

10. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 15.01.2009, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Zeigen Sie, daß die folgenden Polynome irreduzibel sind:

- (a) $2X^4 + 200X^3 + 2000X^2 + 20000X + 20 \in \mathbb{Q}[X]$,
- (b) $X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 11X - 6 \in \mathbb{Q}[X]$,
- (c) $X^2Y + XY^2 - X - Y + 1 \in \mathbb{Q}[X, Y]$.

2. Es sei p eine Primzahl. Wie viele

- (a) normierte,
- (b) normierte, reduzible
- (c) normierte, irreduzible

Polynome vom Grad 2 gibt es in $\mathbb{Z}_p[X]$? Bestimmen Sie sämtliche normierte, irreduzible Polynome für $p = 2$ und $p = 3$.

3. Es sei $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ ein normiertes Polynom.

- (a) Zeigen Sie: Besitzt $f(X)$ eine rationale Nullstelle, so ist diese ganzzahlig und teilt das Absolutglied von f .
- (b) Prüfen Sie, ob $f(X) = X^2 + 5X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ irreduzibel ist.
- (c) Geben Sie eine Zerlegung von $g(X) = X^3 + 15X^2 + 23X - 231$ in Linearfaktoren an.
- (d) Untersuchen Sie das Polynom $h(X) = X^4 - 10X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ auf Irreduzibilität.

4. Es sei $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$. Zeigen Sie, daß $f(X)$ keine ganzzahlige Nullstelle besitzt, falls $f(0)$ und $f(1)$ ungerade Zahlen sind. Beweisen Sie, daß $f(X)$ keine rationale Nullstelle besitzt, falls der führende Koeffizient von $f(X)$ ebenfalls ungerade ist.

Frohe Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr!!