

4. Übungsblatt zur Algebra II

Abgabe: Do, 12.05.2011, bis 18 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Zeigen Sie, daß die folgenden Körpererweiterungen Galoisweiterungen sind und bestimmen Sie die Galoisgruppe:

(i) $\mathbb{Q}(i + \sqrt{2})/\mathbb{Q}$

(ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$

(iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$.

2. Bestimmen Sie die Galoisgruppen der folgenden Polynome und sämtliche Zwischenkörper zwischen \mathbb{Q} und dem Zerfällungskörper über \mathbb{Q} :

(i) $X^4 - 4 \in \mathbb{Q}[X]$

(ii) $X^4 - 6X^2 + 5 \in \mathbb{Q}[X]$.

3. Sei E/K eine endliche Galoisweiterung mit $G = \text{Gal}(E/K)$. Sei α ein Element aus E mit $\sigma(\alpha) \neq \alpha$ für alle $\sigma \in G \setminus \{\text{id}\}$.

Zeigen Sie: $E = K[\alpha]$.

4. Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom. Die Galoisgruppe G von f sei abelsch. Zeigen Sie:

Jede Nullstelle α von f ist ein primitives Element des Zerfällungskörpers von f über \mathbb{Q} .