4. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 13.11.2008, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei $M = \{1,2,3,4\}$. Sei N die Untergruppe $\{\mathrm{id}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ der $\mathfrak{S}_4$ mit

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeigen Sie: Durch $\sigma \cdot x := \sigma(x)$ wird eine Operation von N auf M definiert.

   (b) Bestimmen Sie die Bahnen $B(2)$ und $B(4)$.

   (c) Bestimmen Sie die Stabilisatoruntergruppen $\mathrm{Stab}(2)$ und $\mathrm{Stab}(4)$.

   (d) Die Untergruppe N ist Normalteiler der $\mathfrak{S}_4$. Sei H die von $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugte zyklische Untergruppe von $\mathfrak{S}_4$. Bestimmen Sie die Elemente von HN, HN/N, $H \cap N$ und $H/H \cap N$ sowie Gruppentafeln für HN/N und $H/H \cap N$. Geben Sie explizit einen Isomorphismus zwischen diesen beiden Faktorgruppen an.

2. Seien G_1 und G_2 zyklische Gruppen der Ordnung m bzw. n. Es sei $(m,n) = 1$. Zeigen Sie: $G_1 \times G_2$ ist eine zyklische Gruppe der Ordnung mn.

   Hinweis: $(G_1 \times G_2, \circ)$ ist eine Gruppe mit $(a,b) \circ (a',b') := (aa', bb')$ für alle $a, a' \in G_1, b, b' \in G_2$.

3. Es sei G eine Gruppe und

$$Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \quad \forall g \in G\}$$

   das Zentrum von G.

   (a) Sei N eine Untergruppe von G mit $N \subset Z(G)$. Zeigen Sie:

      (i) N ist ein Normalteiler von G.

      (ii) Ist G/N eine zyklische Gruppe, so ist G abelsch.

   (b) Beweisen Sie: Die Gruppe der inneren Automorphismen ist isomorph zu $G/Z(G)$.