

8. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 11.12.2008, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei $S := \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ für eine Primzahl p .
 - (a) Bestimmen Sie $\mathbb{Z}_S$ explizit.
 - (b) Bestimmen Sie die Einheitengruppe sowie sämtliche Ideale von $\mathbb{Z}_S$.
2. Seien R ein kommutativer Ring mit 1 und $r \in R$. Sei $(X - r)$ das vom Polynom $X - r$ in $R[X]$ erzeugte Ideal. Zeigen Sie, daß es einen natürlichen Isomorphismus von $R[X]/(X - r)$ nach R gibt.
3. Es seien R ein Integritätsbereich und $R[X]$ der Polynomring über R . Weiter sei R^* die Gruppe der Einheiten in R . Zeigen Sie:
 - (a) Zu $a \in R^*$ und $b \in R$ gibt es genau einen Automorphismus φ von $R[X]$ mit $\varphi|_R = \text{Id}_R$ und $\varphi(X) = aX + b$.
 - (b) Jeder Automorphismus φ von $R[X]$ mit $\varphi|_R = \text{Id}_R$ erfüllt $\varphi(X) = aX + b$ mit $a \in R^*$ und $b \in R$, ist also von der in (a) angegebenen Form.
 - (c) Bestimmen Sie $\text{Aut}(\mathbb{Z}[X])$ und $\text{Aut}(\mathbb{Q}[X])$.
4. Sei R ein Integritätsbereich.
 - (a) Bestimmen Sie die Einheitengruppe des Polynomrings $R[X]$.
 - (b) Sei $R[[X]]$ der Ring der formalen Potenzreihen über R , d.h.

$$R[[X]] := \{f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow R\}$$

mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation gemäß

$$(fg)(s) := \sum_{k=0}^s f(k)g(s-k)$$

für alle $f, g \in R[[X]]$ und $s \in \mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie die Einheitengruppe von $R[[X]]$.