Wintersemester 2008/2009

5. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 20.11.2008, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei p eine Primzahl.

   (a) Sei G eine Gruppe der Ordnung p^n. Zeigen Sie: Das Zentrum von G ist nicht trivial.

   Anleitung: G operiert auf sich selbst durch Konjugation. Benutzen Sie die Bahnzerlegungsformel.

   (b) Sei G eine Gruppe der Ordnung p^2. Zeigen Sie: G ist abelsch.

   Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3 (a) (ii) des 4. Übungsblatts.

2. Sei G eine Gruppe der Ordnung 12. Seien s_2 und s_3 die Anzahlen der verschiedenen 2- bzw. 3-Sylow-Untergruppen von G.

   (a) Welche Werte sind für s_2 möglich? Welche für s_3?

   (b) Was folgt aus $s_2 = 3$ für s_3? Was folgt aus $s_3 = 4$ für s_2?

   (c) Folgern Sie: G besitzt einen nichttrivialen Normalteiler.

3. Seien p und q Primzahlen mit $p < q$ und G eine Gruppe der Ordnung pq. Zeigen Sie: G besitzt einen nichttrivialen Normalteiler. Ist $q - 1$ nicht durch p teilbar, so ist G zyklisch.

4. (a) Sei G eine Gruppe der Ordnung 56. Zeigen Sie: G besitzt einen nichttrivialen Normalteiler.

   (b) Verifizieren Sie dieselbe Behauptung für eine Gruppe G der Ordnung 30.