

## 11. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 22.01.2009, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei  $L/K$  eine endliche Körpererweiterung vom Grad  $[L : K] = 2^k$ . Sei  $f \in K[X]$  ein Polynom vom Grad 3, welches in  $L$  eine Nullstelle hat. Zeigen Sie:  
 $f$  hat bereits eine Nullstelle in  $K$ .
2. Sei  $f(X) \in \mathbb{R}[X]$  ein Polynom vom Grad 3. Zeigen Sie:  
 $\mathbb{R}[X]/(f(X))$  ist kein Körper.
3. (a) Seien  $p$  eine Primzahl und  $n$  eine natürliche Zahl. Zeigen Sie:  
Ist  $K$  ein Körper mit  $p^n$  Elementen, so hat  $K$  die Charakteristik  $p$ .  
(b) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Körper mit 3 und mit 4 Elementen.
4. Bestimmen Sie den Grad der folgenden Teilkörper  $K$  von  $\mathbb{C}$  über  $\mathbb{Q}$  und jeweils eine  $\mathbb{Q}$ -Basis von  $K$ :
  - (a)  $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ,
  - (b)  $K := \mathbb{Q}(\sqrt{18}, \sqrt[10]{2})$ ,
  - (c)  $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i\sqrt{5}, \sqrt{2} + \sqrt{7})$ ,
  - (d)  $K := \mathbb{Q}(\sqrt{8}, 3 + \sqrt{50})$ ,
  - (e)  $K := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, u)$ , wobei  $u^4 + 6u + 2 = 0$ ,
  - (f)  $K := \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ .