Wintersemester 2008/2009

2. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 30.10.2008, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. (a) Sei G eine Gruppe. Dann heißt

$$Z(G) := \{z \in G : \forall g \in G : zg = gz\}$$

das *Zentrum* von G. Zeigen Sie: $Z(G)$ ist ein Normalteiler von G.

   (b) Sei G eine abelsche Gruppe und N eine Untergruppe von G. Zeigen Sie, daß G/N abelsch ist.

2. Sei $Q = \{E, -E, I, -I, J, -J, K, -K\}$ mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung die Gruppe wie in Aufgabe 4 des ersten Übungsblattes. Bestimmen Sie sämtliche Untergruppen und Normalteiler von Q.

3. Für reelle Zahlen a, b sei $t_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $t_{a,b}(x) = ax + b$. Es sei $G := \{t_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$. Zeigen Sie:

   (a) Die Menge G bildet mit der Komposition von Abbildungen eine Gruppe.

   (b) Es ist $N := \{t_{1,b} \mid b \in \mathbb{R}\}$ Normalteiler in G.

   (c) Es ist G/N isomorph zu $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

4. Es sei G eine Gruppe. Für $a, b \in G$ heißt $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ der *Kommutator* von a und b. Beweisen Sie:

   (a) $[G, G] := \{[a_1, b_1] \cdots [a_r, b_r] \mid r \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in G\}$ ist ein Normalteiler von G und $G/[G, G]$ ist abelsch.

   (b) Ist N ein Normalteiler von G, so gilt

$$G/N \text{ abelsch} \iff [G, G] \subset N.$$

Hinweis: Die Klausur zur Vorlesung findet voraussichtlich am Dienstag, den 10.02.2009 von 12:15-14:45 in HG 7 statt.