

7. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 04.12.2008, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Teilt man die Körpergröße (in cm) von M.H. durch 3, so lässt sie den Rest 1. Teilt man sie durch 7, so lässt sie den Rest 2, beim Teilen durch 11 den Rest 8. Bestimmen Sie zunächst unter Verwendung des chinesischen Restsatzes alle möglichen Werte und bestimmen Sie daraus mit Hilfe offensichtlicher Abschätzungen die Körpergröße von M.H..
2. Es sei G eine abelsche p -Gruppe vom Typ $(p^{r_1}, \dots, p^{r_s})$ für natürliche Zahlen $r_1 \geq \dots \geq r_s \geq 1$. Weiter sei

$$U = \{x \in G : px = 0\}.$$

- (a) Zeigen Sie: U ist eine Untergruppe von G .
 - (b) Bestimmen Sie den Typ von U und von G/U .
3. Es sei K ein Körper und R ein Integritätsbereich mit $K \subseteq R$. Beweisen Sie:
 - (a) R ist in kanonischer Weise ein K -Vektorraum.
 - (b) Ist $\dim_K R < \infty$, so ist R ein Körper.
Anleitung: Untersuchen Sie für $b \in R$ die Abbildung $l_b : R \rightarrow R$ mit $l_b(r) = br$. Hinweis: l_b ist K -linear.
 - (c) Bestimmen Sie den kleinsten Unterring von \mathbb{R} , welcher \mathbb{Q} und $\sqrt{2}$ enthält und zeigen Sie, daß er bereits ein Körper ist.
 4. Sei R der Ring der auf dem Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ stetigen, reellwertigen Funktionen. Bestimmen Sie die Menge der Nullteiler von R .