_n$). Dann gibt es $j > i$, $j \not\sim i$. Sei $H = G + \{i, j\}$. Dann ist $1, 2, \ldots, n$ ebenfalls ein perfektes Eliminationsschema von $H \Rightarrow H$ ist chordal. q. e. d.

3. Positiv definite Vervollständigung

3.1 Definition. Sei $A \in M_n(K)$ derart, dass einige Einträge definiert sind, andere nicht. Wenn für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, die definiert sind, $a_{ij} = a_{ji}$ gilt, heißt A *partiell symmetrisch*. Die Diagonaleinträge sind alle definiert.

A heißt *partiell positiv definit (bzw. semidefinit)*, wenn alle vollständig definierten Minoren größer Null (bzw. größer oder gleich Null) sind.

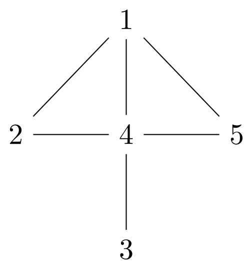
Der Graph mit $i \sim j \Leftrightarrow a_{ij}$ ist definiert, $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ heißt *Spezifikationsgraph* G_A $(V(G_A) = \{1, \ldots, n\})$.

3.2 Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & ? & -1 & 0 \\ 1 & 3 & ? & 1 & ? \\ ? & ? & 2 & 0 & ? \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & ? & ? & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A ist partiell positiv definit.

[iii] K_n ist der vollständige Graph



3.3 Definition. Sei G ein Graph.

G heißt *positiv (semi-)definit vervollständigbar*, wenn man jede partiell positive Matrix A mit Spezifikationsgraphen G zu einer positiv (semi-)definiten Matrix vervollständigen kann.

3.4 Lemma. *Ein Graph G ist genau dann positiv definit vervollständigbar, wenn er positiv semidefinit vervollständigbar ist.*

Beweis:

(($\Leftarrow$): Angenommen, G ist positiv semidefinit vervollständigbar. Sei A eine partiell positiv definite Matrix mit Spezifikationsgraph G.

Dann $\exists \varepsilon > 0$ so dass $B = A - \varepsilon E_n$ partiell positiv definit ist. Der Spezifikationsgraph von B ist ebenfalls $G \Rightarrow B$ kann man zu einer positiv semidefiniten Matrix $\tilde{B}$ vervollständigen.

Dann ist $\tilde{A} = \tilde{B} + \varepsilon E_n$ eine positiv definite Vervollständigung von A, das heißt G ist positiv definit vervollständigbar.

($\Rightarrow$): Angenommen, G ist positiv definit vervollständigbar. Sei A eine partiell positiv semidefinite Matrix. Sei $B_k = A + \frac{1}{k} E_n \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Dann ist B_k eine partiell positiv definite Matrix und daher auch zu einer positiv definiten Matrix $\tilde{B_k}$ vervollständigbar. Die nicht-diagonalen Einträge einer positiv semidefiniten Matrix sind betragsmäßig vom größten diagonalen Eintrag begrenzt.

Da die Diagonaleinträge von $\tilde{B_k}$ von $\max\{a_{ii} + 1 \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$ begrenzt sind, konvergiert die Folge der Matrizen $\left(\tilde{B_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ zu einer Matrix B. Dann ist B eine positiv semidefinite Vervollständigung $\Rightarrow G$ ist positiv semidefinit vervollständigbar. q. e. d.

3.5 Lemma. *C_4 ist nicht positiv definit vervollständigbar.*

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass C_4 nicht positiv semidefinit vervollständigbar ist. Sei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det B = -(1-x)^2.$$

B positiv semidefinit $\Leftrightarrow x = 1$. Betrachte nun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ? & 0 \\ 1 & 1 & 1 & ? \\ ? & 1 & 1 & 1 \\ 0 & ? & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A ist partiell positiv semidefinit und hat C_4 als Spezifikationsgraphen. Es folgt nach der obigen Beobachtung, dass die Einträge $a_{13}, a_{24}, a_{31}, a_{42}$ gleich 1 sein müssen, um A positiv semidefinit zu vervollständigen.

Da aber $a_{14} = 0$, ist keine positiv semidefinite Vervollständigung möglich $\Rightarrow C_4$ ist nicht positiv semidefinit vervollständigbar. q. e. d.

3.6 Lemma. *Seien $A \in M_n(K)$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$. Dann gilt*

$$\det A(i|i) \det A(j|j) - \det A(i|j) \det A(j|i) = (\det A)(\det A(i,j|i,j)).$$[iv]

Beweis: Es reicht, die Behauptung für A nichtsingulär zu zeigen. Angenommen, A ist nichtsingulär und sei $B := A^{-1}$. Nach der Jacobi-Identität für Determinanten gilt

$$\det B[i,j|i,j] = \frac{\det A(i,j|i,j)}{\det A}. \tag{$*$}$$

Erinnerung aus Lineare Algebra I (komplementäre Matrix): $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ mit $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(j|i)$. Nach Vorlesung Lineare Algebra Satz III.1.19 gilt $\tilde{A}A = (\det A)E_n$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \tilde{A}A &= (\det A)E_n \\ \tilde{A}E_n &= (\det A)A^{-1} \\ \frac{1}{\det A}\tilde{A} &= A^{-1} = B, \end{aligned}$$

[iv] $A(i|j)$ ist die Matrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht, $A[i,j]$ ist die Matrix, die aus der i-ten Zeile und j-ten Spalte besteht.

d.h.

$$B[i,j|i,j] = \frac{1}{\det A}\tilde{A}[i,j|i,j]$$
$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A(i|i) & (-1)^{i+j}\det A(j|i) \\ (-1)^{i+1}\det A(i|j) & \det A(j|j) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\det B[i,j|i,j] = \left(\frac{1}{\det A}\right)^2 (\det A(i|i)\det A(j|j) - \det A(i|j)\det A(j|i). \qquad (**)$$

Gleichsetzen von $(*)$ und $(**)$ liefert die Behauptung. q. e. d.

3.7 Lemma. *Seien $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ und $e = \{i, j\}$ eine Kante vom vollständigen Graphen K_n.*

Der Graph $K_n \backslash \{e\}$ ist positiv definit vervollständigbar.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $e = \{1, n\}$. Sei $A \in M_n(K)$ mit $K_n \backslash \{e\}$ als Spezifikationsgraph. Angenommen, A ist partiell positiv definit. Definiere $a_{1n} := x$. Der Einfachheit halber bezeichnen wir die so entstandene Matrix nun A. Nach Lemma 5 gilt (A ist symmetrisch)

$$\det A(1|1)\det A(n|n) - (\det A(1|n))^2 = (\det A)(\det A(1,n|1,n)). \qquad (*)$$

Mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz erhält man[v]

$$\det A(1|n) = (-1)^{n+1}x\det A(1,n|1,n) + \alpha \qquad (**)$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Da A partiell positiv definit ist, gilt $\det A(1,n|1,n) > 0$. Sei

$$x_0 = (-1)^n \frac{\alpha}{\det A(1,n|1,n)}.$$

Definiere $a_{1n} := x_0$. Der Einfachheit halber bezeichnen wir wieder die entstandene Matrix als A. Nach $(**)$ gilt $\det A(1|n) = 0$[vi]und dann folgt nach $(**)$

$$\det A = \frac{\det A(1|1)\det A(n|n)}{\det A(1,n|1,n)} > 0. \qquad (***)$$

Alle Hauptminoren sind also positiv, da A partiell positiv definit ist und wegen $(***)$, d.h. A ist positiv definit. Folglich lässt jede partiell positiv definite Matrix A mit Spezifikationsgraphen $K_n \backslash \{e\}$ eine positiv definite Vervollständigung zu, also ist $K_n \backslash \{e\}$ positiv definit vervollständigbar. q. e. d.

3.8 Hauptsatz. *Ein Graph ist genau dann positiv definit vervollständigbar, wenn er chordal ist.*

Beweis: Sei G ein Graph, $V(G) = \{1, \dots, n\}$. Sei A eine partiell positiv definite Matrix mit Spezifikationsgraphen G.

($\Leftarrow$): Angenommen, G ist chordal. Wenn $G = K_n$, ist die Behauptung klar. Sei also $G \neq K_n$. Nach Lemma 2.8 existieren nicht-adjazente Knoten i, j, so dass der Graph $H = G + \{i, j\}$ chordal ist und nach Lemma 2.7 gibt es eine maximale Clique K in H, die i, j, sowie alle zu beiden adjazenten Knoten, enthält.

Sei $B = [V(K)|V(K)]$ eine quadratische Untermatrix von A. B ist partiell positiv definit, da A partiell positiv definit ist. Der Spezifikationsgraph von B ist ein vollständiger Graph, bei dem eine Kante fehlt. Nach Lemma 3.7 kann man also B zu einer positiv definiten Matrix vervollständigen. Also können wir den (i, j)-ten Eintrag von A so definieren, dass die daraus resultierende Matrix positiv definit ist. Der Spezifikationsgraph von dieser Matrix ist H, also chordal. Mehrfaches Anwenden dieses Argumentes liefert die Behauptung.

($\Rightarrow$): Indirekt. Angenommen, G ist nicht chordal. Dann hat G den Kreis C_4 also induzierten Untergraphen, welcher nach Lemma 3.5 nicht positiv vervollständigbar ist, Widerspruch. q. e. d.

Literatur

[Bap10] Ravindra Bapat. *Graphs and Matrices.* Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.

[Bra09] Dr. Felix Brandt. *Algorithmische Graphentheorie.* Vorlesung an der Universität München, `http://www2.tcs.ifi.lmu.de/lehre/WS08-09/Graph/6KnotenfaerbungenTeil2.pdf`, Wintersemester 2008/2009.

[v] Entwicklung der Matrix $A(1|n)$ nach der ersten Zeile und j-ten Spalte

[vi] $\det A(1|n) = (-1)^{n+1} \cdot (-1)^n \frac{\alpha}{\det A(1,n|1,n)} \cdot \det A(1,n|1,n) + \alpha = (-1)^{2n+1}\alpha + \alpha = 0.$