

### 3. Übungsblatt zur Algebra II

Abgabe: Do, 05.05.2011, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Es sei  $L := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}) \subset \mathbb{C}$ .
  - (a) Bestimmen Sie den Grad  $[L : \mathbb{Q}]$ , und geben Sie den Separabilitätsgrad  $[L : \mathbb{Q}]_s$  an.
  - (b) Geben Sie alle Homomorphismen  $L \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}$  an, wobei  $\bar{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$  der algebraische Abschluss von  $\mathbb{Q}$  ist.
2. Bestimmen Sie die Minimalpolynome der Zahlen  $\sqrt{2 + \sqrt[3]{2}}$  und  $\sqrt{3 + \sqrt[5]{3}}$  über  $\mathbb{Q}$ .
3. Seien  $K$  ein Körper der Charakteristik  $p > 0$  und  $a$  ein Element aus  $K$ , das nicht als  $p - te$  Potenz eines Elementes aus  $K$  geschrieben werden kann. Zeigen Sie: Für jede ganze Zahl  $e \geq 0$  ist  $f = X^{p^e} - a$  ein über  $K$  irreduzibles Polynom.
4. Sei  $L/K$  eine Körpererweiterung in Charakteristik  $p > 0$ . Zeigen Sie: Ein über  $K$  algebraisches Element  $\alpha \in L$  ist genau dann separabel über  $K$ , wenn  $K(\alpha) = K(\alpha^p)$  gilt.