

3. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 06.11.2008, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

- (a) Sei G eine Gruppe. Sei U eine Untergruppe von G vom Index 2.
Zeigen Sie: $U \triangleleft G$.
(b) Sei G eine Gruppe, welche genau eine Untergruppe U vom Index k besitzt.
Zeigen Sie: $U \triangleleft G$.

- Sei G eine Gruppe. Sei U eine Untergruppe von G .
Zeigen Sie: U ist Normalteiler von G genau dann, wenn gilt:

$$\forall a, b \in G \exists c \in G : (aU)(bU) = cU.$$

- Bestimmen Sie alle Normalteiler der Gruppen \mathfrak{S}_3 und \mathfrak{S}_4 .
- Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\varphi(n)$ die Anzahl der Elemente $t \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq t \leq n - 1$ und $\text{ggT}(n, t) = 1$.
Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{\nu|n} \varphi(\nu) = n.$$

Anleitung: Betrachten Sie eine zyklische Gruppe der Ordnung n .