Wintersemester 2008/2009

9. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 18.12.2008, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. (a) Sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie: R ist ein Körper genau dann, wenn R genau zwei Ideale und eine Eins besitzt.

   (b) Sei $A = \mathfrak{M}(2; K)$ der Ring aller 2×2-Matrizen über einem Körper K. Zeigen Sie, daß A und $\{0\}$ die einzigen Ideale in A sind.

2. Sei $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$. Zeigen Sie:

   Die Einheitengruppe $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]^*$ besitzt unendlich viele Elemente.

3. Sei R ein Integritätsbereich und $a \in R$. Zeigen Sie:

   (a) Das von a und X erzeugte Ideal (a, X) ist ein Hauptideal genau dann, wenn a entweder 0 oder eine Einheit in R ist.

   (b) Der Polynomring $R[X]$ ist ein Hauptidealring genau dann, wenn R ein Körper ist.

4. Zeigen Sie: Die Elemente 6 und $2 + 2\sqrt{-5}$ besitzen keinen ggT in $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$.