Wintersemester 2008/2009

13. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 05.02.2009, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. (a) Zeigen Sie: $f(X) = X^3 - 7$ ist über $\mathbb{Q}$ irreduzibel.

   (b) Sei $\sqrt[3]{7}$ die reelle Nullstelle von $f(X)$. Zerlegen Sie $f(X)$ über dem Körper $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ in irreduzible Faktoren.

   (c) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper E von $f(X)$ über $\mathbb{Q}$. Welchen Grad hat E über $\mathbb{Q}$?

2. Sei ${}^{E}\!/\!{}_{K}$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad $[E : K] = n$. Es gebe ein Element $\alpha \in E$ und Automorphismen $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ von E mit den folgenden Eigenschaften:

   (i) $\sigma_{i|K} = id_K$ für $i = 1, \ldots, n$.

   (ii) Für alle Paare (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$ gelte $\sigma_i(\alpha) \neq \sigma_j(\alpha)$.

   Zeigen Sie: $E = K(\alpha)$.

3. Seien K ein Körper und $\overline{K}$ sein algebraischer Abschluß. Seien $K(X)$ bzw. $\overline{K}(X)$ die Körper der rationalen Funktionen in einer Variablen über K bzw. $\overline{K}$. Zeigen Sie: $\overline{K}(X)$ ist eine normale Erweiterung von $K(X)$.

4. Seien K ein Körper, $f(X) \in K[X]$ ein Polynom und E der Zerfällungskörper von f über K. Die Nullstellen von f in E seien einfach. Zeigen Sie, daß die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (i) Für je zwei Nullstellen α_1, α_2 von f gibt es einen K-Automorphismus φ von L mit $\varphi(\alpha_1) = \alpha_2$.

   (ii) f ist irreduzibel über K.