Vortrag im Seminar „Kohomologie von Mannigfaltigkeiten und Gruppen“

Simpliziale und singuläre Homologie

Lukas Haag

17. 04. 2012
Dr. Andreas Lochmann

0 Motivation

Ziel ist es, mögliche Invarianten topologischer Räume zu suchen, um diese voneinander unterscheiden zu können. Die Fundamentalgruppe π_1 (bzw. höhere Homotopiegruppen π_n) sind dabei oftmals kompliziert zu berechnen. Die Homologiegruppe $H_n(X)$ ist einfacher zu berechnen und gibt ähnliche Informationen über die topologischen Räume preis. Sie ist ebenfalls eine Invariante von topologischen Räumen.

1 Simpliziale Homologie

Sei X ein topologischer Raum.

1.1 Bemerkung. Nach einem Satz der Topologie kann man jede differenzierbare Mannigfaltigkeit triangulieren, d.h. "ìn Dreiecke zerlegen“. Einfachste Beispiele dafür sind Polygone. Einen Torus kann man wie folgt zerlegen:

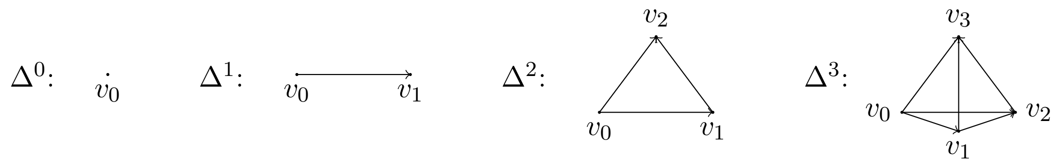
$$\begin{tikzcd}
v \arrow[r, "b"] & v \\
v \arrow[u, "a"] \arrow[r, "b"'] \arrow[ur, "c"] & v \arrow[u, "a"']
\end{tikzcd}$$

Idee nun: Verallgemeinere dies auf höhere Dimensionen.

1.2 Definition. Seien $v_0, \dots, v_k \in X$ derart, dass $\{v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0\}$ linear unabhängig sind. Ein *n-Simplex* ist die kleinste konvexe[i] Menge im $\mathbb{R}^n$, die die Punkte v_i enthält (Notation: $[v_0, \dots, v_k]$).

Der *Standard-n-Simplex* Δ^n ist $[0, e_1, \dots, e_n]$. Ein Untersimplex heißt *Facette* oder *Seite*. Die Vereinigung aller Seiten eines Simplexes heißt *Rand* ($\partial\Delta^n$), das Innere von Δ^n heißt *offener Simplex* ($\overset{\circ}{\Delta}{}^n$) (das Innere des 0-Simplex ist ein einzelner Punkt).

1.3 Beispiel.



Vereinbarung: Kanten sind so orientiert, dass für $i < j$ auch $v_i \to v_j$ gilt.

1.4 Definition. X mit einer Familie von Abbildungen $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$ heißt Δ-*Komplex*, wenn

(i) $\sigma_\alpha|_{\overset{\circ}{\Delta}{}^n}$ ist injektiv und jeder Punkt aus X liegt im Bild von genau einer Einschränkung $\sigma_\alpha|_{\overset{\circ}{\Delta}{}^n}$.

(ii) Jede Einschränkung von σ_α auf eine Seite von Δ^n ist eine Abbildung $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \to X$.

(iii) Alle σ_α sind stetig.

Man kann also X als „Sammlung“ von n-Simplizes jeglicher Dimension betrachten.

1.5 Beispiel. Der Torus (s.o.) hat zwei 2-Simplexe, drei 1-Simplexe, einen 0-Simplex, d.h. man hat sechs σ_α's (man könnte den Torus allerdings auch anders zerlegen).

1.6 Definition. Sei X ein Δ-Komplex und $\Delta_n(X)$ die freie abelsche Gruppe, welche von den offenen n-Simplizes e_α^n von X erzeugt wird. Elemente von Δ_n heißen *n-Ketten* und können als Summe $\sum_\alpha n_\alpha e_\alpha^n$ bzw. $\sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha$ (vgl. 1.4(i)) geschrieben werden ($n_\alpha \in \mathbb{Z}$).

Den Rand eines Simplexes kann man mit dem *Randhomomorphismus*

$$\partial_n : \Delta_n(X) \to \Delta_{n-1}(X),$$
$$\partial_n(\sigma_\alpha) = \sum_i (-1)^i \sigma_\alpha|_{[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]}$$

berechnen (aufgrund von 1.4(ii) wohldefiniert).

---

[i]Für alle Punkte liegt auch die Verbindungsstrecke in der Menge

1.7 Beispiel. siehe 1.3.

$$\partial\Delta^0 = [v_0], \quad \partial\Delta^1 = [v_1] - [v_0], \quad \partial\Delta^2 = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$$

1.8 Lemma. *Sei* $\Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \Delta_{n-2}(X)$. *Dann gilt* $\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) = 0$.

Beweis:

$$\begin{aligned}\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) = &\sum_{j<i}(-1)^i(-1)^j\sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v_j},\dots,\widehat{v_i},\dots v_n]}\\ &+\sum_{j>i}(-1)^i(-1)^{j-1}\sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,\widehat{v_j},\dots v_n]}.\end{aligned}$$

Diese beiden Summen heben sich auf. q. e. d.

1.9 Bemerkung. (i) Wir können eine Sequenz von Homomorphismen zwischen abelschen Gruppen aufstellen:

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots.$$

(ii) $\partial_n\partial_{n+1} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}\partial_{n+1} \subset \ker\partial_n$.

1.10 Definition. Der Quotient $H_n = \ker\partial_n / \operatorname{Im}\partial_{n+1}$ heißt *n-te Homologiegruppe* (wohldefiniert wegen 1.9(ii)).

Elemente von $\left\{\begin{matrix}\ker\partial_n\\ \operatorname{Im}\partial_{n+1}\\ H_n\end{matrix}\right\}$ heißen $\left\{\begin{matrix}\text{Zykel}\\ \text{Ränder}\\ \text{Homologieklassen}\end{matrix}\right\}$. Zwei Repräsentanten der selben Homologieklasse heißen *homolog*.

Wenn $C_n = \Delta_n(X)$, heißt $H_n^\Delta(X) := H_n(X)$ *n-te simpliziale Homologiegruppe von* X.

1.11 Beispiel. $X = T^2$.

$n = 0$: Es gibt einen 0-Simplex, also einen Erzeuger von $\Delta_0(X)$. Die Randabbildung ist die Nullabbildung, denn $\partial_1 a = \partial_1 b = \partial_1 c = v - v = 0$. Also $H_0^\Delta(X) = \ker\partial_0/\operatorname{Im}\partial_1 = \Delta_0(X)/\{0\} \simeq \mathbb{Z}$.

$n = 1$: ∂_1 ist wieder die Nullabbildung. $\partial_2 U = a + b - c = \partial_2 L$.

$H_1^\Delta(X) = \Delta_1(X)/\partial_2 U \simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, da $\{a, b, a+b-c\}$ Basis von $\Delta_1(X)$ ist. D.h. man „teilt“ $a + b - c$ aus $\Delta_1(X)$ raus und hat noch zwei Erzeuger $[a]$ und $[b]$.

$n = 2$: Es gibt keine 3-Simplizes, d.h. $\operatorname{Im}\partial_3 = 0 \Rightarrow H_2^\Delta(X) = \ker\partial_2$.

$\partial(pU + qL) = (p + q)(a + b - c) = 0 \Leftrightarrow p = -q \Rightarrow \ker\partial_2 = \langle U - L\rangle$ unendliche zyklische Gruppe, also isomorph zu $\mathbb{Z}$.

Für $n > 2$ gilt $H_n^\Delta(X) = 0$, da z.B. $\operatorname{Im}\partial_4 = 0$ (es gibt keine 4-Simplizes) und $\ker\partial_3 = 0$ (es gibt keine 3-Simplizes).

2 Singuläre Homologie

Problem bei simplizaler Homologie: Man kann für einen topologischen Raum mehrere Darstellungen als Δ-Komplex finden!

2.1 Definition. Ein *singulärer n-Simplex von X* ist eine stetige Abbildung $\sigma : \Delta^n \to X$. Sei $C_n(X)$ die freie abelsche Gruppe über der Menge der singulären n-Simplizes (*singuläre Kettengruppe*). Elemente von $C_n(X)$ heißen *singuläre n-Ketten.*

Die Randabbildung wird, wie in Abschnitt 1, wiefolgt definiert:

$$\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X),$$
$$\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_n]}$$

Ebenso analog bezeichnet $H_n(X) := \ker \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$ die *singuläre n-te Homologiegruppe.*

2.2 Satz. *Sei $X = \cup_\alpha X_\alpha$ die Zerlegung von X in Wegzusammenhangskomponenten. Dann gilt*

$$H_n(X) \simeq \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha).$$

2.3 Satz. *(i) Sei $X \neq \emptyset$ wegzusammenhängend. Dann gilt $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.*

(ii) Sei X beliebig. Dann gilt $H_0(X) \simeq \bigoplus_\nu \mathbb{Z}$, $\nu = \sharp$ Wegzusammenhangskomponenten.

Beweis:

(i) $H_0(X) = C_0(X)/\operatorname{Im}\partial_1$, da $\partial_0 = 0$ grundsätzlich. Definiere Homomorphismus $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$, $\sum_i n_i\sigma_i \mapsto \sum_i n_i$ (surjektiv, wenn $X \neq \emptyset$).

Behauptung: $\ker\varepsilon = \operatorname{Im}\partial_1$ (dann würde nach Algebra folgen, dass ε einen Iso $H_0(X) \to \mathbb{Z}$ induziert).

„$\supset$“: Sei $\sigma : \Delta^1 \to X$ ein sing. 1-Simplex, dann: $\varepsilon(\partial_1(\sigma)) = \varepsilon(\sigma|_{[v_1]} - \sigma|_{[v_0]}) = 1 - 1 = 0$.

„$\subset$“: Sei $\varepsilon\left(\sum_i n_i\sigma_i\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_i n_i = 0$ $(*)$.

Die σ_i's sind sing. 0-Simplizes, d.h. Punkte von X (Elemente von $C_0(X)$). Sei nun $x_0 \in X$ und σ_0 der 0-Simplex mit Bild x_0. Betrachte nun Pfade $\tau_i : I \to X$ von x_0 fest zu $\sigma_i(v_0)$. Wir können τ_i als einen sing. 1-Simplex auffassen (stetige Abbildung $\tau_i : [v_0, v_1] \to X$) und dann gilt $\partial\tau_i = \sigma_i - \sigma_0$. Somit $\partial_1\left(\sum_i n_i\tau_i\right) = \sum_i n_i\sigma_i - \sum_i n_i\sigma_0 \overset{(*)}{=} \sum_i n_i\sigma_i \in \operatorname{Im}\partial_1$.

(ii) folgt sofort aus 2.2 und (i). q. e. d.

3 Homotopie-Invarianz

Ziel: Zeige, dass homotopieäquivalente Räume isomorphe singuläre Homologiegruppen haben.

3.1 Bemerkung. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dadurch wird ein Homomorphismus $f_\sharp$ definiert via

$$f_\sharp : C_n(X) \to C_n(Y), \quad \sigma \mapsto f \circ \sigma : \Delta^n \to Y.$$

Da die Gleichung $f_\sharp \partial = \partial f_\sharp$ gilt, heißt $f_\sharp$ *Kettenabbildung*, denn wir erhalten folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_\sharp"'] & C_n(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_\sharp"'] & C_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_\sharp"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(Y) \arrow[r, "\partial"] & C_n(Y) \arrow[r, "\partial"] & C_{n-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Man überlegt sich, dass $f_\sharp$ Zykel zu Zykel und Ränder zu Ränder abbildet $\Rightarrow$ $f_\sharp$ induziert Homomorphismus $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$.

3.2 Satz. *Seien $f, g : X \to Y$ homotop. Dann gilt $f_* = g_*$.*

Beweis: (Skizze). Sei f zu g homotop, mittels Homotopie $H : X \times [0,1] \to Y$. Sei $[a] \in H_n(X)$, z.z. $f_*([a]) = g_*([a])$, .d.h. $f_\sharp(a) - g_\sharp(a) \in \operatorname{Im} \partial_{Y,n+1}$, also $\exists b \in C_{n+1}(Y)$: $f_\sharp(a) - g_\sharp(a) = \partial_{Y,n+1}(b)$.

Betrachte die Homotopie $H(x,t)$. Es gilt $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x)$. Für jedes feste t können wir nun aber eine Abbildung $H(\cdot,t)_\sharp$ definieren (da $H(\cdot,t) : X \to Y$). Wenn wir diese alle zusammenfassen, erhalten wir einen Zylinder in Y, der $f_\sharp(a)$ mit $g_\sharp(a)$ verbindet. Der Mantel dieses Zylinders besteht aus singulären Simplizes, d.h. er ist das gesuchte b. Der Rand von b ist gerade $f_\sharp(a) - g_\sharp(a)$. q. e. d.

3.3 Korollar. *Sei $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann sind die Abbildungen $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ Isomorphismen für alle n.*

4 Die Äquivalenz zwischen simplizialer und singulärer Homologie

4.1 Definition. Sei $A \subset X$. Sei $C_n(X,A) := C_n(X)/C_n(A)$ (Ketten in A sind also trivial in $C_n(X,A)$). Wir können alles wie vorher definieren (∂ ist die induzierte Abbildung[ii]) und so ist $H_n(X,A) := \ker \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$ die *relative Homologiegruppe*.

[ii] Algebra: $\partial' : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ induziert $\partial : C_n(X)/C_n(A) \to C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)$, $\partial([\alpha]) = [\partial' \alpha]$.

4.2 Bemerkung. Klassen aus $H_n(X,A)$ werden von *relativen Zykeln* repräsentiert: n-Ketten $\alpha \in C_n(X)$ mit $\partial\alpha \in C_{n-1}(A)$.

4.3 Definition. Ein Kettenkomplex heißt *exakt*, wenn $\ker \partial_n = \operatorname{Im} \partial_{n+1}$ für alle n. Die Homologiegruppen exakter Sequenzen sind trivial.

Man kann zeigen:

4.4 Satz. *Die Sequenz von Homologiegruppen*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{\iota_*} H_n(X) \xrightarrow{\pi_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{\iota_*} H_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

ist exakt. Dabei ist ι die kanonische Einbettung, π der kanonische Epimorphismus, ι_* und π_* wie in 3.1 und ∂ die Randabbildung mit $\partial[\alpha] = [\partial\alpha]$.

4.5 Bemerkung. Man sieht hier deutlich: Die relativen Homologiegruppen $H_n(X,A)$ „messen" die Differenz zwischen $H_n(X)$ und $H_n(A)$, denn: $H_n(X,A) = 0 \Leftrightarrow \iota_*$ ist Iso (aufgrund der Exaktheit).

4.6 Bemerkung. Man kann die Begriffe rund um die relative Homologie genauso auf die simpliziale Homologietheorie übertragen und somit eine Verbindung zwischen simplizialer und singulärer Homologie herstellen.

Sei X ein Δ-Komplex. Die Kettenabbildung $\Delta_n(X) \to C_n(X)$, welche jedem n-Simplex von X seine charakteristische Abbildung $\sigma : \Delta^n \to X \in C_n(X)$ zuordnet, induziert einen kanonischen Homomorphismus $H_n^\Delta(X) \to H_n(X)$.

4.7 Hauptsatz. *Der in 4.6 induzierte Homomorphismus ist ein Isomorphismus.*

Beweis:

a) X sei endlich-dimensional (Dimension eines Δ-Komplexes: die höchste Dimension der Simplizes aus denen er besteht) und $A = \emptyset$. Für X^k[iii] ergibt sich folgendes Diagramm exakter Sequenzen (vgl. 4.4).

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}^\Delta(X^k,X^{k-1}) \arrow[r] \arrow[d, "a"] & H_n^\Delta(X^{k-1}) \arrow[r] \arrow[d, "b"] & H_n^\Delta(X^k) \arrow[r] \arrow[d, "c"] & H_n^\Delta(X^k,X^{k-1}) \arrow[r] \arrow[d, "d"] & H_{n-1}^\Delta(X^{k-1}) \arrow[d, "e"] \\
H_{n+1}(X^k,X^{k-1}) \arrow[r] & H_n(X^{k-1}) \arrow[r] & H_n(X^k) \arrow[r] & H_n(X^k,X^{k-1}) \arrow[r] & H_{n-1}(X^{k-1})
\end{tikzcd}$$

Zuerst zeigen wir, dass a und d Isos sind:

Die simpliziale Kettengruppe $\Delta_n(X^k,X^{k-1})$ ist null für alle $n \neq k$ und freie abelsche Gruppe über alle k-Simplizes von X, wenn $n = k$ (Man betrachtet die offenen n-Simplizes aller Simplizes mit Dimension $\leq k$, wobei die Simplizes mit Dimension $\leq k-1$ trivial sind). Für $H_n^\Delta(X^k,X^{k-1})$ gilt dann dasselbe.

Für die singuläre Homologiegruppe kann man ebenfalls zeigen, dass $H_n(X^k, X^{k-1})$ gleich null ist für alle $n \neq k$ und freie abelsche Gruppe über die charakteristischen Abbildungen aller k-Simplizes in X für $n = k$. Daraus folgt, dass $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) \to H_n(X^k, X^{k-1})$ Iso ist.

Mittels Induktion wird gezeigt, dass b und e Isomorphismen sind und mittels dem sogenannten *Fünfer-Lemma* folgt, dass dann auch c Iso sein muss.

b) X ist unendlich-dimensional. Hierzu benötigen wir folgenden Satz: „Eine kompakte Menge in X kann nur endlich viele offene Simplizes in X schneiden.“

Zuerst zeigen wir, dass $H_n^\Delta(X) \to H_n(X)$ surjektiv ist: Sei z ein Repräsentant der dazugehörigen Klasse in $H_n(X)$ (d.h. z ist ein n-Zykel). z ist eine endliche Linearkombination singulärer Simplizes mit kompaktem Bild, d.h. sie schneiden nur endlich viele offene Simplizes in X. Aus diesem Grund sind sie in X^k enthalten (für irgendein k). Wir haben oben gezeigt, dass $H_n^\Delta(X^k) \to H_n(X^k)$ Iso ist, insbes. auch surjektiv, also ist z zu einem simplizialen Zykel in X^k homolog, also auch in X.

Nun die Injektivität:Sei z ein simplizialer n-Zykel aus dem Kern von $H_n\Delta(X) \to H_n(X)$, also auch der Rand einer singulären Kette in X (z ist in $H_n(X)$ trivial). Diese Kette hat ein kompaktes Bild und muss (s.o.) in einem X^k liegen. Da $H_n^\Delta(X^k) \to H_n(X^k)$ injektiv ist (s.o.), ist z dort trivial (ein simplizialer Rand in X^k) also auch in X. q. e. d.

Literatur

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.

[iii] X^k: k-Skelett von X, d.h. alle Simplizes mit Dimension kleiner gleich k