Wintersemester 2008/2009

12. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 29.01.2009, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei K ein Körper. Beweisen Sie:

   (a) $K[X]$ enthält unendlich viele Primelemente.

   (b) Ist K algebraisch abgeschlossen, so besitzt K unendlich viele Elemente.

2. Sei $\overline{K}$ der algebraische Abschluß des Körpers K. Zeigen Sie: Ist K abzählbar, so auch $\overline{K}$.

3. Sei $\overline{K}$ der algebraische Abschluß eines endlichen Körpers K. Dann gibt es für jedes $a \in \overline{K} \backslash \{0\}$ ein $q \in \mathbb{N}$ mit $a^q = 1$.

4. Sei K ein Körper. Seien ferner $f \in K[X]$ mit $\mathrm{Grad}(f) > 0$ und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von $K[X]$ mit $f \in \mathfrak{m}$.

   Zeigen Sie: $K[X]/\mathfrak{m}$ ist in kanonischer Weise ein Erweiterungskörper zu K und f besitzt in $K[X]/\mathfrak{m}$ eine Nullstelle.